Problemas de Algebra

y cómo resolverlos

Por : Armando Tori Loza
Juan C. Ramos Leyva.

COLECCIÓN RACSO

Problemas de

ALGEBRA

y cómo resolverlos

Colección Racso

Dirigido por:

FÉLIX AUCALLANCHI VELÁSQUEZ

DEDICATORIA

A la memoria de Zacarías Tori mi padre, ejemplo de experiencia e inteligencia.

A mi querida madre Adela, por su abnegado apoyo y afanoso deseo de lograr mi superación.

A Shirley G., por su colaboración y motivación en la realización de mis proyectos.

J. Armando Tori L.

DEDICATORIA

A mis queridos padres Oscar y Marcelina por sus esfuerzos realizados para brindarme educación.

A Norith K. por su amor y comprensión la cual alegra mi vida.

Juan C. Ramos L.

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú
Imprenta AURASA E.I.R.L. - Jr. Luna Pizarro 729 - Lima 13

SERIE DE LIBROS Y
COMPENDIOS
CIENTIFICOS
COLECCION RACSO

PROBLEMAS DE ALGEBRA Y COMO RESOLVERLOS

1ra EDICION

COLABORADORES:

Lic. Carlos Arámbulo O.	UNI
Ing. Pedro Napa Mendoza	UNI
Lic. Carlos Sampen V.	UNFV
Ing. Gino Allende L.	UNHV
Ing. Carlos Paucarpura C.	UNCP
Lic. Jorge Muchaypiña R.	ISPCH
Ing. Edward Julcamoro Ascencio	UNC

RACSO EDITORES LIMA

Título Original de la obra:
Algebra Práctica - Volumen 1
© 1996, por *Armando Tori L.*

Título Actual de la obra:
Problemas de Algebra y cómo resolverlos
© 1998, por *Armando Tori L. y Juan C. Ramos L.*

Primera edición
Publicada por RACSO EDITORES - ENERO 1998

Supervisión general:

Ing. *Martín Casado Marquez* (UNI)
Profesor de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional del Callao

Revisión de estilo:

Lic. Carlos Chávez Vega
Profesor de Matemática de la UPAO - Trujillo . Presidente de la Sociedad Matemática del Perú.

Revisión Técnica :

Lic. Yuri Calle Ramos
Profesor del Colegio Reina del Mundo - La Molina

Composición, Diagramación e Ilustraciones:
Compañia Editorial: ***RACSO EDITORES***

Supervisión de la edición:
Miguel Angel Díaz Lorenzo

Compañia Editorial: *RACSO EDITORES*
Dirigida por: ***Félix Aucallanchi V.***

Primera edición en español

Printed in Peru - Impreso en Perú

INDICE GENERAL

SIMBOLOS

$\{1; 2; 3\}$	conj. con elementos 1, 2 y 3
N^*	conj. de los números naturales: 0; 1; 2; 3; ...
N	conj. de los números naturales: 1; 2; 3; ...
Z	conj. de los números enteros:...; -2; -1; 0; 1;
Z^+	conj. de los números enteros positivos
Z^-	conj. de los números enteros negativos
Q	conj. de los números racionales
Q'	conj de los números irracionales
$\Re$	conj. de los números reales
$\Re^+$	conj. de los números reales positivos
$\Re^-$	conj. de los números reales negativos
C	conj. de los números complejos
i	símbolo que representa a $\sqrt{-1}$
$\{\}$ o $\emptyset$	conjunto nulo o vacío
$\in$	pertenece a ...
$\notin$	no pertenece a ...
$A \subset B$	A es subconjunto de B
$A \cap B$	A intersección B
$A \cup B$	A unión B
A', o, $\complement_A$	complemento del conj. A
$\exists$	existe
$\nexists$	no existe
$\exists!$	existe un único
$\nexists!$	no existe un único
$\forall$	para todo
$\not\forall$	no para todo
Σ	suma, o, sumatoria
$(x; y)$	un par ordenado de números
$d_{(A, B)}$	distancia entre los puntos A y B
$\rightarrow$ o $\therefore$	implica, luego, por lo tanto
$\leftrightarrow$	es equivalente a, implica en ambos sentidos
$\Rightarrow$	entonces
$\Leftrightarrow$	si y solo si
$/$	tal que
$=$	igual

$\neq$	desigual, distinto
$\equiv$	idéntico
$\approx$	aproximadamente
$2n$	número par $(n \neq 0)$
$2n + 1$	número impar $(n \in Z)$
$2n - 1$	número impar $(n \in N)$
$\propto$	proporcional a
$\lvert a \rvert$	valor absoluto de a
$a > b$	a es mayor que b
$a < b$	a es menor que b
$a \geq b$	a es mayor o igual que b
$a \leq b$	a es menor o igual que b
$a \gg b$	a es mucho mayor que b
$a \ll b$	a es mucho menor que b
$a < c < b$	c es mayor que a y menor que b
$\sim$	semejante
$\equiv$	congruente
$\wedge$	y
$\vee$	o
$f(x)$	función de x
$f^{-1}(x)$	función inversa de x
$n!$	factorial de $n = n\,.(n - 1).(n - 2).\;...\;().2.1$
$\operatorname{sen} x$	*seno* del número x
$\cos x$	*coseno* del número x
$\operatorname{tg} x$	*tangente* del número x
$\operatorname{ctg} x$	*cotangente* del número x
$\sec x$	*secante* del número x
$\csc x$	*cosecante* del número x
lím	límite

PROLOGO DE LOS AUTORES

El Algebra presenta un nivel superior de simbolización. El *número-símbolo* y las operaciones que con él se podían realizar, dieron paso a un nuevo símbolo, *una letra*; que podría representar un número cualquiera o un número específico, pero aún desconocido. Su manipulación abstracta proporciona una eficacia y economía de pensamientos notables.

En el presente libro: problemas de Algebra y cómo resolverlos, se han incluído 25 capítulos, tratando de cubrir en su totalidad a todo este curso. Debemos de resaltar la inclusión de cuatro capítulos novedosos como lo son : Cálculo de Probabilidades, Campo Complejo, Matrices y Funciones, que por ese fenómeno evolutivo del aprendizaje nos hemos visto en la necesidad de desarrollarlos, exponiéndolos de una manera práctica y sencilla pero sin ocultar información alguna.

Cada capítulo presenta la teoría necesaria para dominar el tema en consideración, acompañado de una selección de problemas resueltos los cuales han sido ordenados gradualmente según el nivel de dificultad que presentan, con el único fin de proporcionar un dominio de todas las aplicaciones que podría darse en su estudio, también se incluye una apreciable cantidad de problemas propuestos, los mismo que han sido calsificados en tres niveles para que el estudiante tenga posibilidad de entrenarse y comprobar asi su aprendizaje.

El objetivo perseguido con el estilo del presente libro es lograr que el estudiante, se acostumbre a analizar y resolver muchos problemas antes de que se sienta seguro de actuar en otras circunstancias. La mejor manera de aprender matemáticas es hacer operaciones, meditar sobre lo efectuado y otra vez efectuar operaciones, haciéndonos estas interrogantes "¿Cómo y porqué este problema es distinto y semejante respecto a otros?" o "¿Cuál es el método que se usó para resolver este problema?". Esta actitud es mucho más conveniente que la de otros estudiantes, que creen que si comprenden lo que el profesor explica en clase podrán resolver sin dificultad cualquier otro problema. Cuando el profesor describe un concepto en la pizarra es posible que se entienda bien lo que está haciendo, pero esto no implica que se pueda resolver sin mayor esfuerzo un problema semejante.

Finalmente esperamos que esta propuesta de texto práctico tenga acogida tanto entre los estudiantes, sobre todo de aquel grupo que siempre tuvo dificultad para abordar por su propia cuenta la lista de problemas que se les puso en frente asi como de los colegas profesores que con sus invalorables enseñanzas, enrrumban al estudiante por el camino del éxito. Al igual que lo ocurrido con nuestras obras publicadas anteriormente, nos comprometemos a estar atentos a toda sugerencia u observación del contenido de este trabajo.

Juan C. Ramos L. J. Armando Tori L.

PROLOGO DEL EDITOR

A medida que hemos ido difundiendo las obras de matemática de la COLECCIÓN RACSO, se ha recogido una rica y variada cantidad de sugerencias, así como también de solicitudes por determinados cursos. Fue entonces un compromiso publicar un texto de algebra, y hemos creído conveniente hacerlo a travez de la parte práctica que éste posee, dado que es el lado más sensible del aprendizaje de este curso.

Siendo consecuentes con nuestro estilo de trabajo mostrado ya en los textos: Problemas de Física y ¿cómo resolverlos?, hemos elaborado ahora el texto : PROBLEMAS DE ALGEBRA Y COMO RESOLVERLOS, en el que el estudiante y el lector en general pueden apreciar el desarrollo del curso por medio de un conjunto de ejercicios resueltos los que han sido cuidadosamente seleccionados teniéndose en cuenta los siguientes aspectos: Un pequeño pero completo resúmen teórico de cada tema, el desarrollo ordenado de los capítulos, el nivel gradual de dificultad de los problemas y la variabilidad de problemas tipos que existen en cada tema.

El objetivo que nos hemos trazado con este texto, es el de satisfacer a aquel grupo de estudiantes que casi siempre asegura entender lo que el profesor explica en aula, pero que sin embargo, al encontrarse a solas practicando por su cuenta los ejercicios dejados como tarea, le resultan muy difíciles y en algunos casos hasta imposible de resolverlos. Esta sensación negativa, la hemos experimentado casi todos en nuestra formación sea como estudiantes de secundaria, de nivel Pre- Universitario y también de nivel Superior. Esperamos contribuir de algún modo a disminuir estas carencias, por tal razón nos animamos a recurrir a dos prestigiosos y reconocidos profesores de matemática Ing. Armando Tori Loza y Juan C. Ramos Leyva, para que nos prepararan este volumen de Algebra .

Estamos seguros que el presente trabajo contribuirá en la correcta formación matemática de los estudiantes, pues se ha tratado en lo posible de ser rigurosos en las definiciones y notaciones que la matemática contemporánea exige. Como editor, me corresponde siempre leer los manuscritos que nos entregan los autores y debo reconocer que toda esta experiencia fue muy ilustrativa sobre todo para recordar lo que antaño se nos enseñó de este materia, y veo con asombro los importantes cambios que ha experimentado el curso de Algebra; creo por tanto que la obra que ponemos en vuestras manos será un excelente complemento para su aprendizaje.

Al revisar los contenidos, el lector comprobará que en el índice se mencionan cinco capítulos que no se desarrollan en este volúmen y que corresponden a un nivel superior del Algebra como son las series, las sucesiones, la inducción matemática, los límites y las derivadas. Como editor he sabido atender con esta primera publicación las innumerables solicitudes de parte de los lectores para contar con el presente trabajo, por lo tanto nos comprometemos a incorporar tales temas en nuestra próxima edición.

Atentamente:

Félix Aucallanchi Velásquez

Lima 1 998

AL PROFESOR

Cuando se quiere exponer uno de los tantos temas que comprende el curso de algebra, los requerimientos básicos son dos : disponer del resúmen teórico esencial, el cual logramos enriquecer cuando discutimos frente a los alumnos y tener una selección de problemas lo suficientemente amplia y variada como para poder elegir las aplicaciones que el profesor considere necesaria.

Ambos requerimientos son los que trata de satisfacer la presente obra, por tal motivo, cada capítulo contiene una teoría concisa pero que no deja de lado nada esencial del tema en estudio, además para corroborar lo que indica el título de la obra , se acompaña cada capítulo de una gran variedad de problemas resueltos y propuestos los que suman más de 2 100 ejercicios. En los resueltos tratamos de explicar con detalle los diferentes pasos que conducen a la solución, indicando los principios o reglas que justifican lo que se está desarrollando.

Por lo expuesto, consideramos que el presente esfuerzo, tendrá la acogida que ya nos dispensaron en nuestra edición anterior y que ahora se presenta enriquecida con los temas de Algebra intermedia y que pueden ser utilizados tanto por los profesores que tienen alumnos de nivel escolar, como por aquellos que adiestran alumnos para los exámenes de ingreso a centros de educación superior.

Atentamente:

Los Autores

AL ESTUDIANTE

Es frecuente encontrar un texto de Algebra en el cual se exponen los temas tratados de una manera no tan sencilla para el lector, quelejos de ayudarlos a entender mejor algún concepto tratado en clase , lo que consiguen es confundirlo aún más. La experiencia adquirida durante tantos años dedicados a la docencia, nos han permitido recoger las distintas inquietudes de los estudiantes, como lo es la búsqueda de un texto que no lo complique en lo teórico y que lo entrene con toda la variedad de ejercicios y problemas que pueden existir del tema tratado.

El texto "Problemas de Algebra y cómo resolverlos" se pone a tu disposición amigo estudiante, con la única finalidad de satisfacer todos tus requerimientos con respecto al curso. El resúmen teórico que se expone en el inicio de cada capítulo, asimismo como la gran variedad de problemas resueltos y propuestos han sido cuidadosamente ordenados teniendo en cuenta el nivel de dificultad que presentan cada uno de ellos; esto te permitira tener un amplio dominio del capítulo tratado.

Recomiendo al estudiante, para un mejor manejo del texto seguír las siguientes normas:

1°) Repasar atentamente el resúmen teórico del capítulo a tratar.

2°) Repasar los ejercicos y problemas resueltos, observando en cada uno de ellos, la aplicación de su resúmen teórico.

3°) Intentar por tu propia cuenta los ejercicios y problemas resueltos y luego comparar tus pasos con aciertos y/o desaciertos con la resolución que presentamos para cada problema.

4°) Entrenarse con los ejercicios y problemas propuestos y consultar con tu profesor sobre tus dificultades y nuevos métodos.

Finalmente esperando que "Problemas de Algebra y cómo resolverlos" logren en tí un mayor dominio del curso, no nos queda mas que desearte éxitos en tu meta trazada.

Atentamente :

Los Autores

1 Exponentes y Radicales

DEFINICION 1.

Si a es un número real y n es un entero positivo, entonces :

$$a^n = \underbrace{a.a.a.........a}_{n \text{ factores}}$$

donde a "n" se le denomina *exponente* ,

"a"se conoce como *base*

y a^n recibe el nombre de *n-ésima potencia* de a.

Por ejemplo x^5 es la quinta potencia de x , donde

$$x^5 = \underbrace{x.x.x.x.x}_{5 \text{ factores}}$$

Cuando una letra o símbolo se escribe sin exponente, se sobreentiende que éste es *uno* (1). Así : $x = x^1$.

1.1) TEOREMAS DE EXPONENTES

Si $n, m \in N$ y $a, b \in \Re$, entonces :

I) $a^n.a^m = a^{n+m}$

II) $\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$

III) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $a \neq 0$

IV) $(a.b)^n = a^n.b^n$

V) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$

Cuando el exponente es cero (0) ó negativo, se requieren definiciones adicionales:

DEFINICION 2.

Si $a \in \Re$ y $-n$ es un entero negativo, entonces se define :

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{tal que : } a \neq 0$$

En la actualidad se define : $0^0 = 1$.

Puede demostrarse que los teoremas de los exponentes cuando éstos son enteros positivos, también son válidos para exponentes cero y enteros negativos y con las restricciones convenientes también son válidos para exponentes reales.

CASO ESPECIAL (Exponentes Sucesivos)

$$a^{b^{c^d}} = a^{b^x} = a^y \quad , \text{ donde : } c^d = x \; ; \; b^x = y$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Indicar el equivalente de : $\dfrac{15^6.12^4.5^9.6^4}{10^{11}.3^{14}.5^4}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución.-

A primera vista es fácil reconocer que las bases de todas las potencias dadas, pueden expresarse en función de sus factores primos (2; 3; y 5); al hacer esto la expresión original quedaría lista para aplicar los Teoremas de Exponentes vistos en el item 1.1. Veamos :

$$15 = 3.5 \;;\; 12 = 2^2.3 \;;\; 6 = 2.3 \;;\; 10 = 2.5$$

Asi la expresión propuesta se transforma en : $E = \dfrac{(3.5)^6.(2^2.3)^4.(5)^9.(2.3)^4}{(2.5)^{11}.(3)^{14}.5^4}$

Aplicando el teorema IV, obtenemos : $E = \dfrac{3^6.5^6.2^8.3^4.5^9.2^4.3^4}{2^{11}.5^{11}.3^{14}.5^4}$

Reduciendo potencias de bases iguales : $E = \dfrac{2^{8+4}.3^{6+4+4}.5^{6+9}}{2^{11}.3^{14}.5^{11+4}}$

Efectuando operaciones en los exponentes : $E = \dfrac{3^{14}.5^{15}.2^{12}}{2^{11}.5^{15}.3^{14}}$

Simplificando términos arriba y abajo, nos queda : $E = 2$ **RPTA. B**

2.- Encontrar un número que sea equivalente de : $T=\dfrac{(18)^6.(54)^{-3}.(8)^{-6}.(36)^2}{(24)^{-2}.(3)^{-6}.(0,5)^4.(27)^5}$

A) 1 ***B) 1/2*** ***C) 1/3*** ***D) 1/9*** ***E) 1/5***

Resolución.-

Procediendo del mismo modo como en el ejercicio anterior, escribiremos cada número encerrado por paréntesis en función de sus factores primos :

$$T=\frac{\left(2.3^2\right)^6.\left(2.3^3\right)^{-3}.\left(2^3\right)^{-6}.\left(2^2.3^2\right)^2}{\left(2^3.3\right)^{-2}.(3)^{-6}.\left(2^{-1}\right)^4.\left(3^3\right)^5}$$

Aplicando el teorema IV se tendrá : $T=\dfrac{2^6.3^{12}.2^{-3}.3^{-9}.2^{-18}.2^4.3^4}{2^{-6}.3^{-2}.3^{-6}.2^{-4}.3^{15}}$

Agrupando potencias de bases iguales, tendremos : $T=\dfrac{2^{6-3-18+4}.3^{12-9+4}}{2^{-6-4}.3^{-2-6+15}}$

Efectuando las adiciones indicadas, nos queda : $T=\dfrac{2^{-11}.3^7}{2^{-10}.3^7}$

Y por el Teorema V, se obtiene : $\mathbf{T=\dfrac{1}{2}}$ **RPTA. B**

3.- Simplificar : $M=\dfrac{2^{n+1}.4^{-2n+1}+8^{-n+2}}{16\left(2^n\right)^{-3}}$

A) 4,5 ***B) 3,5*** ***C) 2,5*** ***D) $\sqrt{3}$*** ***E) $\sqrt{2}$*** ***UNI 94-I***

Resolución.-

En este tipo de ejercicios se combinan los teoremas de exponentes con la factorización, para ello es necesario expresar todas las potencias en función de sus factores primos, en este caso es en base 2, luego efectuar operaciones y reconocer el factor común. El resto solo consistirá en hacer simplificaciones; veamos :

Expresemos todas las potencias en base 2 : $M=\dfrac{2^{n+1}.\left(2^2\right)^{-2n+1}+\left(2^3\right)^{-n+2}}{2^4.\left(2^n\right)^{-3}}$

Aplicando el teorema II a los paréntesis : $M=\dfrac{2^{n+1-4n+2}+2^{-3n+6}}{2^{-3n+4}}$

Efectuando las adiciones en los exponentes : $M=\dfrac{2^{-3n+3}+2^{-3n+6}}{2^{-3n+4}}$

Factorizando la potencia 2^{-3n} : $M=\dfrac{2^{-3n}\left(2^3+2^6\right)}{2^{-3n}.2^4}$

Simplificando arriba y abajo : $M = \dfrac{8+64}{16} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow$ **M = 4,5** **RPTA. A**

4.- Calcular el valor de : $B = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}}$

A) 27 *B)* $\frac{1}{3}$ *C) 9* *D)* $\frac{1}{9}$ *E) N.A*

Resolución.-

Ejercicios de esta naturaleza se resuelven generalmente aplicando los Teoremas y definiciones de Exponentes desde la parte superior hacia la parte inferior, para lo cual se recomienda tener bastante cuidado al reconocer a las bases y sus respectivos exponentes. Veamos :

Utilizando el concepto de exponentes sucesivos, iniciaremos nuestras operaciones con : $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ $B = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{9}\right)\cdot 3^3}}$

Lo indicado arriba es igual a $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, luego nos queda : $B = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}$

Reconociendo que lo indicado en el paso anterior es igual a 27, tendremos : $B = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{9}\right)\cdot 27}$

Efectuando el producto indicado, encontramos que : $B = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

Utilizando la definición 2, concluímos que : $B = 3^3 =$ **27** **RPTA. A**

5.- Hallar el valor numérico de : $x^{x^{1+2x^{1+x-x^{x+1}}}}$ *, siendo* $x^x = 2$

A) 2^2 *B)* 2^3 *C)* 2^4 *D)* 2^6 *E)* 2^7

Resolución.-

Utilizando la condición para x^x y operando lo indicado : $E = x^{x^{1+2x^{1-x}}}$

Utilizando el teorema III en el sector indicado : $E = x^{1+2\frac{x^1}{x^x}}$

Empleando la condición para x^x : $E = x^{x^{1+2\frac{x}{2}}}$

Simplificando nos queda : $E = x^{x^{x+1}}$

Aplicando el teorema I en lo indicado, obtenemos : $E = x^{x^x . x}$

Ordenando y agrupando convenientemente : $E = \left(x^x\right)^{x^x}$

Finalmente reemplazamos la condición para x^x : $E = 2^2 = \boxed{4}$ **RPTA. A**

6.- El valor más simple de : $N = \left[\sqrt[3]{(-27)^4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^0}} + \sqrt{(-2)^2} + 44.16^{-4^{-2^{-1}}}\right]^{\frac{1}{2}}$ ***, es :***

A) $\frac{1}{11}$ *B) 10* *C)* $\frac{1}{10}$ *D) 11* *E) 12*

Resolución.-

Reduciendo y simplificando cada términos del corchete, se obtiene :

$$\sqrt[3]{(-27)^4} = \left(\sqrt[3]{(-27)}\right)^4 = (-3)^4 = 81$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^0}} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$$

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$44.16^{-4^{-2^{-1}}} = 44.16^{-4^{-\frac{1}{2}}} = 44.16^{-\frac{1}{2}} = 44.\tfrac{1}{4} = 11$$

Luego se tendrá : $N = [81+27+2+11]^{\frac{1}{2}} = [121]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121}$

$\therefore$ $\boxed{N = 11}$ **RPTA. D**

1.2) DEFINICIONES DE RADICALES

DEFINICION 3 :

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x$$

n es el indice del radical ($n \neq 0$) ; x es el radicando ($x \in \Re$,además, cuando n es par, $x \geq 0$), e, y es la raíz n-ésima de x.

DEFINICION 4 :

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad x \in \Re \;\; ; \; n \neq 0$$

DEFINICION 5 :

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} \qquad x \in \Re \;\; ; \; n \neq 0$$

1.3) TEOREMAS DE RADICALES

Sean $x, y, m, n, \in \Re$, $m \neq 0$; $n \neq 0$

VI) $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x.y}$

VII) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

VIII) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$

En estos teoremas, ningún radicando debe ser negativo cuando n es par.

1.4) LEYES DE SIGNOS PARA EXPONENTES Y RADICALES

$[+]^{par} = +$	$\sqrt[par]{+} = +$
$[+]^{impar} = +$	$\sqrt[impar]{+} = +$
$[-]^{par} = +$	$\sqrt[par]{-} =$ no es real
$[-]^{impar} = -$	$\sqrt[impar]{-} = -$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

7 .- Efectuar y reducir : $\sqrt[5]{243^{-4^{-2^{-1}}}}\ .\ \sqrt[3]{27^{-4^{-2^{-1}}}}$

A) $\frac{1}{9}$ *B)* $\frac{1}{3}$ *C) 9* *D) 3* *E) 1*

Resolución.-

En primer lugar reconocemos que la parte común a las dos expresiones son los exponentes de los radicandos, por tanto empezaremos nuestras operaciones reduciéndolos hasta un mínimo posible :

$$-4^{-2^{-1}} = -4^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4^{1/2}} = -\frac{1}{2}$$

A continuación reemplazamos en la expresión original : $M = \sqrt[5]{243^{-\frac{1}{2}}}\ .\ \sqrt[3]{27^{-\frac{1}{2}}}$

Ahora utilizamos la definición 5 para radicales : $M = \left[\sqrt[5]{243}.\sqrt[3]{27}\right]^{-\frac{1}{2}}$

Expresando los radicandos como potencias de 3 , nos da : $M = \left[\sqrt[5]{3^5}\ .\sqrt[3]{3^3}\right]^{-\frac{1}{2}}$

Simplificando exponentes con índices de radical : $M = [3.3]^{-\frac{1}{2}}$

Efectuando el producto indicado : $M = \left(3^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

Finalmente operando con los exponentes nos queda : $M = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ **RPTA .B**

8.- Hallar el valor numérico de : $E = \sqrt[3]{\frac{x\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}$ *, cuando* $x = 2^{\frac{60}{7}}$

A) $2^{\frac{1}{7}}$ *B)* 2^4 *C)* 2^5 *D)* 2^2 *E) 1* ***PUCP 92-II***

Resolución.-

Empleando la definición 4 para todos los radicales, tendremos : $E = \left[\frac{x^1.x^{\frac{1}{5}}}{x^{1/2}}\right]^{\frac{1}{3}}$

Utilizando los teoremas I y III en el corchete : $E = \left(x^{1+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

Luego de operar los exponentes fraccionarios, nos queda : $E = \left(x^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{1}{3}}$

Efectuando el producto de exponentes : $E = x^{\frac{7}{30}}$

Reemplazando ahora la condición para x : $E = \left(2^{\frac{60}{7}}\right)^{\frac{7}{30}}$

Y después de multiplicar exponentes, tendremos : $E = \boxed{2^2}$ **RPTA. D**

9.- Indicar el valor que se obtiene al efectuar : $\sqrt[a]{\dfrac{20^{a+1}}{4^{a+2}+2^{2a+2}}} + \sqrt[a-1]{\dfrac{5^{a-1}+3^{a-1}}{5^{1-a}+3^{1+a}}}$

A) 10 *B) 15* *C) 20* *D) 1* *E) N.A.*

Resolución.-

Utilizando el teorema I en el primer radicando : $\dfrac{20^a.20}{4^a.16+4^a.4}$

Descomponiendo 20^a y factorizando 4^a en el denominador : $\dfrac{4^a.5^a.20}{4^a(20)} = 5^a$ .... (1)

Operando del mismo modo en el segundo radicando, tendremos :

$$\frac{5^{a-1}+3^{a-1}}{\dfrac{1}{5^{a-1}}+\dfrac{1}{3^{a-1}}} = \frac{5^{a-1}+3^{a-1}}{\dfrac{3^{a-1}+5^{a-1}}{5^{a-1}.3^{a-1}}} = 5^{a-1}.3^{a-1} = 15^{a-1} \quad .... (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en la expresión original, tendremos :

$$\sqrt[a]{5^a} + \sqrt[a-1]{15^{a-1}} = 5 + 15 = \boxed{20} \quad \textbf{RPTA. C}$$

10.- Calcular el valor de : $E = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{216}}} \;.\; \sqrt[4]{4\sqrt[4]{4\sqrt[4]{256}}} \;.\; \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{16}}}$

A) 12 *B) 24* *C) 144* *D) 432* *E) 256*

Resolución.-

Operando dentro de los radicales, de arriba hacia abajo, y recordando también que : $16 = 2^4$, $216 = 6^3$ y $256 = 4^4$, tendremos : $E = \sqrt[3]{3^{\sqrt[3]{3^6}}} \;.\; \sqrt[4]{4^{\sqrt[4]{4^4}}} \;.\; \sqrt{2^{\sqrt{2^4}}}$

Utilizando la definición 5 para radicales : $E = \sqrt[3]{3^{3^2}} \;.\; \sqrt[4]{4^4} \;.\; \sqrt{2^4}$

Simplificando exponentes con índices de radical : $E = 3^3 . 4^1 . 2^2$

Finalmente efectuando las potencias : $E = 27 . 4 . 4 =$ **432** **RPTA. D**

11.- Efectuar : $\left(-x^2\right)^3 . \left(-x^{-3}\right)^2 . \left(x^{3^2}\right) . \left(x^{-3^2}\right) . \left(-x^{(-3)^2}\right)$

A) x^6 ***B)*** $-x^6$ ***C)*** x^{-9} ***D)*** $-x^9$ ***E)*** x^{12}

Resolución.-

Empleando las leyes de signos vistas en el item 1.4, operaremos cada factor por separado; para luego sustituirlos en la expresión original y finalmente proceder a la multiplicación de potencias con bases iguales. Veamos :

a) $\left(-x^2\right)^3 = -x^{2.3} = -x^6$

b) $\left(-x^{-3}\right)^2 = +x^{-3.2} = x^{-6}$

c) $x^{3^2} = x^9$

d) $x^{-3^2} = x^{-9}$

e) $-x^{(-3)^2} = -x^9$

Sustituyendo estos resultados parciales en la expresión original, tendremos : $= -x^6 . x^{-6} . x^9 . x^{-9} . \left(-x^9\right)$

Efectuando la multiplicación indicada y agrupando convenientemente, se tiene : $= \underbrace{x^{6-6}}_{1} . \underbrace{x^{9-9}}_{1} . x^9$

Aplicando la definición 2 , obtenemos : $= 1 . 1 . x^9$

Finalmente nos queda : $= x^9$ **RPTA. D**

1.5) CASOS ESPECIALES

a) $\sqrt[m]{x^r . \sqrt[n]{y^s . \sqrt[p]{z^t}}} = \sqrt[m.n.p]{x^{r.n.p} . y^{s.p} . z^t}$

b) $\underbrace{\sqrt[n]{x . \sqrt[n]{x . \sqrt[n]{x^n .... \sqrt[n]{x}}}}}_{m \ radicales} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n-1}}}$

c) $\sqrt[m]{x^n . \sqrt[m]{x^n . \sqrt[m]{x^n .....\infty}}} = \sqrt[m-1]{x^n}$

d) $\sqrt[m]{x^n \div \sqrt[m]{x^n \div \sqrt[m]{x^n .....\infty}}} = \sqrt[m+1]{x^n}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

12.- El exponente final de "x" en : $\left[\dfrac{\sqrt[a]{x^{a+1} . \sqrt[a]{x^{a^2+2} . \sqrt[a]{x^{a^3+3}}}}}{\sqrt[a]{x \sqrt[a]{x^2 \sqrt[a]{x^3}}}}\right]^a$ ***, es :***

A) a ***B) 2a*** ***C) 3a*** ***D) 4a*** ***E) 5a***

Resolución.-

Recordemos el caso especial (a) : $\sqrt[m]{x^r . \sqrt[n]{y^s . \sqrt[p]{z^t}}} = \sqrt[m.n.p]{x^{r.n.p} . y^{s.p} . z^t}$

Luego en nuestra expresión se tendría : $\left[\dfrac{\sqrt[a.a.a]{x^{a^3+3} . x^{(a^2+2)a} . x^{(a+1)(a)(a)}}}{\sqrt[a.a.a]{x^3 . x^{2a} . x^{a.a}}}\right]^a$

Operando en los exponentes : $\left[\dfrac{\sqrt[a^3]{x^{a^3+3} . x^{a^3+2a} . x^{a^3+a^2}}}{\sqrt[a^3]{x^3 . x^{2a} . x^{a^2}}}\right]^a$

Efectuando el producto de bases iguales en cada radicando : $\left[\dfrac{\sqrt[a^3]{x^{3a^3+a^2+2a+3}}}{\sqrt[a^3]{x^{a^2+2a+3}}}\right]^a$

Escribiendo asi : $\left[\dfrac{\sqrt[a^3]{x}^{\,3a^3+a^2+2a+3}}{\sqrt[a^3]{x}^{\,a^2+2a+3}}\right]^a$

Efectuando la división de bases iguales en el corchete : $\left[\sqrt[a^3]{x}^{\,3a^3}\right]^a = x^{3a}$

$\therefore$ **Exponente final de "x" = $3a$** **RPTA. C**

13.- Indique el exponente de x después de simplificar :

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3 \ldots\ldots\ldots n \text{ radicales}}}}$$

A) $4^n - 1$ *B)* $\dfrac{4^n-1}{4}$ *C)* $\dfrac{4^n+1}{4}$ *D)* $\dfrac{4^n-1}{4^n}$ *E)* 4^n

Resolución.-

Aplicando la fórmula (b) de los casos especiales la expresión se transforma en: $\sqrt[4^n]{\left(x^3\right)^{\frac{4^n-1}{4-1}}} = \sqrt[4^n]{x^{\frac{3(4^n-1)}{3}}} = x^{\frac{4^n-1}{4^n}}$

Finalmente el exponente de x es : $\mathbf{\dfrac{4^n-1}{4^n}}$ **RPTA. D**

14.- Después de operar, el exponente de x es :

$$\sqrt[7]{x\sqrt[3]{x\sqrt[7]{x\sqrt[3]{x \ldots\ldots\ldots\infty}}}}$$

A) $\dfrac{1}{2}$ *B)* $\dfrac{1}{3}$ *C)* $\dfrac{1}{5}$ *D)* $\dfrac{1}{7}$ *E)* $\dfrac{1}{21}$

Resolución.-

Sea E la expresión que se va a reducir : $E = \sqrt[7]{\sqrt[3]{x^3 x\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^3 . x \ldots\ldots\ldots\infty}}}}$

Reduciendo los dos primeros radicales : $E = \sqrt[21]{x^4\sqrt[21]{x^4\ldots\ldots\infty}}$

Aplicando la fórmula (*c*) de los casos especiales : $E = \sqrt[21-1]{x^4} = x^{4/20}$

$\Rightarrow$ $\boxed{E = x^{1/5}}$ **RPTA. C**

15.- ¿Cuál es el exponente de x al reducir :

$$\sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3\ldots\ldots\ldots\sqrt{x^n}}}}$$

A) $2+(n+2).2^{-n}$ *B)* $2^{-n+1}-n+2$ *C)* $2-(n+2)2^{-n}$ *D)* $2-n.2^{-n}$ *E)* $2+n.2^{n}$

<u>Resolución</u>.-

Reconocemos que hay ***n*** radicales y que cada ***x*** tiene finalmente un exponente fraccionario, de modo que al sumarlos se tendrá el exponente resultante (E) :

$$E = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n}{2^n}$$

El valor de E depende del valor de n, según la tabla siguiente :

n	E
2	$1 = \frac{4}{4} = \frac{2^3-4}{2^2}$
3	$\frac{11}{8} = \frac{2^4-5}{2^3}$
4	$\frac{26}{16} = \frac{2^5-6}{2^4}$
5	$\frac{57}{32} = \frac{2^6-7}{2^5}$

* En general, para cualquier valor natural de n :

$$E = \frac{2^{n+1}-(n+2)}{2^n}$$

El exponente obtenido equivale a :

$$E = \frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{n+2}{2^n} = \boxed{2-(n+2).\,2^{-n}}$$ **RPTA. C**

MISCELANEA

16.- Dados los siguientes números : $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{3}}$; $8^{\frac{1}{8}}$ y $9^{\frac{1}{9}}$,

al ordenarlos de mayor a menor, los dos primeros son :

A) $3^{\frac{1}{3}}$ y $2^{\frac{1}{2}}$ *B)* $3^{\frac{1}{3}}$ y $8^{\frac{1}{8}}$ *C)* $3^{\frac{1}{3}}$ y $9^{\frac{1}{9}}$

D) $8^{\frac{1}{8}}$ y $9^{\frac{1}{9}}$ *E) N.A.*

Resolución.-

1ro) Reconocemos que : $2^{\frac{1}{2}} > 8^{\frac{1}{8}}$

Esto es cierto puesto que al elevar cada miembro de la desigualdad a la potencia 8, se obtiene que :

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8 = 2^4 = 16 \quad , \text{ y } , \quad \left(8^{\frac{1}{8}}\right)^8 = 8$$

Ojo.- Se ha elegido la potencia 8, porque este número es el m.c.m. de los denominadores de los exponentes.

2do) También se observa que : $2^{\frac{1}{2}} > 9^{\frac{1}{9}}$

Para verificar esta afirmación conviene elevar cada miembro de la desigualdad a la potencia 18 (este es m.c.m. de los denominadores 2 y 9), obteniéndose en cada caso :

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{18} = 2^9 = 512 \quad , \text{ y } , \quad \left(9^{\frac{1}{9}}\right)^{18} = 9^2 = 81$$

Ojo.- Hasta aquí se ha deducido que : $2^{\frac{1}{2}} > 8^{\frac{1}{8}} \;\wedge\; 2^{\frac{1}{2}} > 9^{\frac{1}{9}}$

3ro) Asimismo, se puede afirmar que : $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$

Procediendo del mismo modo como en los pasos anteriores, elevaremos cada miembro de la desigualdad a la potencia 6 (este es m.c.m. de 2 y 3)

$$\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^2 = 9 \quad , \text{ y } , \quad \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3 = 8$$

De los resultados obtenidos en los pasos anteriores se deduce que : $\mathbf{3^{\frac{1}{3}}}$ **y** $\mathbf{2^{\frac{1}{2}}}$ son los dos mayores.

RPTA. A

17.- Si : $p = ab^t$; $q = ab^m$; $r = ab^n$; $a \neq 0$; $b \neq 0$

el valor de : $E = p^{m-n} \cdot q^{n-t} \cdot r^{t-m}$, ***es :***

A) 1 ***B)*** -1 ***C)*** 0 ***D)*** $-\frac{1}{2}$ ***E) Faltan datos*** ***UNFV 88***

Resolución.-

Reemplazando los datos en la expresión dada, se obtiene : $\mathrm{E} = \left(a.b^t\right)^{m-n} . \left(a.b^m\right)^{n-t} . \left(a.b^n\right)^{t-m}$

Aplicando el teorema II, se tiene : $\mathrm{E} = a^{m-n} . b^{t(m-n)} . a^{n-t} . b^{m(n-t)} . a^{t-m} . b^{n(t-m)}$

Por el teorema I, agrupamos las potencias de igual base : $\mathrm{E} = a^{m-n+n-t+t-m} . b^{t(m-n)+m(n-t)+n(t-m)}$

Operando en los exponentes : $\mathrm{E} = a^0 . b^{tm-tn+mn-mt+nt-nm}$

Y de la definición 2, nos queda : $\mathrm{E} = a^0 . b^0 = \boxed{1}$ **RPTA. A**

18.- Indicar el exponente de n^n ***en*** n^{n^n}

A) n ***B)*** n^{-1} ***C)*** n^{n+1} ***D)*** n^{n-1} ***E) N.A***

Resolución.-

En la expresión n^{n^n} no es correcto afirmar que el exponente de n^n es n.

Para hallarlo debemos transformar n^{n^n} en una potencia cuya base sea n^n elevada a cierto exponente. Aunque pudiera parecer contradictorio con lo anteriormente planteado, lo que haremos es extraer una raíz de modo que n^{n^n} quede expresado en una forma equivalente a lo solicitado.

1ro) Elevamos a la n y extraemos raíz n. $n^{n^n} = \sqrt[n]{n^{n^n}}^{\,n}$

2do) Reconociendo que : $\sqrt[a]{x^b}^{\,c} = \sqrt[a]{x^c}^{\,b}$, intercambiaremos los exponentes : $n^{n^n} = \sqrt[n]{n^n}^{\,n^n}$

3ro) Utilizando la definición 5, expresaremos el radical anterior como exponente fraccionario : $n^{n^n} = \left[n^n\right]^{\frac{n^n}{n}}$

4to) Aplicando el teorema III en el exponente del 2do miembro : $n^{n^n} = \left[n^n\right]^{n^{n-1}}$

Asi resulta que el exponente de n^n es : $\boxed{n^{n-1}}$ **RPTA. D**

19.- $2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k}$, es equivalente a :

A) 2^{-2k} B) $2^{-(2k-1)}$ C) $-2^{-(2k+1)}$ D) 0 E) 2

Resolución.-

De acuerdo con los distractores dados, nuestro trabajo consistirá en reducir toda la expresión en una sola potencia, para lo cual trataremos de reconocer el factor común de los sumandos dados para luego proceder a su reducción final. Veamos :

Eliminando paréntisis de los exponente dados : $= 2^{-2k-1} - 2^{-2k+1} + 2^{-2k}$

En base al teorema II, acomodamos las potencias : $= 2^{-2k}.2^{-1} - 2^{-2k}.2^{+1} + 2^{-2k}$

Factorizando la potencia 2^{-2k}, se tiene : $= 2^{-2k}\left(2^{-1}-2+1\right)$

Operando dentro del paréntesis, nos queda : $= 2^{-2k}\left(-\frac{1}{2}\right)$

Empleando ahora la definición 2 : $= -2^{-2k} . 2^{-1}$

Finalmente aplicamos el teorema I : $= -2^{-(2k-1)}$ **RPTA. C**

20.- De las afirmaciones :

I) $\forall\, a \in Q$, se tiene $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a$

II) $\forall\, a \in Q$, $\forall\, r \in \Re$, existe a^r

III) Si $a \in Q$ y $\forall\, r \in \Re$, existe a^r , entonces existe r^a .

Se puede deducir que :

A) I, II y III son falsas

B) Solo II y III son verdaderas

C) Solo II es verdadero

D) Solo II es falsa

E) Solo II y III son falsas ***UNI 94-I***

Resolución.-

I) Esta afirmación es falsa, puesto que : $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2} = |a| \neq a$

II) Esta afirmación también es falsa dado que existen ciertas restricciones :

$$\exists\, a^r \Leftrightarrow a \neq 0 \ \wedge\ r \neq 0$$

III) Escogemos : $a \in Q \ \wedge\ r \in \Re$ tales que a^r exista.

Por ejemplo : $a = -1$; $r = 0$,

Entonces : $(-1)^0 = 1$

Sin embargo $(0)^{-1} = \frac{1}{0}$, lo cual según la definición 2 no existe .

Luego esta afirmación también resulta falsa. **RPTA. A**

21.- Si : $x = t^{\frac{1}{t-1}}$; $y = t^{\frac{t}{t-1}}$; $t > 0$; $t \neq 1$, una relación entre x e y es :

A) $y^x = x^{\frac{1}{y}}$ ***B)*** $y^{\frac{1}{x}} = x^y$ ***C)*** $y^x = x^y$ ***D)*** $x^x = y^y$ ***E) N.A***

<u>**Resolución**</u>.-

Nuestra estrategia consistirá en buscar un modo de relacionar x con y, de tal suerte de encontrar una expresión para el parámetro t en función de aquellas dos. A continuación se recomienda transformar la expresión original de x, o, y, en una forma tal que aparezca un equivalente de cualquiera de ellos, para finalmente sustituir allí la expresión obtenida anteriormente para el parámetro t. Veamos :

Una forma de relacionar x con y, es dividiendo las expresiones dadas para cada uno :

$$\frac{y}{x} = \frac{t^{\frac{t}{t-1}}}{t^{\frac{1}{t-1}}}$$

Empleando el teorema V, tendremos :

$$\frac{y}{x} = t^{\frac{t}{t-1} - \frac{1}{t-1}}$$

Efectuando operaciones en los exponentes de t :

$$\frac{y}{x} = t^{\frac{t-1}{t-1}}$$

Finalmente simplificando, obtenemos :

$$\frac{y}{x} = t \;....(*)$$

Por otro lado de los datos, reconocemos que :

$$y = t^{\frac{t}{t-1}}$$

Utilizando el teorema II, trataremos que en el 2do miembro aparezca una expresión equivalente de x; así :

$$y = \left(t^{\frac{1}{t-1}}\right)^t$$

Reconocemos que el paréntesis es x, luego :

$$y = x^t \;....(**)$$

Luego reemplazando (*) en (**) , obtenemos :

$$y = x^{\frac{y}{x}}$$

Elevando ambos miembros al exponente x :

$$y^x = x^y$$

RPTA. C

22.- Si : $x^x = 2$, calcular la raíz cuadrada de : $Q = x^{x^{1+2x^{1+x}}}$

A) 2^4 ***B)*** 2^5 ***C)*** 2^6 ***D)*** 2^8 ***E)*** 2^{12}

Resolución.-

Utilizando los Teoremas de Exponentes, trataremos de hacer aparecer en donde sea posible la expresión x^x, cuyo valor es conocido, con lo cual la expresión original se irá reduciendo cada vez más; iniciaremos esto desde los exponentes superiores hacia los inferiores. Asimismo, de acuerdo con los distractores no debemos perder de vista el hecho de que el resultado final sea un número conocido. Veamos :

Empleando el teorema I para la potencia x^{1+x} : $\qquad Q = x^{x^{1+2x.x^x}}$

Utilizando el dato para x^x, tendremos : $\qquad Q = x^{x^{1+2x.2}}$

Efectuando operaciones en el exponente : $\qquad Q = x^{x^1 . x^{4x}}$

Utilizando el teorema II en lo indicado, tendremos : $\qquad Q = x^{x.(x^x)^4}$

Agrupando convenientemente a los exponentes : $\qquad Q = \left(x^x\right)^{(x^x)^4}$

A continuación utilizamos la condición dada para x^x : $\qquad Q = 2^{2^4} = 2^{16}$

Finalmente la raíz cuadrada solicitada es : $\qquad \sqrt{Q} = \sqrt{2^{16}} = \mathbf{2^8}$ $\qquad$ **RPTA. D**

23.- Sabiendo que : $ab = b^b = 2$, calcular el valor de : $E = ab^{ab^{ab}}$

A) 16 $\qquad$ B) 4 ab $\qquad$ C) 4 a $\qquad$ D) 4 b $\qquad$ E) 32

Resolución.-

Utilizando la condición dada para ab en el último exponente : $\qquad E = ab^{ab^2}$

Descomponiendo la potencia b^2, tendremos : $\qquad E = ab^{(ab)b}$

Sustituyendo la condición para ab en el paréntesis : $\qquad E = ab^{2b}$

En virtud al teorema II, acomodamos la potencia b^{2b} : $\qquad E = a\left(b^b\right)^2$

Sustituyendo la condición para b^b : $\qquad E = a(2)^2$

Efectuando la potencia indicada nos queda : $\qquad E = 4a$ $\qquad$ **RPTA. C**

24.- Reducir : $\qquad E = \sqrt[2^{2^{n+1}}]{\sqrt[2^{2^n}]{\sqrt[2^2]{625^{8^{2^n}}}}}$

A) $\sqrt{5}$ $\qquad$ B) 5^n $\qquad$ C) 5 $\qquad$ D) 5^{n+1} $\qquad$ E) N.A.

Resolución.-

Utilizando el teorema VIII, multiplicamos los índices para obtener un solo radical:

$$E = \sqrt[2^{2^{n+1}}.2^{2^n}.2^2]{(625)\left(2^3\right)^{2^n}}$$

Descomponiendo la potencia 2^{n+1}, tendremos :

$$E = \sqrt[2^{2.2^n}.2^{2^n}.2^2]{\left(5^4\right)^{\left(2^3\right)^{2^n}}}$$

Aplicando el teorema I en el sector indicado :

$$E = \sqrt[2^{3.2^n}.2^2]{\left(5^4\right)^{2^{3.2^n}}}$$

Finalmente por la definición 5, reducimos exponentes con índices, obteniéndose :

$$E = \sqrt[2^2]{5^4} = 5$$ **RPTA. C**

25.- El equivalente de : $E = \sqrt[\left(1+a^{1+a}\right)^2]{a\left[a^a\left[a\left(a^a\right)^{a^a}\right]^a\right]^{a^a}}$ ***, es :***

A) 1 ***B) a*** ***C) a^a*** ***D) $\sqrt[a]{a}$*** ***E) N.A.***

Resolución.-

Efectuando operaciones en el paréntesis del radicando, se tiene : $a.\left[a^a\left[a^1.a^{a.a^a}\right]^a\right]^{a^a}$

Aplicando el teorema II en el corchete anterior, se tendrá : $a.\left[a^a.a^a.a^{a^2.a^a}\right]^{a^a}$

Reduciendo a una sola base dentro del corchete : $a.\left[a^{2a+a^2.a^a}\right]^{a^a}$

A continuación efectuamos la potencia a^a : $a.a^{2a.a^a+a^2.a^{2a}}$

Agrupando términos en los exponentes : $a^{1+2(a.a^a)+(a.a^a)^2}$

Reconociendo el binomio en el exponente : $a^{\overbrace{\left(1+a^{1+a}\right)^2}^{p}}$

Nótese que el exponente p del radicando a es idéntico al indice del radical dado, por ello se obtiene una expresión de la forma : $E = \sqrt[p]{a^p} = a$ **RPTA. B**

26.- Expresar con un solo radical : $\sqrt[3]{a^2 . \sqrt[4]{\sqrt[5]{a^4 b^6}} . \sqrt[8]{a^5 b \sqrt[5]{a^7 b^3}}}$

A) $\sqrt[12]{ab}$ **B)** $\sqrt[30]{a^3 b}$ **C)** $b\sqrt[5]{a}$ **D)** $a\sqrt[6]{b}$ **E)** $\sqrt[60]{a^5 b}$

Resolución.-

Transformando los radicales en exponentes fraccionarios :

$$\sqrt[3]{a^2 \sqrt[20]{a^4 . b^6} . \sqrt[8]{a^5 b . a^{7/5} b^{3/5}}}$$

$$a^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{4}{60}} . b^{\frac{6}{60}} . a^{\frac{5}{24}} . b^{\frac{1}{24}} . a^{\frac{7}{120}} . b^{\frac{3}{120}}$$

$$a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+\frac{5}{24}+\frac{7}{120}} . b^{\frac{1}{10}+\frac{1}{24}+\frac{1}{40}} \quad .... \ (*)$$

Efectuando operaciones con los exponentes de cada base, resulta :

$$\text{De } a \ : \ \frac{2}{3}+\frac{1}{15}+\frac{5}{24}+\frac{7}{120} = \frac{80+8+25+7}{120} = \frac{120}{120} = 1$$

$$\text{De } b : \ \frac{1}{10} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40} = \frac{12+5+3}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Reemplazando en (*), tendremos : $a^1 . b^{\frac{1}{6}} = a\sqrt[6]{b}$ **RPTA. D**

27.- El equivalente de : $T = \sqrt[m-n]{\dfrac{\sqrt{5}x^{2m} + \sqrt{3}x^{m+n}}{\sqrt{5}x^{m+n} + \sqrt{3}x^{2n}}}$ **, es :**

A) $2x$ **B)** 1 **C)** x **D)** x^2 **E)** mn

Resolución.-

Reacomodando las potencias de x, tendremos : $T = \sqrt[m-n]{\dfrac{\sqrt{5}x^m . x^m + \sqrt{3}x^m . x^n}{\sqrt{5}x^m . x^n + \sqrt{3}x^n . x^n}}$

Factorizando x^m y x^n arriba y abajo respectivamente, se tendría : $T = \sqrt[m-n]{\dfrac{x^m\left(\sqrt{5}x^m + \sqrt{3}x^n\right)}{x^n\left(\sqrt{5}x^m + \sqrt{3}x^n\right)}}$

Simplificando en el radicando, obtenemos :

$$T = \sqrt[m-n]{\frac{x^m}{x^n}} = \sqrt[m-n]{x^{m-n}} \quad \therefore \quad T = x$$ **RPTA. C**

28.- Si : $n = a^{a^{-1}}$ ***, reducir :*** $\left[\sqrt[a]{a^{a+1}\sqrt{a^{a}}}\right]^{n} + \left[\sqrt[a]{a^{a+2}\sqrt{a^{a}}}\right]^{n^2}$

A) 0 ***B)*** 1 ***C)*** a ***D)*** $2a$ ***E)*** $2a^2$

Resolución.-

Del dato tenemos : $n = a^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{a}$

1ro) Del primer sumando : $\sqrt[\sqrt[a]{a^a}\,.\,a]{a^a}^{\;n} = \sqrt[a\sqrt[a]{a}]{a^{an}} = \sqrt[an]{a^{an}} = a$

2do) Del segundo sumando : $\sqrt[\sqrt[a]{a^a}\,.\,a^2]{a^a}^{\;n^2} = \sqrt[a\sqrt[a]{a}^{\,2}]{a^{a.n^2}} = \sqrt[a.n^2]{a^{an^2}} = a$

Reuniendo estos resultados : $a + a = 2a$ **RPTA. D**

29.- El equivalente de : $\sqrt[b-a]{\dfrac{a^{a+b}b^{b}+b^{a+b}a^{a}}{a^{2b}b^{a}+b^{2a}a^{b}}}$ ***, es :***

A) a/b ***B)*** b/a ***C)*** ab ***D)*** $1/ab$ ***E)*** $a^b b^a$

Resolución.-

Llamemos "E" a la expresión dada, la cual se puede escribir asi : $\mathrm{E} = \sqrt[b-a]{\dfrac{a^a a^b b^b + b^a b^b a^a}{a^{2b}b^a + b^{2a}a^b}}$

Factorizando en el radicando, se obtendrá : $\mathrm{E} = \sqrt[b-a]{\dfrac{a^a b^b\left(a^b + b^a\right)}{a^b b^a\left(a^b + b^a\right)}}$

Luego de simplificar y aplicando una división de bases iguales en el radicando, nos queda : $\mathrm{E} = \sqrt[b-a]{\dfrac{b^{b-a}}{a^{b-a}}} = \sqrt[b-a]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{b-a}}$

$\therefore \quad \mathrm{E} = b/a$ **RPTA. B**

30.- Indicar el equivalente de : $T = \left[\dfrac{x^{1+\frac{1}{x}} + x^{1-\frac{1}{x}}}{x + x^{1-\frac{2}{x}}}\right]^{x}$

A) x^2 ***B)*** x ***C)*** x^{-1} ***D)*** x^{-2} ***E)*** x^{-3}

Resolución.-

Factorizando en el numerador y denominador de la expresión encerrada en el corchete :

$$T=\left[\frac{x^{1+\frac{1}{x}}\left(1+x^{-\frac{2}{x}}\right)}{x\left(1+x^{-\frac{2}{x}}\right)}\right]^{x}$$

Simplificando las expresiones entre paréntesis dentro del corchete, tendremos :

$$T=\left[\frac{x^{1+\frac{1}{x}}}{x}\right]^{x}=\left[x^{\frac{1}{x}}\right]^{x}=x^{\frac{x}{x}}$$

$\therefore$ $\boxed{T=x}$ RPTA. B

31.- Proporcionar el equivalente de : $E=\dfrac{2\cdot\sqrt[7^x-7]{x^{2.7^x}}-x^2\cdot\sqrt[7^x-7]{x^{14}}}{\sqrt[7^x-7]{x^{7^x+7}}}$

A) 1 *B) x* *C) x^2* *D) x^{-1}* *E) x^{-2}*

Resolución.-

Escribiendo asi la expresión :

$$E=\frac{2\cdot\sqrt[7^x-7]{x}^{\,2.7^x}-x^2\cdot\sqrt[7^x-7]{x}^{\,14}}{\sqrt[7^x-7]{x}^{\,7^x+7}}$$

$$E=\frac{2\cdot\sqrt[7^x-7]{x}^{\,2.7^x}}{\sqrt[7^x-7]{x}^{\,7^x+7}}-\frac{x^2\cdot\sqrt[7^x-7]{x}^{\,14}}{\sqrt[7^x-7]{x}^{\,7^x+7}}$$

Efectuando la división de bases iguales en cada término : $E=2\cdot\sqrt[7^x-7]{x}^{\,7^x-7}-\dfrac{x^2}{\sqrt[7^x-7]{x}^{\,7^x-7}}$

Simplificando se tendría : $E=2x-\dfrac{x^2}{x}\Rightarrow E=2x-x$

$\therefore$ $\boxed{E=x}$ RPTA. B

32.- El valor más simple de : $E=\sqrt[2x+3]{\dfrac{225^{2x+4}}{5^{2x+5}.4+25^{x+3}}}$ *, es :*

A) 5 *B) 15* *C) 25* *D) 45* *E) 225*

Resolución.-

Escribiendo en función de la base cinco, los términos del radicando quedarían así :

$$E = \sqrt[2x+3]{\frac{\left(5^2 \cdot 9\right)^{2x+4}}{5^{2x+5} \cdot 4 + \left(5^2\right)^{x+3}}}$$

Efectuando operaciones en los exponentes :

$$E = \sqrt[2x+3]{\frac{5^{4x+8} \cdot 9^{2x+4}}{5^{2x+5} \cdot 4 + 5^{2x+6}}}$$

Luego, factorizando lo indicado :

$$E = \sqrt[2x+3]{\frac{5^{4x+8} \cdot 9^{2x+4}}{5^{2x+5} \cdot (4+5)}}$$

Reduciendo el paréntesis, nos queda :

$$E = \sqrt[2x+3]{\frac{5^{4x+8} \cdot 9^{2x+4}}{5^{2x+5} \cdot 9}}$$

Efectuando la división de bases iguales en el radicando :

$$E = \sqrt[2x+3]{5^{2x+3} \cdot 9^{2x+3}}$$

Utilizando el teorema IV, tendremos :

$$E = \sqrt[2x+3]{(5 \cdot 9)^{2x+3}}$$

Simplificando :

$$E = (5 \cdot 9)$$

$\therefore$ $\boxed{E = 45}$ **RPTA. D**

33.- Simplificar :

$$T = \left[\frac{\sqrt[xy]{\dfrac{x^y + y^x}{x^{-y} + y^{-x}}} + 1}{\sqrt[xy]{\dfrac{x^{-y} + y^{-x}}{x^y + y^x}} + 1}\right]^{xy}$$

A) $x^y y^x$ *B)* xy *C)* $x^x y^y$ *D)* $x^{xy} y^{xy}$ *E)* $(xy)^{x+y}$

Resolución.-

Efectuando el exponente negativo tenemos:

$$E = \left[\frac{\sqrt[xy]{\dfrac{x^y + y^x}{\dfrac{1}{x^y} + \dfrac{1}{y^x}}} + 1}{\sqrt[xy]{\dfrac{\dfrac{1}{x^y} + \dfrac{1}{y^x}}{x^y + y^x}} + 1}\right]^{xy}$$

Operando cada radicando del corchete se tendria :

$$E=\left[\frac{\sqrt[xy]{\dfrac{x^y y^x\left(x^y+y^x\right)}{y^x+x^y}}+1}{\sqrt[xy]{\dfrac{y^x+x^y}{x^y y^x\left(x^y+y^x\right)}}+1}\right]^{xy}$$

Simplificando cada radicando, se obtiene :

$$E=\left[\frac{\sqrt[xy]{x^y y^x}+1}{\dfrac{1}{\sqrt[xy]{x^y y^x}}+1}\right]^{xy}$$

Efectuando operaciones en el corchete :

$$E=\left[\frac{\sqrt[xy]{x^y y^x}\left(\sqrt[xy]{x^y y^x}+1\right)}{\sqrt[xy]{x^y y^x}+1}\right]^{xy}$$

Simplificando dentro del corchete :

$$E=\left[\sqrt[xy]{x^y y^x}\right]^{xy}$$

Finalmente : $\quad E=x^y y^x \qquad$ **RPTA. C**

34.- La expresión :

$$\left[\sqrt[9]{\frac{\overbrace{\sqrt[5]{x^2}.\sqrt[5]{x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\sqrt[5]{x^2}}^{100\text{ factores}}}{\sqrt{\left(\underbrace{\sqrt[4]{x}.\sqrt[4]{x}\ldots\ldots\ldots\sqrt[4]{x}}_{328\text{ factores}}\right)^{-1}}}}\;\right]^{81^{-4^{-2^{-1}}}}$$

, equivale a :

A) x ***B)*** x^9 ***C)*** x^{81} ***D)*** $\sqrt[9]{x}$ ***E)*** $\sqrt[81]{x}$

__Resolución.-__

Reduciendo el exponente :

$$81^{-4^{-2^{-1}}}=81^{-4^{-\frac{1}{2}}}=81^{-\sqrt{4}^{-1}}=81^{-2^{-1}}=81^{-\frac{1}{2}}$$

$$81^{-4^{-2^{-1}}}=\sqrt{81}^{-1}=9^{-1}\Rightarrow\ 81^{-4^{-2^{-1}}}=\frac{1}{9}$$

Si llamamos "T" a la expresión se tendrá : $$T=\left[\sqrt[9]{\frac{\overbrace{\sqrt[5]{x^2}.\sqrt[5]{x^2}\ldots\ldots\ldots\sqrt[5]{x^2}}^{100\ factores}}{\sqrt{\left(\underbrace{\sqrt[4]{x}.\sqrt[4]{x}\ldots\ldots\ldots\sqrt[4]{x}}_{328\ factores}\right)^{-1}}}}\right]^{\frac{1}{9}}$$

Aplicando la definición 1 en cada radicando : $$T=\left[\sqrt[9]{\frac{\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^{100}}{\sqrt{\left(\sqrt[4]{x}^{\,328}\right)^{-1}}}}\right]^{\frac{1}{9}}=\left[\sqrt[9]{\frac{\left(x^2\right)^{20}}{\sqrt{\left(x^{82}\right)^{-1}}}}\right]^{\frac{1}{9}}$$

Operando en los paréntesis : $$T=\left[\sqrt[9]{\frac{x^{40}}{x^{-41}}}\right]^{\frac{1}{9}}=\left[\sqrt[9]{x^{81}}\right]^{\frac{1}{9}}=\left[x^9\right]^{\frac{1}{9}}$$

Finalmente : $T=\sqrt[9]{x^9}$ $\therefore$ $\mathbf{T=x}$ **RPTA. A**

35.- Simplificar : $$\sqrt[7]{\frac{\overbrace{\sqrt[5]{a^3}.\sqrt[5]{a^3}\ldots\ldots\ldots\sqrt[5]{a^3}}^{50\ factores}}{\sqrt[-4]{\underbrace{\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}\ldots\ldots\ldots\sqrt[3]{a}}_{60\ factores}}}}$$

A) 1 ***B) a^5*** ***C) a^{-1}*** ***D) $\sqrt[5]{a}$*** ***E) a***

<u>**Resolución**</u>.-

Empezaremos reduciendo el numerador (N) y el denominador (D).

1ro) $N=\left(\sqrt[5]{a^3}\right)^{50}=a^{\frac{3.50}{5}}=a^{30}$

2do) $D=\sqrt[-4]{\sqrt[3]{a}^{\,60}}=\sqrt[-4]{a^{60/3}}=\sqrt[-4]{a^{20}}=a^{-5}$

Luego reemplazamos : $\sqrt[7]{\frac{N}{D}}=\sqrt[7]{\frac{a^{30}}{a^{-5}}}=\sqrt[7]{a^{35}}=a^5$ **RPTA. B**

36.- Calcular : $\sqrt[b^a]{a^{b^{a+b}}}$; *si* $a^{b^b}=3$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) $\sqrt{3}$***

Resolución.-

Efectuando las transformaciones más adecuadas, tendremos : $\sqrt[b^a]{a^{b^a \cdot b^b}} = \sqrt[b^a]{a^{b^a}}^{\,.b^b}$

Reduciendo exponente e índice, encontramos que : $\sqrt[b^a]{a^{b^a \cdot b^b}} = a^{b^b}$

Empleando el dato, concluímos que : $\sqrt[b^a]{a^{b^a \cdot b^b}} = 3$ **RPTA.C**

37.- Reducir a su menor expresión : $\left[b^{-b^{-b^{-b^{-b}}}} \right]^{b^{b}\sqrt[b]{b}\sqrt{b}}$

A) b ***B)*** b^b ***C)*** $\frac{1}{b}$ ***D)*** b^{2b} ***E) 1***

Resolución.-

Reduciendo el exponente del corchete, tendremos : $\sqrt[b^b]{\sqrt[b]{b}} = \sqrt[b^{b^{-b}}]{b} = b^{b^{-b^{-b}}}$

Reconociendo que la expresión original es de la forma : $\left[b^m\right]^n = b^{m.n}$

Por esta razón reconocemos que : $m.n = -b^{-b^{-b^{-b}}} . b^{b^{-b^{-b}}} = -b^{-b^{-b^{-b}} + b^{-b^{-b}}} = -b^0 \Rightarrow m.n = -1$

El resultado final será : $b^{m.n} = b^{-1} = \dfrac{1}{b}$ **RPTA. C**

38.- Si "x" verifica : $4^{x+2} - 5.\left(4^x\right) = 99$, ***indicar el valor de :*** $T = \sqrt{32^x - 143}$

A) 10 ***B) 8*** ***C) 6*** ***D) 4*** ***E) N.A***

Resolución.-

Del dato : $4^{x+2} - 5\left(4^x\right) = 99$

Factorizando 4^x , tendremos : $4^x . \left(4^2 - 5\right) = 99$

Escribiendo así : $\left(2^2\right)^x .11 = 99 \Rightarrow 2^{2x} = 9 \Rightarrow 2^x = 3$ ... (*)

Sustituyendo (*) en la expresión "T" : $T = \sqrt{32^x - 143} = \sqrt{\left(2^5\right)^x - 143}$

Acomodando el paréntesis : $T = \sqrt{\left(2^x\right)^5 - 143}$

Pero $2^x = 3$, entonces : $T = \sqrt{3^5 - 143} = \sqrt{243-143}$

Efectuando la raíz , se obtiene : $T = 10$ **RPTA. A**

39.- El equivalente de : $\dfrac{3+\left[\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\ldots}}}\right]^2}{1+\left[\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\ldots}}}\right]^{-1}}$ ***, se encuentra en el intervalo.***

A) $\langle 1;3\rangle$ ***B)*** $\langle 3;5\rangle$ ***C)*** $\langle 4;7\rangle$ ***D)*** $\langle 0{,}5;3{,}5\rangle$ ***E)*** $\langle 2{,}5;3\rangle$

Resolución.-

Llamemos "A" a la expresión : $A = \dfrac{3+\left[\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\ldots..}}}\right]^2}{1+\left[\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\ldots..}}}\right]^{-1}}$

Donde será necesario designar a cada expresión entre corchetes, por "m" : $m = \sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\ldots\ldots.}}}$ ...... (α)

Ahora la expresión "A" queda así : $A = \dfrac{3+m^2}{1+m^{-1}}$

Y efectuando operaciones : $A = \dfrac{3m+m^3}{1+m}$ .... (β)

De la relación (α) : $m = \sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\ldots\ldots}}}$

Aprovechando la naturaleza infinita de la expresión : $m = \sqrt[3]{4+m}$

Elevando al exponente 3 , tendremos : $m^3 = 4 + m$ .... (θ)

Reemplazando (θ) en (β), obtendremos : $A = \dfrac{3m+4+m}{1+m} = \dfrac{4(m+1)}{1+m}$

$\therefore$ $A = 4$ **RPTA. B**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Señale verdadero o falso (V ó F)

I. $27^{2/3} = 9$ II. $-6^2 = 36$

III. $\left(a^{10}\right)^3 = a^{13}$ IV. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = 3^{3/8}$

A) VVFF B) FFVV C) VFFV
D) VFVF E) VFFF

2.- ¿Cuáles son verdaderas y cuáles falsas?

I. $5^{-3} = \frac{1}{125}$ II. $-4^2 = \frac{1}{8}$

III. $(-3)^2 = -9$ IV. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

A) FFFV B) VFFF C) VFVV
D) VFFV E) FVVF

3.- ¿Cuál de estas equivalencias NO SIEMPRE es verdadera?

A) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ B) $\left(x^a\right)^b = x^{ab}$

C) $x^0 = 1$ D) $\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$

E) $\left(x^a\right)^b = \left(x^b\right)^a$

4.- Elevar una potencia a otra potencia sólo es una multiplicación continuada. Así, el valor de: $\left(a^2\right)^3$ equivale a :

A) $a^2 + a^2 + a^2$ D) $a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$

B) $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$ E) N. A.

C) $a^2 \cdot a^3$

5.- $\left(10^3\right) \cdot \left(10^2\right)$ es igual a :

A) 10^6, ó, 1 000 000 D) 100^6

B) 50 E) N.A.

C) 10^5, ó, 100 000

6.- Si $x^{x^x} = a$; $x^x = b$; entonces se puede afirmar que :

A) $b^x = a$ B) $x^b = a$ C) $b = a^x$

D) $x^a = b$ E) N. A.

7.- Hallar el valor de $2^{2^2} - \left(2^2\right)^3$

A) 32 B) 0 C) 192 D) 8 E) 2

8.- El valor numérico de $\sqrt{x\sqrt{x}}$ cuando $x = 1/2$ es :

A) $\sqrt[4]{8}$ B) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ C) 2

D) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

9.- $\frac{3^{-1}+2^{-2}}{3^{-1}+2^{2}}$ equivale a :

A) $\frac{7}{52}$ B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{5}{7}$ D) 1 E) N.A.

10.- Efectuar : $\left[\left[(6\,561)^{1/2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}$

A) $\sqrt[6]{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[8]{3}$

D) 3 E) $\sqrt[8]{27}$

NIVEL B

11.- Efectuar : $\underbrace{n^n.n^n.n^n......n^n}_{n \text{ factores}}$

A) $n^n \, . \, n$ B) n^{n^n} C) n^{n^2}

D) n^{2n} E) n^{2^n}

12.- En la expresión reducida de :

$$A = \left(ab^{-3} . c^3\right)^{\frac{1}{2}} . \left(a^7b^4 . c^2\right)^{\frac{1}{3}} . \left(a^{-5} .bc\right)^{\frac{1}{6}}$$

en cuánto excede el exponente de c al exponente de a.

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

13.- Efectuar :

$$E = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

A) 0,25 B) 1 C) 0,5 D) 4 E) 16

14.- Reducir :

$$M = \left[\left(x^2\right)^{-2} . \left(x^{-2}\right)^2 . \left(x^{-2}\right)^{-2^2} . \left(x^{-2}\right)^{(-2)^2}\right]^{-16^{-4^{-1}}}$$

A) x^8 B) x^{16} C) x^4 D) x^2 E) x^{2^8}

15.- Hallar el equivalente de : $\sqrt[\sqrt[x]{x}]{x^{\sqrt[x]{x^{x+1}}}}$

A) x B) x^x C) $\sqrt[x]{x}$ D) 1 E) 0

16.- Simplificar : $\dfrac{21^6 \, . \, 35^3 \, . \, 80^3}{15^4 \, . \, 14^9 \, . \, 30^2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17.- Simplificando la expresión :

$$\left[\frac{6 \, . \, 4^m}{4^{2m+1} + 2^{4m+1}}\right]^{m^{-1}}$$

se obtiene:

A) 4^m B) 2^m C) $\frac{1}{4}$ D) 4 E) 16

18.- Sabiendo que :

$a^b = ab = 16$; indicar el valor de $\sqrt[a]{a}$

A) $\sqrt[4]{4}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[8]{8}$

D) $\sqrt[4]{2}$ E) 2

19.- Reducir :

$$M = \left[\sqrt[99^{99}]{9\sqrt[99]{9^{99^{99}}}}\right]^{\frac{99^{99}}{99^{98}+1}}$$

A) 9 B) 99 C) 9^9 D) 9^{99} E) 9^{11}

20.- Simplificar : $\dfrac{2\left(8^n\right) - (0,5)^{1-3n}}{(0,125)^{1-n}}$

A) 12 B) 16 C) 64 D) 8 E) 32

21.- Siendo $a + b = 2$; reducir :

$$R = \sqrt{\left[a^{a^a}\right]^{a^2} . \left[a^{-a^{2a}}\right]^{a^b}}$$

A) 2 B) 4 C) 1 D) 16 E) 8

22.- Calcular :

$$(0,25)\,(16)^{\sqrt[4]{2}}\,(0,0625)^{(0.125)\,(0.5)}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) $\sqrt{2}$

23.- Simplificar :

$$\frac{5 \, . \, 2^{x+2} - 2^{x+4} + 6 \, . \, 2^{x-1}}{2^{x+5} - 15 \, . \, 2^x - 2 \, . \, 2^{x+3}}$$

A) 3 B) 17 C) 13 D) 19 E) 7

24.- Si : $x^{x^x}=\sqrt{2}$; calcular $\left[x^{\sqrt{2}}\right]^{x^{x+x^x}}$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4 D) $2\sqrt{2}$ E) 8

25.- Reducir : $\sqrt[x-1]{\dfrac{3^{x-1}+4^{x-1}+6^{x-1}}{4^{1-x}+6^{1-x}+8^{1-x}}}$

A) 36 B) $\sqrt{32}$ C) 144 D) 24 E) 48

NIVEL C

26.- Simplificar :

$$M=\left[\sqrt[2a]{\frac{1}{a^2}}\right]^{8a}\cdot\sqrt[\frac{1}{8}]{\left(\sqrt[8]{a^{2a}}\right)^{\frac{4}{a}}+\left(\sqrt[8]{a^{4a}}\right)^{\frac{2}{a}}}$$

A) 1 B) a C) a^8 D) a^{16} E) 256

27.- Reducir :

$$\left[\frac{\overbrace{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}\ \ldots\ldots\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}^{(3n+24)\text{ veces}}}{\sqrt{x^3\sqrt{x^4\sqrt[5]{x^6}}}}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt[\frac{2}{n}]{x^{\frac{3n+4}{2n}}}}{x^n\cdot\sqrt[5]{x}}\right]$$

A) $\sqrt[n]{x}$ B) x C) x^3 D) 1 E) $\sqrt[3]{x}$

28.- Simplificar :

$$E=\sqrt[1024^{4^n}]{\left[\sqrt[4]{16^{4^{4^n+1}}}\right]^{4^{4^n}}}$$

A) 8 B) 16 C) 2 D) 4 E) 64

29.- Efectuar :

$$\underbrace{\sqrt[n]{x^{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}\ldots\ldots\sqrt[n]{x^{n-1}}}}}_{n\text{ radicales}}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\ldots\ldots\sqrt[n]{x}}}}_{n\text{ radicales}}$$

A) x^{2n} B) $\sqrt[n]{x}$ C) x^n

D) x^2 E) x

30.- Encontrar la suma de los exponentes de x e y al efectuar :

$$\sqrt[5]{x\sqrt[9]{y\sqrt[5]{x\sqrt[9]{y\ \ldots\ldots\infty}}}}$$

A) $\dfrac{5}{3}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{5}{11}$ D) $\dfrac{6}{5}$ E) $\dfrac{5}{22}$

31.- Efectuar y reducir :

$$E=\left[\sqrt[n\sqrt[n]{n}-1]{\frac{\sqrt[n]{n^{n\sqrt[n]{n}+n-1}}}{n\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}}}\right]^{\frac{3n\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+1}}$$

A) n^n B) n^3 C) n D) n^{2n} E) $3n$

32.- Encontrar el valor numérico de :

$$E=\frac{\sqrt[a-1]{ax\sqrt[a+1]{x^a}}}{\sqrt[a+1]{x^a\sqrt[a-1]{ax}}}$$

sabiendo que es independiente de x.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt[3]{9}$ C) $\sqrt[5]{3}$

D) $\sqrt[8]{27}$ E) N.A.

33.- Sabiendo que $n!=1.2.3.\ \ldots\ldots n$

reducir : $\dfrac{n^{n!+1}\cdot(n-1)!^{(n+1)!}}{(n!)^{n!}\cdot(n-1)!^{n(n!)}}$

A) $n^{n!}$ B) $(n!)^n$ C) $n!$ D) n E) 1

34.- Simplificar :

$$\frac{\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3\ \ldots\sqrt[n]{x^{n-1}}}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[n]{x^{-1}}}}}}}$$

A) 1 B) x^n C) x^{n^n} D) x E) $\sqrt[n]{x}$

35.- Determine el exponente de x en :

$$\sqrt{x^n\sqrt{x^{n-1}\sqrt{x^{n-2}\ldots\sqrt{x^2\sqrt{x}}}}}$$

A) $(n-1)2^n+1$ B) $2^{-n}+n-1$

C) 2^n-n+1 D) $2^{-n}-n+1$

E) $2^{-n}+n+1$

36.- Simplificar : $\left[\sqrt[x^3+8]{\dfrac{2^{x^2+3x+4}}{\sqrt[x]{32^{x^2}}}}\right]^{x+2}$

A) 2 B) 1/2 C) 4

D) 8 E) 16

37.- Mostrar el equivalente de :

$$\left[\frac{\sqrt[a+b+c]{x^{(ab)^{-1}}\cdot x^{(bc)^{-1}}\cdot x^{(ac)^{-1}}}}{\sqrt[a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}]{x^{ab}\cdot x^{bc}\cdot x^{ac}}}\right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

A) 1 B) x^{abc}

C) x^{abc-1} D) x

E) x^{abc+1}

38.- El equivalente de :

$$\left[\frac{2^{x+1}+3\left(2^{x+2}\right)+5\left(2^{x+3}\right)+10\left(2^x\right)}{4^{x-1}+28\left(4^{x-2}\right)}\right]^{-1},$$

es :

A) 2^{x+5} B) 32 C) 2^{x-7}

D) 2 E) 2^{x-5}

39.- La forma más simple de :

$$\sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{\left[x^n\right]^{(n+1)^2}+x^{(n+1)^3}}{\left[x^{\frac{(n+1)^2}{2}}\right]^n+x^{\frac{(n+1)^2(n+2)}{2}}}}\ , \text{ es :}$$

A) x^{n^2} B) $x^{(n+1)^2}$ C) x^{2n}

D) x^{n+1} E) x^n

40.- Indicar el equivalente de :

$$\left(\sqrt[8]{5}\right)^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[6]{4^5}}}$$

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 25

D) 1/5 E) 1/25

41.- Si : $a=bx$ ¿Cuál es el equivalente de :

$$\frac{\sqrt[b]{\dfrac{b^a}{a^a}}\sqrt{\sqrt[a]{b^b}\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt[a]{a^b}}}}}{x^{\sqrt[x]{x}^{x^2+1}}}\ ?$$

A) $\dfrac{a}{b}$ B) $\dfrac{b}{a}$ C) a^a D) ab E) 1

42.- Reducir : $\sqrt[1]{\dfrac{\sqrt[2]{\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}{x^{3!}}}}{x^{2!}}}}{x^{1!}}}$ "n" radicales

A) 1 B) $x^{\frac{-n(n+1)}{2}}$ C) x^n

D) x^{-n} E) x

2 Ecuaciones Exponenciales

DEFINICION.-

Las ecuaciones exponenciales son aquellas que contienen a la o las incógnitas sólo en el exponente.

2.1) TECNICAS DE CONVERTIBILIDAD

Las ecuaciones exponenciales se convierten en ecuaciones algebraicas aplicando ciertas técnicas que enseguida se enuncian y describen :

1ro) *Conseguir una ecuación donde queden igualadas dos potencias que tengan la misma base.*

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y \Leftrightarrow a > 0 \wedge a \neq 1$$

Ejemplo.- Resolver : $9^{x-2} = 3^{x+1}$

Después de expresar 9 como 3^2 ,tenemos : $\left(3^2\right)^{(x-2)} = 3^{x+1}$

Efectuando operaciones en los exponentes : $3^{2x-4} = 3^{x+1}$

A continuación igualamos exponentes : $2x - 4 = x + 1$

Finalmente, resolvemos y obtenemos que : $x = 5$

2do) *En aquellos casos en donde existan términos de la forma k^x , se hace un cambio de variable del tipo $k^x = y$, para obtener una ecuación algebraica respecto a* $\boldsymbol{y}$.

Ejemplo.- Resolver : $2^x + 2^{x+2} = 40$

Utilizando el Teorema 1 de exponentes : $2^x + 2^x \cdot 2^2 = 40$

Haciendo la transformación $y = 2^x$,obtenemos : $y + 4y = 40$

Resolviendo encontramos que : $y = 8$

Y regresando a la incógnita original,diremos que : $2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

3ro) *Existen casos en los que en la ecuación se consigue una igualdad en el exponente.*

$$a^x = b^x \quad \Rightarrow \quad a = b \quad \Leftrightarrow \quad a > 0 \wedge b > 0$$

Además en este caso se admitirá $x = 0$ cuando $a \neq b$

Ejemplo.- Resolver : $(2n)^x = (3+n)^x$

De la ecuación se deduce : $2n = 3 + n \quad \Rightarrow \quad n = 3$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Hallar x : $\sqrt[7]{\dfrac{5^{16}+5^x}{5^x+5^2}} = 5$

A) 9 *B) 3* *C) 2* *D) 1* *E) 0*

Resolución.-

Nuestra técnica consistirá en aplicar la primera regla de convertibilidad, esto es, trataremos de expresar la ecuación dada en otra cuyos miembros tengan la misma base, para luego proceder a igualar los exponentes :

1) Eliminaremos el radical elevando la ecuación al exponente 7 : $\dfrac{5^{16}+5^x}{5^x+5^2} = 5^7$

2) Realizando las operaciones indicadas tendremos : $5^{16} + 5^x = 5^7.5^x + 5^9$

3) Pasando al segundo miembro las potencias 5^x : $5^{16} - 5^9 = 5^7.5^x - 5^x$

4) Luego de factorizar en ambos lados, nos queda : $5^9(5^7 - 1) = 5^x(5^7 - 1)$

5) Eliminando los paréntesis obtendremos : $5^9 = 5^x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 9}$

RPTA. A

2.- Hallar: $125^{27^{2x^{-1}}} = 5^9$

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

Resolución.-

En base a lo aplicado en el ejercicio anterior, procederemos a igualar las bases de ambos miembros, para luego igualar los exponentes.

1) Recordando que $125 = 5^3$, tendremos : $125^{27^{2x^{-1}}} = 125^3$

2) Igualando exponentes se tendrá : $27^{2x^{-1}} = 3$

3) Debes saber que 3 es equivalente a $27^{\frac{1}{3}}$, luego : $27^{2x^{-1}} = 27^{\frac{1}{3}}$

4) Ahora solo queda por igualar : $2x^{-1} = \frac{1}{3}$

5) Aplicando la definición 2 de exponentes negativos : $\frac{2}{x} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ **$x = 6$** **RPTA. E**

3.- Resolver : $\dfrac{0{,}2^{x-0{,}5}}{5\sqrt{5}} = 0{,}04^{x-1}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D)4* *E) 5*

Resolución.-

Tal como hicimos en los ejercicios anteriores , expresaremos la ecuación de manera que las bases sean iguales para así igualar los exponentes. Para este caso es necesario tener en cuenta que : $0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$; $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2}$. Según esto resulta evidente que las bases serán 5.

1) Sustituyendo los decimales, y efectuando operaciones tendremos : $\left(5^{-1}\right)^{x-0{,}5} = 5.\,5^{\frac{1}{2}}.\left(5^{-2}\right)^{x-1}$

2) Efectuando operaciones en los exponentes : $5^{0{,}5-x} = 5^{1{,}5}.5^{-2x+2}$

3) Reduciendo los exponentes en el segundo miembro : $0{,}5 - x = -2x + 3{,}5$

4) Despejando x se obtiene : **$x = 3$** **RPTA. C**

4.- Si : $\left(2\sqrt[3]{7}\right)^{x} = 3136$, entonces el valor de $x^2 + 1$ es :

A) 32 *B) 29* *C) 76* *D) 23* *E) 37* *UNMSM 95*

Resolución.-

Para poder aplicar la técnica de los ejercicios anteriores debemos reconocer que al descomponer 3131 en sus factores primos, se obtiene : $2^6.7^2$; es decir : $3\,136 = 2^6.7^2$

1) Al reemplazar el producto anterior en la ecuación dada, tendremos : $\left(2\sqrt[3]{7}\right)^{x} = 2^6.7^2$

2) Acomodando el segundo miembro se logra establecer que : $\left(2\sqrt[3]{7}\right)^{x} = \left(2\sqrt[3]{7}\right)^{6}$

3) Igualando exponentes se tendrá : $x = 6$

4) Finalmente lo solicitado será : **$x^2 + 1 = 37$** **RPTA. E**

5.- Resolver la ecuación : $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$ ***; y dar el valor de :*** $x + x^{-1}$

A) $\frac{10}{3}$ *B)* $\frac{5}{2}$ *C)* $\frac{17}{4}$ *D) 2* *E) N.A.*

Resolución.-

A partir de este ejercicio aplicaremos la segunda técnica de convertibilidad, para lo cual será necesario reconocer qué término exponencial de la ecuación original presenta a la variable x. Podemos establecer que :

$$4^x = \left(2^2\right)^x = \left(2^x\right)^2 \text{ , y , } 2^{x+1} = 2 \,.\, 2^x$$

1) Sustituyendo estas expresiones en la ecuación original, tendremos : $\left(2^x\right)^2 + 2 \,.\, 2^x - 24 = 0$

2) Haciendo el cambio de variable $y = 2^x$, obtenemos : $y^2 + 2y - 24 = 0$

3) Descomponiendo en dos factores, se tiene : $(y - 4)(y + 6) = 0$

4) Igualando cada factor a cero, obtenemos los valores de y son : $y = 4$; $y = -6$

5) Retornando a la variable original x , se tendrá : $2^x = 4$; $2^x = -6$

6) Puesto que 2^x es siempre positivo, solo la 1ª ecuación tendrá solución real y esta es : $x = 2$

7) Esto permite hallar lo solicitado : $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$ **RPTA. B**

6.- Resolver : $7 \,.\, 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

A) 2 *B) -2* *C) 1* *D) -1* *E) 0*

Resolución.-

1) Ordenando los términos de la ecuación se tendrá : $7 \,.\, 3^{x+1} - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+3}$

2) Aplicando el teorema 1 de exponentes : $7.3 \,.\, 3^x - 3^x \, 3^4 = 5^x \, 5^2 - 5^x \, 5^3$

3) Factorizando 3^x y 5^x , se tiene : $3^x (21 - 81) = 5^x (25 - 125)$

4) Efectuando operaciones, obtenemos : $3^x (-60) = 5^x (-100)$

5) Simplificando, la expresión queda así : $3^x .3 = 5^x .5$

6) Finalmente la ecuación queda reducida a : $3^{x+1} = 5^{x+1}$

7) En base a lo explicado en la 2da técnica de convertibilidad, reconocemos que la ecuación obtenida solo puede cumplirse si :

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$ **RPTA. D**

7.- El valor de x que satisface la ecuación : $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ ***es :***

A) $\frac{5}{2}$ ***B)*** $\frac{7}{2}$ ***C)*** $\frac{3}{2}$ ***D)*** $\frac{3}{4}$ ***E)*** $\frac{5}{4}$ ***UNI 84***

Resolución.-

Salta a la vista que la técnica consistirá en convertir la ecuación en una igualdad de bases diferentes, los cuales serán 2 y 3 .

1) Luego de transponer términos, ordenamos : $2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$

2) Factorizando en cada miembro : $2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1)$

3) Efectuando y acomodando nos queda : $\dfrac{2^{2x-1}}{2^2} = \dfrac{3^{x-\frac{1}{2}}}{3}$

4) Reduciendo los cocientes, se tiene : $2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}}$

5) Acomodando los exponentes del segundo miembro : $2^{2x-3} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-3}$

6) Como $2 \neq 3^{\frac{1}{2}}$; la ecuación solo se cumple si : $2x - 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$ **RPTA. C**

8.- En la siguiente ecuación : $16^{\sqrt{x}} - 256 = 60.\,4^{\sqrt{x}}$ ***, el valor de x es :***

A) 3 B) 4 C) - 4 D) 9 E) 1 UNMSM 92

Resolución.-

Preparamos la ecuación para efectuar el cambio de variable : $y = 4^{\sqrt{x}}$

1) Teniendo en cuenta nuestro cambio, la ecuación será : $\left(4^{\sqrt{x}}\right)^2 - 256 = 60\,.\,4^{\sqrt{x}}$

2) Empleando la variable y, se tendrá : $y^2 - 256 = 60y$

3) Ordenando y factorizando, obtenemos : $(y - 64)\ (y + 4) = 0$

4) Al resolver esta ecuación reconocemos que solo es admisible : $y = 64$

5) Sustituyendo y, tendremos : $4^{\sqrt{x}} = 64 \Rightarrow 4^{\sqrt{x}} = 4^3$

6) Igualando exponentes : $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow \boldsymbol{x = 9}$ **RPTA. D**

2.2) ECUACIONES TRASCENDENTES

Las ecuaciones exponenciales son un caso particular de ecuaciones no algebraicas o trascendentes, que se caracterizan por presentar a la variable como base y exponente a la vez, o afectadas por algún operador de función trascendente. A continuación presentamos algunos ejemplos :

$$x.\,4^x = x^{x+2} \quad ;$$

$$2\,\mathrm{sen}\,x = \cos^2 x + 1$$

$$log\,(\mathrm{sen}\,x) = x + 1 \quad ;$$

$$2^x = x + 1$$

La resolución de una ecuación trascendente se reduce a la resolución de una ecuación algebraica sólo en algunos casos dado que la mayoría de veces se resuelven por aproximaciones o métodos gráficos.

Una de estas excepciones es el método de formar *analogías*, como por ejemplo :

$$x^x = a^a \quad \text{implica } x = a$$

$$x^{x^b} = a^{a^b} \quad \text{implica } x = a \;;\; \text{etc.}$$

Estas técnicas no aseguran la obtención de todas las soluciones de la ecuación, debiéndose recurrir a otros métodos que pueden exceder el nivel elemental que pretendemos con este texto.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

9.- *En la expresión :* $(nx)^x = n^{n^n}$ *, el valor de x en términos de n es :*

A) n^{-n} ***B)*** n^n ***C)*** n^{n-1} ***D)*** n^{1-n} ***E) N.A.*** ***UNFV 87***

Resolución.-

En el presente ejercicio aplicaremos técnicas de convertibilidad, que nos permitirán formar una analogía, puesto que la ecuación es trascendente.

1) Elevemos ambos miembros de la igualdad al exponente "n". $\quad \left[(nx)^x\right]^n = \left[n^{n^n}\right]^n$

2) Haciendo operaciones en los exponentes del 1er miembro y un cambio en el orden de los exponentes del 2do, tendremos : $\quad (nx)^{nx} = \left[n^n\right]^{n^n}$

3) Formada la analogía, igualamos : $\quad nx = n^n$

4) De donde : $\quad x = \dfrac{n^n}{n} = n^{n-1}$ **RPTA . C**

10.- Resolver : $x^{x^{2x^2}} = 4$ ***, y dar el valor de :*** $x^4 + x^2$

A) 20 B) 6 C) 72 D) 40 E) N.A.

Resolución.-

1) Preparemos la ecuación para aplicar la técnica de la analogía : $\left(x^{x^{2x^2}}\right)^2 = 4^2$

2) Intercambiando exponentes en el primer miembro : $\left[x^2\right]^{x^{2x^2}} = \left(2^2\right)^2$

3) Acomodando los exponentes del 1er y 2do miembro : $\left[x^2\right]^{\left(x^2\right)^{x^2}} = 2^{2^2}$

4) Luego de comparar, se puede igualar : $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

5) Finalmente lo solicitado es : $x^4 + x^2 = 4 + 2 =$ **6** **RPTA. B**

11.- Al resolver la ecuación : $x^x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ***, el valor de x es :***

A) $\frac{1}{4}$ ***B)*** $\frac{1}{8}$ ***C)*** $\frac{1}{18}$ ***D)*** $\frac{1}{16}$ ***E)*** $\frac{1}{24}$ ***UNFV 94***

Resolución.-

Como x aparece tanto en la base como en el exponente, solo se puede formar una analogía, para lo cual se hacen transformaciones en el segundo miembro :

1) Recordando que $4.\frac{1}{4}$ es igual a la unidad , tendremos : $x^x = \left[\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]^{4.\frac{1}{4}}$

2) Utilizando el teorema 7 de radicales, se tiene : $x^x = \sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}^{\,4.\frac{1}{4}}$

3) Empleando la definición 5 de radicales, se obtiene : $x^x = \sqrt[4]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}}$

4) Efectuando operaciones se tendrá : $x^x = \sqrt[16]{\dfrac{1}{16}}$

5) Y recurriendo a la definición 4 de radicales, obtenemos : $x^x = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{16}}$

6) Finalmente, por comparación : $x = \dfrac{1}{16}$ **RPTA. D**

12.- Resolver : $\dfrac{x}{\sqrt[x]{x}} = 64$ **, y dar el valor de** x^x .

A) 4 *B)* 9 *C)* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *D)* $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ *E) N.A.*

Resolución.-

Existen casos en donde para establecer una analogía, debe hacerse previamente un cambio de variable; en el caso dado, conviene hacer : $x = \dfrac{1}{n}$. De esta manera el lado izquierdo de la igualdad queda transformado en :

$$\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[\frac{1}{n}]{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n^n}{n} = n^{n-1}$$

Así la ecuación a resolver es : $n^{n-1} = 64$

Ahora se puede comparar : $n^{n-1} = 4^3$

De esta igualdad es fácil reconocer que : $n = 4$

A continuación retomamos a la variable inicial, de modo que : $x = \dfrac{1}{4}$

Seguidamente calcularemos lo solicitado : $x^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{4}}$

Finalmente, al hacer operaciones se obtiene : $x^x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ **RPTA. C**

13.- Resolver : $x^{x^{x^4+4}} = 256$ **, y dar el valor de** x^{x^2} .

A) $\sqrt{2}$ *B)* 2 *C)* 4 *D)* 16 *E) N.A.*

Resolución.-

Recordemos que : $256 = 4^4$; y según esto trataremos de formar en ambos lados de la igualdad, potencias que nos permitan establecer una analogía. Para ello intentaremos transformar el primer miembro en una potencia cuya base sea igual a su exponente para finalmente compararlo con : 4^4

Trabajando con el 1^er^ miembro, se tiene : $x^{x^{x^4+4}} = x^{x^{x^4}\cdot x^4} = \left[x^{x^4}\right]^{x^{x^4}}$

Ahora establecemos la igualdad : $\left[x^{x^4}\right]^{x^{x^4}} = 4^4$

Establecida la analogía, se tendrá que : $x^{x^4} = 4$

Dándole al 2^do^ miembro una forma similar al del 1^ro^, se tendrá : $4 = \sqrt[4]{4}^{\,4} = \left(\sqrt[4]{4}\right)^{\left(\sqrt[4]{4}\right)^4}$

A continuación podemos establecer que : $x^{x^4} = \left(\sqrt[4]{4}\right)^{\left(\sqrt[4]{4}\right)^4}$

Nuevamente por analogía se tiene que : $x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

Finalmente encontraremos lo solicitado : $x^{x^2} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}^2$

$\therefore \quad \boldsymbol{x^{x^2} = 2}$ **RPTA. B**

14.- Resolver la ecuación trascendente : $x^{x-\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 2$

A) 2 *B) 4* *C)* $\sqrt{2}$ *D) 8* *E) 16*

Resolución.-

La ecuación trascendente dada se puede reducir a una ecuación algebraica si efectuamos algunas transformaciones.-Veamos :

$$\frac{x^x}{x^{\sqrt{x}+1}} = \sqrt{x} + 2 \qquad \Rightarrow \qquad x^x = \left(\sqrt{x}+2\right).x^{\sqrt{x}+1}$$

Multiplicamos ambos miembros por x : $x^x.x = \left(\sqrt{x}+2\right)x^{\sqrt{x}+1}.x$

Operando los exponentes del 2^do^ miembro : $x^x.x = \left(\sqrt{x}+2\right)x^{\sqrt{x}+2}$

A cada miembro le asignamos la misma base x : $x^{x^x.x} = x^{\left(\sqrt{x}+2\right).x^{\sqrt{x}+2}}$

Acomodando los exponentes para conseguir una analogía : $(x^x)^{x^x} = \left(x^{\sqrt{x}+2}\right)^{x^{\sqrt{x}+2}}$

Comparando las bases y los exponentes, tendremos : $x^x = x^{\sqrt{x}+2}$

Procediendo a igualar los exponentes, encontramos que : $x = \sqrt{x} + 2$

Dado que x debe ser positivo,esta ecuación tiene solución única : $\boldsymbol{x = 4}$ **RPTA. B**

15.- Si : $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ***, entonces es verdad que :***

A) $x > 2$ *B)* $x = 2$ *C)* $x > 2$ *D)* $x^2 = 6$ *E)* $x = \sqrt[8]{8}$

Resolución.-

Haciendo una inspección de las alternativas, podemos reconocer que no se pide un valor exacto de x, que permita verificar la relación dada. Por tal razón nuestra estrategia consistirá en apoyarnos en la siguiente aproximación : $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. A continuación detallamos el proceso resolutivo que nos conducirá a la respuesta correcta. Veamos :

Luego será correcto estabecer : $\sqrt{2} < 2$ .... (*)

Enseguida trataremos de formar la expresión dada para x en el 1^er^ miembro de (*), para lo cual será necesario conservar el sentido del signo de relación >. Observa :

Sumando 2 a cada miembro, tendremos : $2 + \sqrt{2} < 4$

Extayendo signo radical de índice (2) : $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$

Sumando 2 a cada miembro, tendremos : $2 + \sqrt{2+\sqrt{2}} < 4$

Extrayendo signo radical de índice (2) : $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < 2$

Finalmente hemos obtenido en el 1^er^ miembro a x. $\therefore$ $\boldsymbol{x < 2}$ **RPTA. C**

16.- Si : $(x+1)^{(x+1)^{(x+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ ***¿ Cuál de las ecuaciones se cumple ?***

A) $x + 2 = \sqrt{2} + 1$ *B)* $2x = 2\sqrt{2}$ *C)* $x^2 = 2 + \sqrt{2}$

D) $x - 1 = -2$ *E)* $x^2 - 2 = \sqrt{2} - 1$ ***UNI 78***

Resolución.-

Como los exponentes sucesivos equivalen a 2, la ecuación se reduce a : $(x+1)^2 = 2$

De donde al extraer raíz cuadrada, se obtiene : $x + 1 = \sqrt{2}$, ó , $x + 1 = -\sqrt{2}$

De la primera opción se deduce que : $x + 2 = \sqrt{2} + 1$ **RPTA. A**

MISCELANEA

17.- Los valores de x que satisfacen a la ecuación : $x^{\sqrt{2x-1}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$ ***, tienen como producto :***

A) 0 *B) 2* *C) 4* *D) 1* *E) 12* ***UNI 91***

Resolución.-

Nuestro problema consiste en averiguar más de un valor de x que satisfaga la ecuación dada. Haciendo una simple inspección resulta evidente que un valor que verifica la ecuación es $x = 1$, lo que se comprueba, con sólo reemplazar este valor en la ecuación dada. A continuación intentaremos aplicar la técnica hasta aquí empleada en los ejercicios anteriores, es decir buscaremos bases iguales para igualar luego los exponentes.

1) Acomodando el segundo miembro tendremos : $x^{\sqrt{2x-1}} = x^{\frac{x}{2}}$

2) Al igualar los exponentes, se tiene : $\sqrt{2x-1} = \frac{x}{2}$

3) Elevando al cuadrado y ordenando : $2x - 1 = \frac{x^2}{4}$

4) Despejando se obtiene la ecuación cuadrática : $x^2 - 8x + 4 = 0$

5) Resolviendo descubrimos que las raíces son : $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-4(4)}}{2}$

$$x = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

6) Tanto : $x = 4 + 2\sqrt{3}$, como : $x = 4 - 2\sqrt{3}$, son positivos y satisfacen la ecuación original.

7) Luego con estas soluciones se forma el producto : $P = (1)\,(4 + 2\sqrt{3})\,(4 - 2\sqrt{3})$

$P = 16 - 12 =$ **4** **RPTA. C**

18.- Resolver : $2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{2^{-1}.x^{-\frac{1}{2}}} - \sqrt[\sqrt{x}-1]{2^4} = 0$

A) 9 *B) 4* *C) 16* *D) 25* *E)* $\frac{1}{4}$

Resolución.-

En primer lugar expresaremos la ecuación dada de modo que en ambos miembros existan bases iguales para después igualar exponentes. Veamos :

1) Acomodando la ecuación se tiene : $2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{2^{-1}.x^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt[\sqrt{x}-1]{2^4}$

2) Operando con los exponentes, tendremos : $2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}}$

3) Efectuando el producto indicado en los exponentes del 1^er miembro, tendremos : $2^{1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}} = 2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}}$

4) Igualando los exponentes, se establece : $1+\dfrac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$

5) Efectuando operaciones : $\dfrac{3\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$

$\Rightarrow \quad 3x - 3 = 8\sqrt{x}$

6) Haciendo el cambio $\sqrt{x} = y$, se tendrá : $3y^2 - 8y - 3 = 0$

7) Descomponiendo en dos factores : $(3y+1)(y-3) = 0$

8) Igualando a cero cada factor, los valores de y son : $-\frac{1}{3}$ y 3

9) Como la raíz cuadrada negativa no es válida, tendremos sólo : $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 9}$ **RPTA. A**

19.- Al resolver : $3^{x+3} - 3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^x = 60^x$, el valor de x es :

A) 0 ***B) - 1*** ***C) 1*** ***D) 2*** ***E) 3***

Resolución.-

1) Empleando el teorema 1 de exponentes : $3^x.3^3 - 3^x.3^2 + 3^x.3 - 3^x = 60^x$

2) Factorizando 3^x , se tendrá : $3^x(27 - 9 + 3 - 1) = 60^x$

3) Efectuando operaciones : $\Rightarrow \quad 3^x.20 = 60^x$

4) Reacomodando para formar bases iguales : $\dfrac{60^x}{3^x} = 20$

5) Efectuando el cociente indicado, se obtiene : $20^x = 20 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 1}$ **RPTA. C**

20.- Al resolver : $x^x - \left(x^2\right)^{x^2} = 0$, la suma de los valores de x es :

A) 3 ***B) 1,5*** ***C) 2,5*** ***D) 5*** ***E) 6***

Resolución.-

1) Formando la igualdad : $x^x = x^{2x^2}$

2) La 1ra solución evidente es $x = 1$. (Se comprueba al reemplazar)

3) Las otras soluciones se obtienen al igualar exponentes : $x = 2x^2$ ... (*)

4) Es fácil deducir que $x = 0$, sin embargo esta no es admisible.

5) Simplificando en (*) : $x = \frac{1}{2}$

Finalmente concluímos que las soluciones son : $\mathbf{1}$ **y** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **RPTA. B**

21.- Calcular el valor de "n" si : $2^n.2^{n-1}.2^{n-2}$ ......(2n - 1) factores = 32^{33}

A) 201 B) 121 C) 34 D) 64 E) 83

Resolución.-

El exponente del último factor será el término de lugar $(2n - 1)$ en la sucesión :

$$n, (n-1), (n-2), ...$$

El valor de dicho exponente será : $n - (2n - 1 - 1) = -n + 2 = -(n-2)$

De este modo la ecuación dada se escribirá asi :

$$2^n.2^{n-1}.\underbrace{2^{n-2}.......2^1.2^0.2^{-1}.......2^{-(n-2)}}_{1} = \left(2^5\right)^{33}$$

Por la simetría de la distribución que señala la llave, los exponentes se anulan y la expresión original se reduce al producto de los dos primeros términos.

$$2^n.2^{n-1}.1 = 2^{165} \Rightarrow 2^{2n-1} = 2^{165}$$

Igualando exponentes : $2n - 1 = 165 \Rightarrow \mathbf{n = 83}$ **RPTA. E**

22.- Dada la progresión : $10^{\frac{1}{11}}$; $10^{\frac{2}{11}}$; $10^{\frac{3}{11}}$; .... ; $10^{\frac{n}{11}}$

Determine el valor de n para que el producto de los n primeros términos de la progresión sea exactamente 1 000 000 (un millón).

A) 5 B) 6 C) 7 D) 11 E) 15

Resolución.-

Expresamos el producto de potencias como la suma de exponentes : $P = 10^{(1+2+3+......+n)/11}$

Recordando ahora que : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, se tendrá : $P = 10^{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]/11}$

Efectuando operaciones en los exponentes, tendremos : $P = 10^{\frac{n(n+1)}{22}}$

Como el resultado debe ser 1 000 000 ó 10^6 , tendremos : $10^{\frac{n(n+1)}{22}} = 10^6$

A continuación igualamos los exponentes : $\dfrac{n(n+1)}{22} = 6$

Efectuando operaciones, se establece que : $n(n+1) = 132 \Rightarrow n(n+1) = 11 \cdot 12$

Finalmente la solución positiva es : $n = 11$ **RPTA. D**

23.- Resolver el sistema : $\begin{cases} x^{y-2} = 4 \\ x^{2y-3} = 64 \end{cases}$ ***, y dar el valor de x + y***

A) 5 ***B) 7*** ***C) 9*** ***D) 16*** ***E) 25***

Resolución.-

Elevamos al cuadrado la 1ra ecuación : $x^{2y-4} = 16$

Y con la 2da formamos un cociente : $\dfrac{x^{2y-3}}{x^{2y-4}} = \dfrac{64}{16}$

Efectuando operaciones con los exponentes del primer miembro, obtenemos : $x = 4$

Sustituyendo este valor de x en la 1ra ecuación, se estable que : $4^{y-2} = 4$

De donde deducimos que : $y - 2 = 1$ ó $y = 3$

Finalmente : $x + y = 4 + 3 = 7$ **RPTA. B**

24.- Si tenemos que : $x^n . y^m = 10^n$; $x^m . y^n = 10^m$ ***, entonces el valor de*** $A = (xy)^{y/x}$ ***será :***

A) 10^{10} ***B)*** $\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}}$ ***C)*** $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$ ***D)*** $10^{\frac{1}{10}}$ ***E)*** $\sqrt{10}$ ***UNI 84***

Resolución.-

Multiplicando y dividiendo entre sí ambos miembros de las dos ecuaciones :

a) $x^{m+n} . y^{m+n} = 10^{m+n} \Rightarrow (xy)^{m+n} = 10^{m+n}$ ......(1)

b) $x^{n-m} \div y^{n-m} = 10^{n-m} \Rightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-m} = 10^{n-m}$ ......(2)

Analizando estas ecuaciones deducimos que : $xy = 10$; $\dfrac{x}{y} = 10$ ó $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{10}$

Entonces lo solicitado será : $A = (10)^{1/10}$ **RPTA. D**

25.- Resolver el sistema : $\sqrt[x+y]{\left[\dfrac{\sqrt[x]{xy^{-1}}}{\sqrt[y]{x^{-1}y}}\right]^{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$; $\sqrt[x-y]{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ***; y dar el valor de : x + y***

A) $3\sqrt{2}$ *B)* $2\sqrt{3}$ *C) 8* *D) 20* *E) 16*

Resolución.-

Transformando la 1ra. ecuación : $\left[\dfrac{\sqrt[x]{xy^{-1}}}{\sqrt[y]{x^{-1}y}}\right]^{\frac{x^2}{x+y}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ .... (α)

Debemos expresar el 1er miembro como una potencia en la que el exponente sea idéntico a la base :

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{x}}.y^{-\frac{1}{x}}}{x^{-\frac{1}{y}}.y^{\frac{1}{y}}}\right]^{\frac{x^2}{x+y}} = \left[\frac{x^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{y^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}\right]^{\frac{x^2}{x+y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{x^2}{x+y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \quad .... (\beta)$$

De (α) y (β) deducimos que : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{3}$, ó , $y = 3x$ .... (1)

Luego en la 2da ecuación tendremos : $\sqrt[x-3x]{x+3x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt[2x]{4x}^{-1} = \sqrt{2}^{-1} \Rightarrow \sqrt[2x]{4x} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[2x]{4x} = \sqrt[8]{2^4} \Rightarrow \sqrt[2x]{4x} = \sqrt[8]{16}$$

Por comparación : $2x = 8 \Rightarrow x = 4$; lo cual implica que : $y = 12$

Entonces : $x + y =$ **16** **RPTA. E**

26.- ¿Qué valor de "x" verifica la siguiente igualdad : $x^{x^{n^{n+1}}} = \sqrt[n^n]{n}$ ***, donde :*** $n \in N$ / $n \geq 1997$

A) $\sqrt[n+1]{n}$ *B)* $\sqrt[n]{n}^{\,n+1}$ *C)* $\sqrt[n^n]{n}$ *D)* $\sqrt[n^{n+1}]{n}$ *E)* $\sqrt[n^{n-1}]{n}$

Resolución.-

Elevando al exponente : n^n a ambos miembros de la igualdad , se tendría : $\left[x^{x^{n^{n+1}}}\right]^{n^n} = \left[\sqrt[n^n]{n}\right]^{n^n}$

Recordando que : $\left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b$, se consigue : $\left[x^{n^n}\right]^{x^{n^{n+1}}} = n$

Trabajando con los exponentes del 1er miembro : $$\left[x^{n^n}\right]^{\left[x^{n^n}\right]^n} = n$$

Dando al 2do miembro una forma similar al 1ro : $$\left[x^{n^n}\right]^{\left[x^{n^n}\right]^n} = \sqrt[n]{n}^{\,\sqrt[n]{n}^{\,n}}$$

Por analogía se concluye que : $x^{n^n} = \sqrt[n]{n}$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt[n^{n+1}]{n}$ **RPTA. D**

27.- Si : $\sqrt[n+1]{\sqrt{2}-1}\ .\ \sqrt[n-1]{\sqrt{2}+1} = \sqrt[24]{3+2\sqrt{2}}$ ***, ¿Cuál es el valor de "n"?***

A) 7 ***B) 6*** ***C) 5*** ***D) 4*** ***E) 3***

Resolución.-

Debemos tener en cuenta que: $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{2}-1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$

Extrayendo signo radical de indice $n+1$, esta última expresión quedará así: $$\sqrt[n+1]{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\sqrt{2}+1}}$$

Ahora reemplacemos en la igualdad dada : $$\frac{\sqrt[n-1]{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[n+1]{\sqrt{2}+1}} = \sqrt[24]{3+2\sqrt{2}}$$

Acomodando el primer miembro, tendremos : $$\frac{\sqrt[(n+1)(n-1)]{\sqrt{2}+1}^{(n+1)}}{\sqrt[(n+1)(n-1)]{\sqrt{2}+1}^{(n-1)}} = \sqrt[24]{3+2\sqrt{2}}$$

Efectuando en el primer miembro : $$\sqrt[n^2-1]{\sqrt{2}+1}^{(n+1)-(n-1)} = \sqrt[24]{3+2\sqrt{2}}$$

Reduciendo en el exponente del 1er miembro : $$\sqrt[n^2-1]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \sqrt[24]{3+2\sqrt{2}}$$

Desarrollando el binomio del radicando, se tiene : $$\sqrt[n^2-1]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[24]{3+2\sqrt{2}}$$

Comparando : $n^2 - 1 = 24$ $\therefore$ $\boldsymbol{n = 5}$ **RPTA. C**

28.- Si : $x^{2x^2-2x} - 1 = x$ ***; proporcionar el valor numérico de :*** $t = x^2 + x^{-2}$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Transponiendo -1 al 2do miembro, la igualdad queda así : $x^{2x^2-2x} = x + 1$

Utilizando la definición del exponente negativo : $\dfrac{x^{2x^2}}{x^{2x}} = x+1$

Pasando el denominador del 1er al 2do miembro : $x^{2x^2} = (x+1)\,x^{2x}$

Multiplicando por " x^2 " a ambos miembros : $x^2 .\, x^{2x^2} = x^2\,(x+1)\; x^{2x}$

Acomodando los términos de cada miembro : $\left[x^2\right]\left(x^2\right)^{\left[x^2\right]} = [x+1]\left(x^2\right)^{[x+1]}$

Comparando las expresiones de ambos miembros : $x^2 = x+1$

Dividiendo a ambos miembros por "x" se consigue : $x = 1 + x^{-1} \Rightarrow x - x^{-1} = 1$

Elevando al cuadrado a ambos miembros de esta última igualdad tendremos :

$\left(x - x^{-1}\right)^2 = (1)^2 \Rightarrow x^2 - 2 + x^{-2} = 1$ $\quad\therefore\quad$ $t = 3$ **RPTA. C**

29.- Calcular el valor de : $\sqrt{x^2+5}$ ***si "x" verifica :*** $3^{4^{2^x}} = 81^{2^6}$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

En primer lugar encontraremos el valor de x, para ello escribiremos el segundo miembro de la igualdad en función de la base tres : $3^{4^{2^x}} = \left(3^4\right)^{2^6} = 3^{4.2^6}$

Por analogía se puede establecer que : $4^{2^x} = 4.2^6$

Escribiendo en función de la base dos : $\left(2^2\right)^{2^x} = 2^2.2^6 \Rightarrow 2^{2.2^x} = 2^8$

Nuevamente, por analogía se tiene : $2 . 2^x = 8$

Simplificando tendremos : $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

Finalmente lo solicitado es : $\sqrt{x^2+5} = \;$ **3** **RPTA. C**

30.- Calcular " x^2 " a partir de : $x^{x^x} = \sqrt[4]{8}^{\sqrt[12]{8}^{4\left(1+3\sqrt{2}\right)}}$

A) 4 ***B) 6*** ***C) 8*** ***D) 10*** ***E) 12***

Resolución.-

Dando forma al segundo miembro : $x^{x^x} = \sqrt[4]{8}^{\left(\sqrt[12]{2^3}^{\,4}\right)^{1+3\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{8}^{\left(\sqrt[12]{2}^{\,12}\right)^{1+3\sqrt{2}}}$

Simplificando dentro del paréntesis : $x^{x^x} = \sqrt[4]{8}^{2^{1+3\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{8}^{2 \cdot 2^{3\sqrt{2}}}$

Agrupando convenientemente : $x^{x^x} = \left(\sqrt[4]{8}^{2}\right)^{\left(2^3\right)^{\sqrt{2}}} = \sqrt{8}^{8^{\sqrt{2}}}$

Simplificando y efectuando las potencias : $x^{x^x} = \sqrt{8}^{\left(\sqrt{8}^{2}\right)^{\sqrt{2}}} = \sqrt{8}^{\sqrt{8}^{2\sqrt{2}}}$

Y recordando que : $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, diremos que : $x^{x^x} = \sqrt{8}^{\sqrt{8}^{\sqrt{8}}}$

Finalmente por analogía se concluye que : $x = \sqrt{8} \quad \therefore \quad \boxed{x^2 = 8}$ **RPTA. C**

31.- Luego de resolver : $4^{x+2} + 4^{x+4} + 4^{x+5} - 81 = 0$ ***; indicar el valor de :*** $t = x + x^{-1}$

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $-\frac{1}{2}$ *C)* $\frac{5}{2}$ *D)* $-\frac{5}{2}$ *E)* $\frac{1}{4}$

Resolución.-

Escribiendo convenientemente, la igualdad queda así : $4^{x+2} + 4^{x+4} + 4^{x+5} = 81$

Factorizando 4^{x+2} , logramos obtener : $4^{x+2}\left(1 + 4^2 + 4^3\right) = 81$

Efectuando operaciones dentro del paréntesis : $4^{x+2}(81) = 81$

Luego de simplificar 81 de ambos miembros, nos queda : $4^{x+2} = 1$

Empleando la 3ra Técnica de Convertibilidad, obtendremos : $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

A continuación calculamos lo solicitado : $t = x + \frac{1}{x} = -2 + \frac{1}{-2}$

$$\therefore \quad \boxed{t = -\frac{5}{2}} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

32.- Indicar la raíz cúbica de "x" a partir de : $\sqrt[x]{x^{x^2}\sqrt[x]{x^{x^3}\sqrt[x]{x^{x^4}\ldots\text{"x" radicales}\ldots}}} = 4^{96}$

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

Resolución.-

Transformando convenientemente el radical, se tendrá : $\underbrace{\sqrt[x]{x^{x^2}} \cdot \sqrt[x]{\sqrt[x]{x^{x^3}}} \cdot \sqrt[x]{\sqrt[x]{\sqrt[x]{x^{x^4}}}} \ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"x" factores}} = 4^{96}$

Efectuando operaciones en los primeros radicales : $\underbrace{\sqrt[x]{x^{x^2}} \cdot \sqrt[x^2]{x^{x^3}} \; \sqrt[x^3]{x^{x^4}} \ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"x" factores}} = 4^{96}$

Simplificando cada factor : $\underbrace{x^x . x^x . x^x ....}_{"x" \text{ factores}} = 4^{96}$

Por la definición de potencia, se tendrá : $\left(x^x\right)^x = 4^{96}$

Efectuando el producto de exponentes : $x^{x^2} = 4^{96}$

Dando forma al segundo miembro : $x^{x^2} = \left(2^2\right)^{3.32} = \left(2^3\right)^{2.32}$

Efectuando los calculos de potencias : $x^{x^2} = 8^{64} \Rightarrow x^{x^2} = 8^{8^2}$

Finalmente por analogía se obtiene que : $x = 8$ $\therefore$ $\sqrt[3]{x} = 2$ **RPTA. A**

33.- Si : $\sqrt[a]{b}\ \sqrt[b]{a} = \sqrt[8]{2^{7\sqrt{2}}}$; $a > b$; calcular : $E = \dfrac{a+b}{a-b}$

A) 6 B) 9 C) 3 D) 12 E) 5

Resolución.-

Homogenizando los indices de radicales del 1^er^ miembro : $\sqrt[ab]{b^b}\ \sqrt[ab]{a^a} = \sqrt[4]{\sqrt{2}^{7\sqrt{2}}}$

Operando en el 1^er^ miembro y transformando el 2^do^ , queda : $\sqrt[ab]{a^a b^b} = \sqrt[4]{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\ \sqrt{2}^{6\sqrt{2}}}$

Descomponiendo convenientemente la expresión $\sqrt{2}^{6\sqrt{2}}$: $\sqrt[ab]{a^a b^b} = \sqrt[4]{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}^3\right)^{2\sqrt{2}}}$

Dando la forma del 1^er^ miembro al 2^do^ miembro, se tendría : $\sqrt[ab]{a^a b^b} = \sqrt[\sqrt{16}]{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\ \sqrt{8}^{\sqrt{8}}}$

Finalmente descomponemos $\sqrt{16}$: $\sqrt[ab]{a^a b^b} = \sqrt[\sqrt{8}.\sqrt{2}]{\sqrt{8}^{\sqrt{8}}\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$

Por analogía se puede reconocer que : $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \wedge b = \sqrt{2}$

Por último calculamos lo solicitado : $E = \dfrac{a+b}{a-b}$ $\therefore$ **E = 3** **RPTA. C**

34.- Si se verifica : $\sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3\sqrt{x^4 ....\text{"}n\text{" radicales...}}}}} = x^{\frac{2^{26}-1}{2^{25}}}$; entonces el valor de "n" es:

A) 25 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

Resolución.-

Encontremos el equivalente del 1^er^ miembro de la igualdad aplicando el método inductivo.

1 radical : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^{\frac{2^2-(2+1)}{2}}$

ANALIZAR

2 radicales : $\sqrt{x\sqrt{x^2}} = x^{\frac{4}{4}} \Rightarrow x^{\frac{2^3-(2+2)}{2^2}}$

3 radicales : $\sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3}}} = x^{\frac{11}{8}} \Rightarrow x^{\frac{2^4-(2+3)}{2^3}}$

Observar que para los "n" radicales el equivalente será : $x^{\frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n}}$

Por condición se establecerá que : $x^{\frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n}} = x^{\frac{2^{26}-1}{2^{25}}}$

Establecida esta analogía, concluímos que : $\frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n} = \frac{2^{26}-1}{2^{25}}$

Para dar la forma del 1^er^ miembro al 2^do^, será necesario multiplicar a su numerador y denominador por : 2^5 $\quad \frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n} = \left[\frac{2^{26}-1}{2^{25}}\right]\left[\frac{2^5}{2^5}\right]$

Luego de efectuar operaciones, se obtiene : $\frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n} = \frac{2^{31}-32}{2^{30}}$

Descomponiendo convenientemente el 2^do^ miembro : $\frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n} = \frac{2^{30+1}-(2+30)}{2^{30}}$

Y por una simple comparación deducimos que : $\mathbf{n = 30}$ **RPTA. D**

35.- Si : $9^x - 4^x = 6^x$; indicar un valor de : $t = \sqrt[x+1]{3^x(\sqrt{5}-1)}$

A) 4 ***B) 8*** ***C) 6*** ***D) 2*** ***E) F.D***

Resolución.-

De la condición tenemos : $(3^2)^x - (2^2)^x = (2.3)^x$

Efectuando la operaciones indicadas : $3^{2x} - 2^{2x} = 2^x3^x$

Dividiendo a ambos miembros por : $2^x . 3^x$: $\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ ..... (*)

Hagamos : $\left(\frac{3}{2}\right)^x = m$, donde es fácil reconocer que : $m > 0$.

Reemplazando en (*), se tendrá : $m - \frac{1}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - m - 1 = 0$

Completando cuadrados se tendría : $\overbrace{m^2 - 2(m)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

Reemplazando los indicado por un T.C.P. : $\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \left(m-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Extrayendo signo radical de indice dos : $m-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow m=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Racionalizando : $m=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{2(\sqrt{5}-1)} \Rightarrow m=\frac{(\sqrt{5})^2-(1)^2}{2(\sqrt{5}-1)}$

Efectuando operaciones , encontramos : $m=\frac{4}{2(\sqrt{5}-1)} \Rightarrow m=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ ....(1)

Pero debemos recordar que : $m=\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3^x}{2^x}$ ....(2)

A continuación igualamos (1) y (2) : $\frac{3^x}{2^x}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

Efectuando el producto en aspa : $3^x(\sqrt{5}-1)=2^{x+1}$

Extrayendo signo radical de indice "$x+1$" : $\sqrt[x+1]{3^x(\sqrt{5}-1)}=\sqrt[x+1]{2^{x+1}}$ ....(*)

Recordando que la condición del problema es : $t=\sqrt[x+1]{3^x(\sqrt{5}-1)}$

Finalmente en (*) se tendrá que : $t=\sqrt[x+1]{2^{x+1}}$ $\therefore$ $\boldsymbol{t=2}$ **RPTA. D**

36.- Si se verifica : $3x=\left(3\sqrt{x}+1\right)^{x^{3\sqrt{x}-3x+1}}$ ***¿Qué podemos afirmar del equivalente de :*** $3x+(3x)^{-1}$ ***?***

A) es par ***B) es impar*** ***C) es irracional***

D) es una fracción ***E) N.A.***

Resolución.-

En la igualdad dada : $3x=\left(3\sqrt{x}+1\right)^{x^{3\sqrt{x}-3x+1}}$

Elevamos a ambos miembros al exponente x^{3x} : $(3x)^{x^{3x}}=\left[\left(3\sqrt{x}+1\right)^{x^{3\sqrt{x}-3x+1}}\right]^{x^{3x}}$

Efectuando en los exponentes del 2do miembro : $(3x)^{x^{(3x)}}=(3\sqrt{x}+1)^{x^{(3\sqrt{x}+1)}}$

Por analogía las bases deben ser iguales : $3x=3\sqrt{x}+1$

Transponiendo términos, tendremos : $3x-1=3\sqrt{x}$

Luego elevamos ambos miembros al exponente 2 : $(3x-1)^2=\left(3\sqrt{x}\right)^2$

Efectuando operaciones , obtenemos : $9x^2-6x+1=9x$

Simplificando convenientemente, se obtiene : $9x^2 + 1 = 15x$

Dividiendo a ambos miembros por $3x$: $\dfrac{9x^2+1}{3x} = \dfrac{15\cancel{x}}{3\cancel{x}}$

Reduciendo, obtenemos lo solicitado : $\mathbf{3x + (3x)^{-1} = 5}$ **RPTA. B**

37.- Encontrar el valor de x que satisface laecuación : $x^{1+x^{1+x^{1+x}}} = \sqrt{\dfrac{x^5}{\sqrt{\dfrac{x^5}{\sqrt{\dfrac{x^5}{\vdots}}}}}}$

A) $\dfrac{8}{27}$ *B)* $\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}}$ *C)* $\sqrt[5]{\dfrac{27}{8}}$

D) $\dfrac{2}{3}$ *E)* $\sqrt[5]{\dfrac{8}{27}}$

Resolución.-

De la ecuación dada ,.haremos el siguiente cambio : $x^{\overbrace{1+x^{1+x^{1+x^{1+x}}}}} = \text{A}$

Dada la naturaleza infinita de los exponentes , sustituimos lo indicado por A : $x^{1+\text{A}} = \text{A}$

Luego elevando a ambos miembros de la igualdad al exponente: $\dfrac{1}{1+\text{A}}$; tendremos : $x = \text{A}^{\frac{1}{1+\text{A}}}$ .... (α)

Trabajando ahora con el 2do miemdo de la igualdad dada, se tendrá que : $\sqrt{\dfrac{x^5}{\left.\sqrt{\dfrac{x^5}{\sqrt{\dfrac{x^5}{\vdots}}}}\right\}}} = \text{A}$

Aprovechando la naturaleza infinita de los radicales, sustituimos los indicado por A : $\sqrt{\dfrac{x^5}{\text{A}}} = \text{A}$

Elevando al exponente 2, y despejando, obtendremos : $x = \text{A}^{\frac{3}{5}}$ ..... (θ)

Igualando (α) y (θ), logramos establecer que : $\text{A}^{\frac{1}{1+\text{A}}} = \text{A}^{\frac{3}{5}}$

Por analogía los exponentes deben ser iguales, luego : $\dfrac{1}{1+\text{A}} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \text{A} = \dfrac{2}{3}$

Finalmente en "θ" : $x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$ $\therefore$ $\boldsymbol{x = \sqrt[5]{\dfrac{8}{27}}}$ **RPTA. E**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Señale verdadero (V) ó falso (F)

I. Si $(-2)^x = -8$, entonces $x = 3$

II. Si $x^5 = 3^5$, entonces $x = 3$

III. Si $x^2 = 4^2$, entonces $x = 4$

A) VVV B) FFV C) VVF

D) VFV E) FVF

2.- Si $x^x = 5x$; el valor de x^{x+1} es :

A) 0.1 B) 0.2 C) 5 D) 0,5 E) 3

3.- Si : $3^{4^x} = 3$; el valor de $\left(3^4\right)^x$ es :

A) 3 B) 1/3 C) 1 D) 9 E) 81

4.- La ecuación exponencial : $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

A) No tiene solución

B) Tiene una solución positiva

C) Tiene varias soluciones

D) Tiene como conjunto solución : $\{0\}$

E) N.A.

5.- Señale Verdadero o Falso :

I. $3^x = 81$ es una ecuación exponencial

II. $x^x = \sqrt{2}$ es ecuación transcendente

III. $x^2 = 5 + x$ es ecuación exponencial

A) VFF B) FVF C) FFV

D) VVV E) VVF

6.- $a^b = b^a$ se cumple

I. cuando $a = 2$; $b = 4$

II. cuando $a = -2$; $b = -4$

III. cuando $a = 1/2$; $b = 1/4$

Son verdaderas :

A) Sólo I B) I y II C) Sólo II

D) I, II y III E) Ninguna.

7.- En $4^{2x} = 64$; el valor de x es :

A) entero positivo B) entero negativo

C) racional positivo D) racional negativo

E) irracional

8.- Si $10^{2x+1} = 0{,}001$; el valor de 10^x será :

A) 0,1 B) 0.01 C) 10

D) 1 E) N.A.

9.- El valor de x en : $2^{2+x} + 2^{2-x} = 17$, es :

A) 1 B) -1 C) 2 D) 3 E) 4

10.- Resolver : $2^{3^{2^x}} = 512$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

11.- El valor real de x tal que 64^{x-1} dividido por 4^{x-1} es igual a 256^{2x} es :

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

NIVEL B

12.- Si $3^{2x}+9=10\left(3^{x}\right)$, entonces el valor de x^2+1 es :

A) 1 solamente B) 5 solamente C) 1, ó, 5

D) 2 E) 10

13.- Resolver : $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{x}=\frac{27}{64}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14.- Resolver : $\frac{\sqrt[x]{x}}{x}=\frac{1}{9}$

A) 9 B) 3 C) $\frac{1}{3}$ D) 6 E) $\sqrt{3}$

15.- Hallar el valor de x en : $9^{2^{x}}=3^{8^{x}}$

A) 3 B) 1 C) 6 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

16.- Hallar x en : $4^{x+1}+4^{x-1}=34$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 4 D) 0 E) 1

17.- Si : $4^{x+1}+2^{2x-1}=288$, entonces el valor de $(2x)^{x/2}$ es :

A) $6\sqrt{6}$ B) 64 C) 36 D) $4\sqrt{2}$ E) 12

18.- El valor real de x que resuelve la ecuación: $x^{x^{3}}=3$ $\sqrt[3]{3}$

A) está entre 0 y 1 B) está entre 1 y 2

C) está entre 2 y 3 D) es negativo

E) N.A.

19.- Resolver : $x^{\left(\sqrt{2}x\right)^{-1}}=\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{2}}$

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) N.A.

20.- Resolver el sistema : $2^{x}\cdot3^{y}=12$

$2^{y}\cdot3^{x}=18$

y dar el valor de : x^2+y^3

A) 5 B) 17 C) 31 D) 9 E) 10

21.- La suma de los valores reales de x que resuelven la ecuación :

$$x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^{x}}\text{ , es :}$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

22.- Resolver : $2^{6x+3}\cdot4^{3x+6}=8^{4x+5}$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 0

D) -2 E) x puede ser cualquier # real

23.- Calcular el valor de x en :

$$\sqrt[x]{\frac{x^{x}+16^{x}}{64^{x}+x^{x}}}=\frac{1}{2}$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

24.- Hallar x en : $x^{x^{16}}=\sqrt[8]{2}$

A) $\sqrt[4]{2}$ B) $\sqrt[8]{2}$ C) $\sqrt[16]{2}$

D) $\sqrt{32}$ E) $\sqrt{8}$

25.- Hallar x en :

$$5^{2}\cdot5^{4}\cdot5^{6}\ldots\ldots5^{2x}=(0.04)^{-28}$$

A) 16 B) 15 C) 13 D) 9 E) 7

$0{,}04=5^{-2}$

NIVEL C

26.- Resolver :

$$2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + \ldots\ldots + 2^{x+10} = 4092$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

27.- El lado izquierdo de la ecuación :

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\ldots\ldots\sqrt[3]{x^2}}}} = x^k$$

contiene "n" radicales. Además $k = \frac{80}{3^n}$ y $x = \frac{n}{2}$

Calcular $n + x$.

A) 3 B) 4 C) 6

D) 7 E) 8

28.- Al resolver el sistema : x + y = 3

$$2^x + 2.3^{x+y} = 56$$

x = 1

$$3.2^x + 3^{x+y+1} = 87$$

y = 2

El valor de $2x - y$ que resulta es :

A) - 1 B) 0 C) 1

D) 2 E) N.A.

29.- ¿Cuánto vale "m" si : $A^p = B^m$; $A^q = B^n$; $p + q = 2$; $m - n = 2$?

A) $\frac{p}{p-1}$ B) $\frac{q-2}{1-q}$ C) $\frac{p-2}{1-p}$

D) $\frac{2-q}{1-q}$ E) $\frac{1-p}{p-2}$

30.- Resolver el sistema :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}-1} \quad ; \quad \sqrt[3]{x} = \sqrt{y}$$

Dar el valor de $8x + 4y$.

A) 32 B) 36 C) 45 D) 60 E) 40

31.- Resolver la ecuación trascendente :

$$\sqrt[x]{\frac{2}{x+1}} = (x+1)^{x+2}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}+1$

D) $\sqrt{2}-1$ E) $2\sqrt{2}-1$

32.- Resolver :

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\left(\frac{1}{x}\right)^{-\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}} = 7\,\sqrt[\sqrt[x]{x^{-2}}]{x}$$

A) $\sqrt[3]{4}$ B) $\sqrt[4]{3}$ C) $\sqrt[3]{8}$

D) $\sqrt{2}$ E) 2

33.- Resolver :

$$x^{2+x^{2+x^{2+\cdots}}} = \sqrt[3]{x^8\sqrt[3]{x^8\sqrt[3]{x^8\ldots\ldots}}}$$

A) $\sqrt[5]{4}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{8}$

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt[4]{2}$

34.- Resolver :

$$(x+2).x^{x^2} = 4x^{4(3-x)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

35.- La suma de valores reales de x que resuelven la ecuación :

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

es :

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

36.- Halle "x" en :

$$\left(\frac{25}{49}\right)^{x} \cdot \left(\frac{343}{125}\right)^{x-1} = \frac{7}{5}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 4 E) 1/4

37.- Resolver :

$$\left(\frac{1}{x^{3}}\right)^{\left(\frac{1}{x^{4}}\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt[3x]{x}}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad ; \; x > 1$$

A) $\frac{4}{3}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 5 E) 3

38.- Halle la suma de todos los valores de "n" que verifican

$$\frac{\sqrt[n-1]{b^{n-2}}}{\sqrt[n-2]{b^{2n-5}}} = \frac{\sqrt[n+3]{b^{n+1}}}{\sqrt[n+1]{b^{2n}}}$$

A) 5 B) $\frac{1}{5}$ C) 25

D) $\frac{1}{125}$ E) 125

39.- La diferencia de los valores permisibles para "x" en :

$$3\left(3^{x}+1\right) = 10\sqrt{3}^{\,x} \text{ , es :}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

40.- Halle "n" de :

$$\sqrt{x \div \sqrt{x \div \sqrt{x \div \ldots \text{"}n\text{" radicales}}}} <> \sqrt[32]{x^{11}}$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 6

41.- Calcular "x" de : $3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-2}}$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

42.- Calcular "x" en :

$$(0{,}1)^{x}\,(0{,}2)\,(0{,}3)^{x+1}\,(0.5)^{x+2} = (0.015)^{15}$$

A) 10 B) 13 C) 5 D) 14 E) 15

43.- Si : $x^{x} = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

calcular : $x^{2} + 2^{x}$

A) $2+2^{\sqrt{2}}$ B) 17 C) 32

D) 8 E) 16

44.- ¿Qué valor asume : $x - 6$ a partir de :

$$x - 4 = \sqrt[(\sqrt{x}-2)^{2}]{4} + 4\,\sqrt[(\sqrt{x}-2)^{2}]{2} \quad ?$$

A) 2 B) $4\sqrt{2}$ C) $6+2\sqrt{2}$

D) $1+\sqrt{2}$ E) N.A.

45.- Si : $\sqrt[x^{\sqrt{\frac{1}{2}}}]{x} = \frac{1}{2}$;

calcular el valor de :

$$\sqrt{\sqrt[\sqrt{x}-1]{x^{\sqrt{2x}}} \div \sqrt[\sqrt{x}-1]{x^{\sqrt{2x}}} \div \sqrt[\sqrt{x}-1]{x^{\sqrt{2x}}} \div \ldots\ldots}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{16}$ D) 2 E) 1

46.- La igualdad : $a^{x} = a^{y}$, se verifica cuando :

(I) $x = y$; $\forall\, a \in \mathbb{R}$

(II) $a = 0$; $\forall\, x ; y \in \mathbb{Q}^{*}$

(III) $a = 1$; $\forall\, x ; y \in \mathbb{Z}$

(IV) $a = -1$; $\forall\, x ; y \in \mathbb{N}$ pares

Señale la proposición incorrecta

A) I B) II C) III D) IV E) Ninguna

3 Expresiones Algebraicas

Entendemos que Algebra es la parte de la Matemática que estudia a la cantidad en su forma más general posible, empleando *constantes* y *variables* y las operaciones que con ellas se realizan en los conjuntos numéricos.

3.1) EXPRESION ALGEBRAICA

Es una combinación de constantes y variables en *cantidades finitas* donde solo intervienen las seis operaciones fundamentales : suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, sin variables en los exponentes.

Ejms: $-8x^3y^2z$; $x^2 - x + 1$; $\sqrt{2x} - \dfrac{4y}{z}$

Nota.- Cualquier expresión que no cumpla con los requisitos mencionados se denomina expresión no algebraica o *trascendente*.

Ejms: $2^x + 5^{\sqrt{3}} + \log x^2$; $1 + x + x^2 + x^3 + ...$;

3.2) TERMINO ALGEBRAICO

Es la mínima expresión algebraica en la que sus elementos se encuentran ligados por las diferentes operaciones aritméticas, excepto la adición y sustracción. Sus partes se indican en el siguiente esquema :

exponentes

$$\text{signo} \rightarrow \underbrace{-\ 6}_{\text{coeficiente}}\ \underbrace{x^{3}\ y^{2}}_{\text{parte literal (variables)}}$$

3.3) TERMINOS SEMEJANTES

Son aquellos que tienen la misma parte literal. Dos o más términos se pueden sumar o restar sólo si son semejantes, para lo cual se suman o restan los coeficientes y se escribe la misma parte literal.

Ejm: $7x\,y^2$; $-x\,y^2$; $\sqrt{2}\,xy^2$ son semejantes y se pueden reducir a :

$$(7 - 1 + \sqrt{2})\,x\,y^2 = (6 + \sqrt{2})\,x\,y^2$$

3.4) CLASIFICACION DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Las expresiones algebraicas se pueden clasificar según la naturaleza de sus exponentes ó por el número de sus términos.

Según la naturaleza del exponente

- Racional
  - entera
  - fraccionaria
- Irracional

Según el número de términos

- Monomios → 1 término
- Polinomios
  - Binomios → 2 términos
  - Trinomios → 3 términos
  - Cuatrinomios → 4 términos

3.5) EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Son aquellas expresiones cuyas variables no están afectadas de radicales o exponentes fraccionarios .Estas expresiones se sub-clasifican en :

a) Racionales enteras.- Son aquellas expresiones en los que al transponer todas las variables al numerador, sus exponentes resultan ser enteros no negativos.

Ejm: $2x^2y \;;\; \dfrac{x+1}{3} \;;\; \sqrt{2}\,x + y^2$

b) Racionales fraccionarias.- Son expresiones en donde por lo menos una de sus variables aparece en el denominador, o si están en el numerador, alguna de ellas aparece con exponente entero negativo.

Ejm: $\dfrac{2}{x^3} \;;\; 3xy + \dfrac{1}{x} \;;\; \dfrac{2x+1}{x-1}$

3.6) EXPRESIONES ALGEBRAICAS IRRACIONALES

Estas expresiones se caracterizan por que sus variables están afectadas de radicales o exponentes fraccionarios.

Ejm: $5\sqrt{x} - 3 \;;\; \sqrt{6xy^4} \;;\; 5x^{\frac{1}{2}}y + \sqrt[3]{x^2y}$

3.7) GRADO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se denomina *grado* a la característica relacionada con los exponentes de las variables de una expresión algebraica. Se distinguen dos tipos de grados : El Absoluto y el Relativo, empleándose para ello las siguientes notaciones :

G.R. = Grado Relativo y G.A. = Grado Absoluto

3.7A GRADO RELATIVO

Cuando nos referimos al *grado relativo*, éste debe asociarse a una sola variable y a un término de la expresión o a toda la expresión.

a) G.R. en un término.- Es el exponente de la variable seleccionada.

b) G.R. en una expresión.- Es el mayor exponente que afecta la variable seleccionada en toda la expresión.

3.7B GRADO ABSOLUTO

Cuando nos referimos al *grado absoluto*, éste depende de todas las variables y puede asignarse a un término o a toda la expresión .

a) G.A. en un término.- Es la suma de los exponentes que afectan a todas las variables.

b) G.A. en una expresión.- Es el grado absoluto o simplemente grado del término de mayor grado en la expresión.

Ejemplo.- En el término : $\sqrt{2}\ x^3\ y^{1/2}\ z$

El grado relativo a x es : G.R. $(x) = 3$

El grado relativo a y es : G.R. $(y) = 1/2$

El grado relativo a z es ; G.R. $(z) = 1$

El grado absoluto es : G.A. $= 3 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{2}$

Ejemplo.- En la expresión : $3x^2y + 5x^5y^3 + 2$

G.R. $(x) = 5$; G.R. $(y) = 3$

El término de mayor grado es el segundo : G.A. $= 5 + 3 = 8$, luego el grado de la expresión es 8.

NOTA.- *El grado de una constante numérica no nula es cero.*

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Después de reducir : $\sqrt[-x]{x}\ .\ \sqrt[x^{-1}]{x^{x^{-2}}}\ \sqrt[x]{x^{2x}}$ ***, el resultado se puede clasificar como :***

A) Expresión algebraica racional entera

B) Expresión algebraica racional fraccionaria

C) Expresión algebraica irracional

D) Expresión exponencial

E) Expresión cúbica

Resolución.-

Por teoremas de exponentes, la expresión se reduce a :

$$E = x^{1+(-x)} \cdot x^{x^{-2} \div x^{-1}} \cdot x^{2x \div x}$$

$$E = x^{-x^{-1}} \cdot x^{x^{-1}} \cdot x^{2}$$

$$E = x^{0} \cdot x^{2} = x^{2}$$

Luego la expresión es racional entera por tener exponente entero y positivo. **RPTA. A**

2.- Luego de reducir : $\dfrac{x^x + 1}{x^{x+1} + x} - 1$ ***, la expresión que resulta es :***

A) Racional entera ***B) Racional fraccionaria*** ***C) Irracional***

D) Exponencial ***E) Trascendente***

Resolución.-

Reduciendo : $\dfrac{x^x + 1}{x^x \cdot x + x} - 1 = \dfrac{x^x + 1}{x\left(x^x + 1\right)} - 1 = \dfrac{1}{x} - 1$

Vemos que resulta una expresión racional fraccionaria porque la variable en el denominador tiene exponente entero positivo.

RPTA. B

3.- Si el monomio : $\dfrac{x\sqrt{x^{m-2}}}{\sqrt[3]{x^{m+2}}}$ ***, es de tercer grado, entonces el valor de m es :***

A) 12 ***B) 15*** ***C) 22*** ***D) 20*** ***E) 25*** ***UNALM 90***

Resolución.-

Haciendo uso de las definiciones de radicales tendremos : $F(x) = \dfrac{x^1 \cdot x^{\frac{m-2}{2}}}{x^{\frac{m+2}{3}}}$

Empleando los teoremas I y III de exponentes : $F(x) = x^{1+\frac{m-2}{2}-\frac{m+2}{3}}$

Por condición, el monomio es de tercer grado, es decir el exponente de x es 3, entonces se puede establecer que : $1 + \dfrac{m-2}{2} - \dfrac{m+2}{3} = 3$

Resolviendo se tendrá : $\dfrac{3m-6-2m-4}{6} = 2 \Rightarrow m = 22$ **RPTA. C**

4.- ¿Cuántas letras se deben tomar para que el grado absoluto del monomio :

$$A^2\ B^6\ C^{12}\ D^{20} ......,\ \text{sea } 1\ 120$$

A) 18 *B) 12* *C) 13* *D) 11* *E) 14*

Resolución.-

Grado del monomio = 2 + 6 + 12 + 20 + ... = 1 120

$$G = \left(1^2+1\right) + \left(2^2+2\right) + \left(3^2+3\right) + \left(4^3+4\right) + ...n \text{ términos}$$

$$G = (1 + 2 + 3 + ... + n) + \left(1^2+2^2+3^2+......+n^2\right)$$

Cada suma, por fórmulas ya conocidas, se reduce a una expresión equivalente : $G = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1\ 120$

Transformando : $\dfrac{n(n+1)}{2}\left[1+\dfrac{2n+1}{3}\right] = 1120$

Efectuando operaciones : $\dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3} = 7\,.\,160 = 14\,.\,5\,.\,16$

Despejando el numerador : $n\,(n+1)\,(n+2) = 14\,.\,15\,.\,16$

Por comparación, deducimos que : $n = 14$ **RPTA. E**

5.- Hallar el coeficiente de : $M\,(x\,;\,y) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n .\ 9^m\ .\ x^{3m+2n}\ y^{5m-n}$

cuyo grado absoluto es 20 y el grado relativo a x es 14

A) $\dfrac{81^2}{8}$ *B)* $\dfrac{16}{81}$ *C)* $\dfrac{8}{9}$ *D)* $\dfrac{9}{16}$ *E)* $\dfrac{81}{16}$

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en calcular los valores de los exponentes n y m de las cantidades numéricas que posee el monomio, ello nos permitirá identificar con facilidad al coeficiente de la expresión dada. Veamos :

Por condición del problema, se sabe que el G.A.(M) =20 , luego : $3m + 2n + 5m - n = 20$

Reduciendo términos semejantes, tendremos : $8m + n = 20$ ...(1)

Asimismo se sabe que el G.R. $(x) = 14$, luego : $3m + 2n = 14$ ...(2)

Resolviendo el sistema de ecuaciones, encontramos que : $m = 2\ ;\ n = 4$

Finalmente el coeficiente es : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 .\ 9^2 = \dfrac{81}{16}$ **RPTA. E**

3.8) POLINOMIOS

Definición.- Polinomio es una expresión algebraica racional entera que consta de dos o más términos (*monomios*) en cantidad finita. Cuando los coeficientes son *reales*, se dice que es un polinomio en $\Re$.

Monomio.- Es la expresión algebraica racional entera de un solo término.

Binomio .- Es el polinomio de dos términos.

Trinomio .- Es el polinomio de tres términos.

Notación Polinómica.- Si un polinomio tiene una sola variable "x" su notación será :

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$; n : grado del polinomio.

a_0 : coeficiente principal no nulo.

a_n : término independiente ;

Los polinomios con dos o más variables se denotan por :

P (x, y) : Polinomio con variables x, y

P (x, y, z) : Polinomio con variables x, y, z.

Aunque cada polinomio se denota como identidad, siendo su símbolo la notación $\equiv$, se empleará en lo sucesivo el símbolo de igualdad (=).

3.9) VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Es el valor que adquiere el polinomio cuando se le asigna determinados valores a sus variables.

Ejms :

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$P(1) = 1^2 - 3(1) + 2 = 0$$

$$P(2) = 2^2 - 3(2) + 2 = 0$$

$$P(-2) = (-2)^2 - 3(-2) + 2 = 12$$

Propiedades :

Σ coeficientes de $P(x) = P(1)$

Término independiente de $P(x) = P(0)$

3.10) REPRESENTACION GENERAL DE POLINOMIOS DE ACUERDO AL GRADO

Ojo :

Considerando la variable "x" y las constantes $a, b, c \wedge d$, tal que $a \neq 0$ tenemos :

- Polinomio de grado cero : a

- Polinomio de grado uno o de 1er grado : $ax + b$

- Polinomio de grado dos o de 2do grado : $a x^2 + bx + c$

- Polinomio de grado tres o de 3er grado : $a x^3 + b x^2 + cx + d$

3.11) GRADOS EN OPERACIONES CON POLINOMIOS

Sean los polinomios $P(x)$ de grado m , y , $Q(x)$ de grado n , con $m > n$:

- **Suma** : $P(x) + Q(x)$ es de grado : m
- **Resta** : $P(x) - Q(x)$ es de grado : m
- **Producto** : $P(x) \cdot Q(x)$ es de grado : $m + n$
- **Cociente** : $P(x) \div Q(x)$ es de grado : $m - n$
- **Potencia** : $\left[P(x)\right]^k = P^k(x)$ es de grado : $m \cdot k$
- **Raíz** : $\sqrt[k]{P(x)}$, es de grado : $\dfrac{m}{k}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

6.- Señalar las proposiciones falsas :

I) Si sumamos un polinomio de grado 4 con uno de grado 6, entonces el grado del polinomio resultante es 6.

II) Si restamos dos polinomios del mismo grado, el resultado siempre será de un grado menor.

III) Si el grado de P(x) es mayor que el grado de Q(x), el que tiene más términos es P(x).

A) I y II ***B) II solamente*** ***C) I solamente***

D) II y III ***E) Ninguna***

Resolución.-

I) Verdadera. El grado de la suma es el del polinomio de mayor grado.

II) Falsa, puede quedar inalterado el grado.

III) Falsa, por ejm : $P(x) = x^5 + 1$ es de mayor grado que

$Q(x) = x^2 + x + 1$, pero $Q(x)$ tiene más términos. **RPTA. D**

7.- Calcular la suma de coeficientes de : $P(x) = (x-1)^{20} + (x-2)^7 + x^3 + 5$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Resolución.-

Por las propiedades vistas en el item 3.9 ,sabemos que P (1) es equivalente a la suma de los coeficientes, entonces :

$$P(1) = (1-1)^{20} + (1-2)^7 + (1)^3 + 5$$

$$P(1) = 0 + (-1) + 1 + 5$$

$$\mathbf{P(1) = 5}$$ **RPTA. B**

8.- Si : $P(x) = (x+2)^5 + (x-3)^3 - (x+2)(x-3)$, el término independiente de $P(x)$ es :

A) 15 B) 13 C) 11 D) 10 E) 9

Resolución.-

Recordando la 2da propiedad vista en el item 3.9 ,sabemos que P(0) equivale al término independiente de $P(x)$, entonces :

$$P(0) = (0+2)^5 + (0-3)^3 - (0+2)(0-3)$$

$$P(0) = 32 + (-27) - (-6)$$

$$\therefore \quad \mathbf{P(0) = 11}$$ **RPTA. C**

9.- En el polinomio : $P(x;y) = 2x^m y^{n-1} + 3x^{m+1} y^n + 7x^{m-2} y^{n+2} + 6x^{m+3} y^{n+1}$

El grado relativo a "x" es 12 y el grado absoluto es 18. Hallar el grado relativo a "y"

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Resolución.-

Con relación a x, se observa que su máximo exponente es : $m + 3$

Empleando la condición del problema tendremos : $m + 3 = 12$

Resolviendo se deduce que : $m = 9$ .....(*)

Observando el polinomio reconocemos que los grados absolutos de los términos son :

$$(m + n - 1) \;;\; (m + n + 1) \;;\; (m + n) \;;\; (m + n + 4)$$

De esta lista identificamos al mayor : $(m + n + 4)$

Luego por condición del problema se tendrá : $m + n + 4 = 18$ ......(**)

Sustituyendo lo obtenido en (*) : $n = 5$

Ahora, el grado relativo a y resulta ser : $n + 2 =$ **7** **RPTA. C**

10.- Hallar un polinomio de segundo grado cuyo coeficiente de x y término independiente son iguales. Si P (1) = 7 y P (2) = 18. Dar como respuesta el coeficiente de x^2

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución.-

Por tratarse de un polinomio de 2do grado, este tendrá la siguiente forma :

$$P(x) = ax^2 + bx + b$$

Emplendo las condiciones del problema, se tendrá : $P(1) = 7 \Rightarrow a + 2b = 7$

$P(2) = 18 \Rightarrow 4a + 3b = 18$

Luego de resolver el sistema ,se tiene : $a = 3 \;;\; b = 2$

Finalmente el polinomio es : $\mathbf{P(x) = 3x^2 + 2x + 2}$ **RPTA. C**

3.12) POLINOMIOS ESPECIALES

3.12A POLINOMIO HOMOGENEO

Es aquel cuyos términos están constituídos por más de una variable y presentan el mismo grado.

Ejemplo : $P(x, y) = 2xy^4 - 3x^3y^2 + y^5$ es homogéneo de 5to grado.

3.12B POLINOMIO ORDENADO

Cuando los exponentes de la variable que se toma como referencia, guardan un cierto orden, ya sea ascendente o descendente.

Ejemplo : $P(x, y) = x^5y - x^3y^2 + xy^3$, es ordenado en forma decreciente respecto a x , y en forma creciente respecto a y.

3.12C POLINOMIO ENTERO EN X

Es aquel que depende unicamente de la variable x, siendo sus coeficientes números enteros.

Ejemplo : $P(x) \equiv 3x^3 + 2x - 1$; es un polinomio entero en x de tercer grado.

3.12D POLINOMIO MONICO

Es aquel polinomio entero en x que se caracteriza por ser su coeficiente principal igual a la unidad.

Ejemplo : $P(x) \equiv x^2 + 7x + 4$; es un polinomio mónico se segundo grado (cuadrático).

3.12E POLINOMIO COMPLETO

Es el que contiene todos los exponentes de la variable que se toma como referencia, desde el mayor exponente hasta el exponente cero o términó independiente.

Ejemplo : $P(x) = -2x + 3x^2 + x^3 - 7$ es completo , de 3er grado y tiene cuatro términos, uno más que el grado.

3.12F POLINOMIOS IDENTICOS

Son aquellos cuyos términos semejantes poseen el mismo coeficiente.

Ejemplo : Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$ y $Q(x) = mx^3 + nx^2 + p$

son idénticos $(P(x) \equiv Q(x))$, se cumplirá que : $a = m$; $b = n$ y $c = p$

3.12G POLINOMIOS EQUIVALENTES

Son aquellos polinomios que teniendo formas difrentes aceptan igual valos numérico para un mismo sistema de valores asignados a sus variables.

Ejemplo : Dados los polinomios : $P(x ; y) \equiv (x+y)^2 - (x-y)^2 \wedge Q(x ; y) \equiv 4xy$

Si ambos admiten el mismo valor numérico para cualquier valor de "x" $\wedge$ "y", entonces serán equivalentes; veamos :

Hagamos : $x = 2 \wedge y = 1$; en : $P(x;y)$: $P(2;1) = (2+1)^2 - (2-1)^2 = 8$

Hagamos : $x = 2 \wedge y = 1$; en : $Q(x;y)$: $Q(2;1) = 4(2)(1) = 8$

Observar que : $P(2;1) = Q(2;1)$

En consecuencia $P(x;y) \wedge Q(x;y)$, son polinomios equivalentes y se les podrá representar asi :

$$\boxed{P(x;y) < > Q(x;y)}$$

3.12H POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO

Es aquel que tiene sus coeficientes todos nulos. Su valor es cero para cualquier valor de la variable.

Ejemplo : Si $P(x) = ax^3 + bx + c$, es idénticamente nulo, se cumplirá : $a = 0$; $b = 0$ y $c = 0$

Y se podrá representar así : $P(x) \equiv 0$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

11.- Dadas las proposiciones :

I) Todo polinomio completo es homogéneo

II) Un polinomio completo de quinto grado tiene cinco términos

III) Un polinomio completo de quince términos es de grado 14.

Son falsas :

A) I y III ***B) II y III*** ***C) Sólo I*** ***D) I y II*** ***E) Todas***

Resolución.-

I) Es falsa, porque por ejemplo : $x^2 + x + 1$ es completo, pero no es homogéneo.

II) Es falsa, porque si es de grado 5 y completo, debe tener $5 + 1 = 6$ términos.

III) Es verdadera porque cumple la regla : Si es de grado n, debe tener $n + 1$ términos.

RPTA. D

12.- Clasificar el polinomio :

$$P(x;y) = n - 3\,x^{n-4}y^{n-3} + (n-2)\,x^{n-3}y^{n-2} + (n-1)\,x^{n-2}y^{n-1} - n\,x^{n-1}y^{n}$$

Si : $n = 1024^{125^{-27^{-3^{-1}}}}$

A) Homogéneo ***B) Ordenado*** ***C) Completo en y***

D) Completo y ordenado ***E) Irracional***

Resolución.-

1ro Hallamos n : $n = 1024^{125^{-27^{-\frac{1}{3}}}} = 1024^{125^{-3^{-1}}}$

$$n = 1024^{125^{-\frac{1}{3}}} = 1024^{5^{-1}} \quad ......(1\,024 = 2^{10})$$

$$\therefore \quad n = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{5}} = 4$$

2do Reemplazamos : $P(x, y) = 4 - 3y + 2xy^2 + 3x^2y^3 - 4x^3y^4$

Respecto a x é y es completo y ordenado crecientemente. **RPTA. D**

13.- El grado del polinomio homogéneo : $R(x, y, z) = a\,x^3y^az^2 + b\,x^by^6z - c\,x\,y\,z^c$, es 10. Entonces, la suma de los coeficientes será :

A) 0 ***B) -1*** ***C) -3*** ***D) 5*** ***E) - 4***

Resolución.-

Por ser homogéneo cada término tiene el mismo grado absoluto (10), luego :

$$3 + a + 2 = 10$$

$$b + 6 + 1 = 10$$

$$1 + 1 + c = 10$$

Al resolver se obtiene : $a = 5$; $b = 3$; $c = 8$

De acuerdo con lo obtenido el polinomio es : $R(x, y, z) = 5\,x^3y^5{\cdot}z^2 + 3\;x^3y^6z - 8\,x\,y\,z^8$

De este modo la suma de coeficientes será : $5 + 3 - 8 =$ **0** **RPTA. A**

14.- Hallar el término independiente del polinomio : $P(x) = x^{n+2} + x^{m-1} + ...+ mx + (m + n)$ que es completo y ordenado, de grado 7.

A) 16 ***B) 12*** ***C) 10*** ***D) 8*** ***E) 6***

Resolución.-

Si es de grado 7, se deberá cumplir que : $n + 2 = 7 \Rightarrow n = 5$

Y por ser un polinomio completo y ordenado se cumplirá que : $m - 1 = 6 \Rightarrow m = 7$

Por último el término independiente será : $m + n =$ **12** **RPTA. B**

15.- Si el polinomio ordenado decreciente y completo : $P(x) = x^{2a+1} + 2x^{b+3} + 3x^{c+2} + ...$

posee 2c términos , hallar : $a + b + c$

A) 12 ***B) 13*** ***C) 14*** ***D) 15*** ***E) 16***

Resolución.-

Para empezar debemos recordar que el número de términos que posee un polinomio de grado n es $n+1$. Asimismo debemos tener en cuenta que por tratarse de un polinomio ordenado en forma decreciente, la variable x del primer término debe tener un exponente que coincidirá con el grado del polinomio.Veamos :

Según condición del problema : # TERM = G.A.(P) + 1

Por datos del problema, se tendrá : $2c = (2a + 1) + 1$

Reduciendo términos, obtenemos : $c = a + 1$ ......(1)

Empleando ahora el orden decreciente del polinomio, se tendrá que :

$$2a + 1 - 1 = b + 3 \quad ......(2)$$

$$b + 3 - 1 = c + 2 \quad ......(3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tendrá que : $a = 4$; $b = 5$; $c = 5$

Finalmente se establece que : $a + b + c =$ **14** **RPTA. C**

16.- Si el polinomio $P(x, y)$ es idénticamente nulo, hallar m^n

$$P(x, y) = (10 - m)x^2y + nxy^2 + 5x^2y - 2xy^2$$

A) 15 ***B) 30*** ***C) 125*** ***D) 225*** ***E) N.A.***

Resolución.-

A partir de la definición de polinomio idénticamente nulo, primero trataremos de reducir términos semejantes, a continuación igualaremos a cero cada uno de los coeficientes del polinomio. Veamos :

$$P(x, y) = (10 - m)x^2y + nxy^2 + 5x^2y - 2xy^2$$

$P(x, y) = (15 - m)x^2y + (n - 2)xy^2$

$15 - m = 0 \Rightarrow m = 15$

$n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$

Finalmente : $m^n = 15^2 =$ **225** **RPTA. D**

MISCELANEA

17.- Calcular el grado del polinomio entero y ordenado decrecientemente :

$$P(x) = x^{2m} + x^{m-3} + x^{4-m}$$

A) 6 B) 18 C) 20 D) 14 E) 8

Resolución.-

Dado que el polinomio es decreciente, tendremos :

$$m - 3 > 4 - m \qquad\qquad 4 - m \geq 0$$
$$2m > 7 \qquad \text{y} \qquad 4 \geq m$$
$$\therefore \quad m > 3{,}5 \qquad\qquad \therefore \quad m \leq 4$$

Como m es entero, concluimos por las desigualdades obtenidas que : $m = 4$

Entonces el polinomio dado será : $P(x) = x^8 + x + 1$

De esto último diremos que el grado de P (x) es : **8** **RPTA. E**

18.- En la expresión : $P(x) = x^2 + xy + xz + yz$

Si : $E = \sqrt{P(y) \,.\, P(z) \,.\, P(o)}$ ***, el valor de E es :***

A) 2yz B) 2yz (y + z) C) y + z D) xy E) N.A. UNFV 90

Resolución.-

$P(y) = y^2 + y^2 + yz + yz = 2y(y + z)$

$P(z) = z^2 + zy + z^2 + yz = 2z(y + z)$

$P(o) = yz$

Reemplazando en la expresión dada : $E = \sqrt{2y \,.\, (y+z) \,.\, 2z(y+z) \,.\, yz}$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $E = \sqrt{2^2 \,.\, y^2 \,.\, z^2\, (y+z)^2}$

Simplificamos exponentes y radicales : $\mathbf{E = 2yz\,(y + z)}$ **RPTA. B**

19.- Si : $(a^4 + 36)\, x + a^2 + a \equiv 6 + 13a^2\, x$

Se cumple para todo número real x , los valores reales de a son :

A) -2 y 3 B) 2 y -3 C) 2, -2, 3 y -3 D) 2 y 3 E) -2 y -3 UNI 80

Resolución.-

Si se cumple para todo número real x, hacemos $x = 0$: $\left(a^4 + 36\right).0 + a^2 + a = 6 + 13\,a^2.0$

Efectuando operaciones y transponiendo : $a^2 + a - 6 = 0$

Factorizando la ecuación, encontramos que : $(a + 3)\,(a - 2) = 0$

Resolviendo deducimos que : $a = -3$; $a = 2$ **RPTA. B**

20.- Si $P(x) = a\,x + b$, y , $P\,[P\,[P(x)\,]\,] = 8x + 154$; determinar : $P\,[\,P(3)\,]$

A) 27 *B) 33* *C) 78* *D) 81* *E) 96*

Resolución.-

1ro Determinando P [P(x)] : $P(x) = ax + b$ ...... (*)

$\Rightarrow$ $P\,[P(x)] = a\,(ax + b) + b = a^2x + ab + b$

2do Encontrando P [P [P(x)]] e igualando : $P\,[P[P(x)]] = a\,(\,a^2x + ab + b) + b \equiv 8x + 154$

Efectuando operaciones encontramos que : $a^3x + (\,a^2b + ab + b) \equiv 8x + 154$

En esta última identidad se deduce que : $a^3 = 8$, y , $a^2b + ab + b = 154$

De esta relación se deduce que : $a = 2$ $\Rightarrow$ $4b + 2b + b = 154$

Resolviendo esta última ecuación, se obtiene : $b = 22$

Reemplazando estos resultados en (*), se tiene : $P\,(x) = 2x + 22$ .... (**)

Haciendo $x = 3$ en (**), encontramos que : $P\,(3) = 2\,(3) + 22 = 28$

Haciendo $x = P(3)$ en (**), encontramos que : $P\,[P(3)] = P\,(28) = 2\,(28) + 22$

Efectuando concluímos que : $\mathbf{P\,[P(3)] = 78}$ **RPTA. C**

21.- Si la expresión : $(a + b^2)\,\sqrt[6]{x^{a-b}} - ab\,\sqrt[4]{x^{a+b}} + (b - a)\,x$; puede reducirse a monomio, este monomio es :

A) x *B) $2\,x^3$* *C) $a\,x^4$* *D) $-3\,x^2$* *E) $5x$*

Resolución.-

Según condición , los términos deben ser tales que : $\dfrac{a-b}{6} = \dfrac{a+b}{4} = 1$

A partir de esta relación se puede establecer dos ecuaciones : $a - b = 6$ y $a + b = 4$

Resolviendo estas ecuaciones, se cumple que : $a = 5$ y $b = -1$

Reemplazando a y b en la expresión dada : $\left(5+(-1)^2\right)\sqrt[6]{x^6}$ - (5) (-1) $\sqrt[4]{x^4}$ + (- 1 - 5) x

Efectuando operaciones esto se reduce a : $6x + 5x - 6x = \mathbf{5x}$ **RPTA. E**

22.- Si el polinomio : $P(x, y) = 3x^{m-2}y^{n-1}\cdot(x^7 + y^{2n-3})$, es homogéneo, con grado de homogeneidad 16, hallar m - n.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

<u>Resolución</u>.-

Desde que el polinomio dado es homogéneo, se deberá verificar que el grado de sus términos debe ser el mismo para todos ellos. Esto nos sugiere desarrollar el polinomio P (x, y), y a continuación identificar el grado de cada término, para finalmente igualar cada grado con 16. Veamos :

Efectuando operaciones en la relación dada : $P(x, y) = 3x^{m+5}y^{n-1} + 3x^{m-2}y^{3n-4}$

Identificando el grado del 1er término, se tendrá : $m + 5 + n - 1 = 16$

Transponiendo términos, se obtiene : $m + n = 12$ ....(1)

Identificando el grado del 2do término, se tendrá : $m - 2 + 3n - 4 = 16$

Transponiendo términos, se obtiene : $m + 3n = 22$ .... (2)

Resolviendo (1) y (2), se tiene por solución : $m = 7 \wedge n = 5$

Finalmente lo solicitado se obtiene asi : $m - n = \mathbf{2}$ **RPTA. B**

23.- Dados los polinomios P(x) y Q(x), se sabe que los polinomios : $P(x)\cdot Q^2(x)$ y $\dfrac{P^3(x)}{Q(x)}$, son de grado 17 y 2 respectivamente. Hallar el grado de $P(x)\cdot Q(x)$

A) 4 B) 6 C) 10 D) 15 E) N.A.

<u>Resolución</u>.-

Sean que p y q los grados de P(x) y Q(x) respectivamente; entonces al hacer uso de las reglas expuestas en el item 3.11, se puede establecer que :

$$\left.\begin{array}{l} p + 2q = 17 \\ 3p - q = 2 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tendrá : $p = 3 \wedge q = 7$

Finalmente el grado del producto P (x) . Q (x) es : $\mathbf{p + q = 10}$ **RPTA. C**

24.- Si el trinomio : $\sqrt[a]{x^{a+b}} + \sqrt[b]{x^{b+c}} + \sqrt[c]{x^{a+c}}$, es homogéneo, de grado 10.

De qué grado es el monomio : $\sqrt[a]{x^b}\cdot\sqrt[c]{x^a}\cdot\sqrt[b]{z^c}$?

A) 7 B) 13 C) 27 D) 33 E) 30

Resolución.-

Recordando la teoría vista en el item 3.9 sobre grado de una raíz. Por ello se cumplirá que : $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{b+c}{b} = \dfrac{a+c}{c} = 10$

Efectuando la división de los numeradores : $1+\dfrac{b}{a} = 1+\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{c}+1 = 10$

Eliminando 1 en cada miembro, tendremos : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{c} = 9$ ... (*)

Finalmente el monomio es de grado G, tal que : $G = \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b}$ ... (**)

Reemplazando (*) en (**), tendremos : **G = 27** **RPTA. C**

25.- Sean : $P(x, y) = 2^{b+c}\, x^{2b-1}\, y^{b-3}$ $\wedge$ $Q(x, y) = x^{c+2}\, y^{c+4}$. Si los grados absolutos de P(x, y) y Q(x, y) son 8 y 4 respectivamente; hallar el coeficiente de P (x, y).

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Resolución.-

El G.A. de P (x, y) es : $2b - 1 + b - 3 = 8 \Rightarrow 3b = 12 \Rightarrow b = 4$

El G.A. de Q (x, y) es : $c + 2 + c + 4 = 4 \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1$

Luego el coeficiente de P (x, y) es : $2^{b+c} = 2^{4-1} = 8$ **RPTA. D**

26.- Proporcionar la suma de coeficientes del siguiente trinomio :

$$P(x, y) \equiv (m-3)\,x^{9-m} + m x^{m-2}\, y^{\frac{m}{3}} + y^{17-2m}$$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) N.A.

Resolución.-

Sabiendo que se pide la suma de coeficientes, aplicaremos las propiedades del item 3.9, es to es : Σ Coef. $= P(1;1) = (m-3).1 + m.1.1 + 1$

Efectuando operaciones encontramos que : Σ Coef. $= 2m - 2$ ....(*)

De esta última relación reconocemos que es necesario encontrar el valor de "m".

Como P (x, y) es un trinomio, entonces es fácil predecir que : $m \neq 3 \wedge m \neq 0$. Además analizando los exponentes se debe cumplir que :

$$\left.\begin{array}{l} 9-m \geq 0 \Rightarrow m \leq 9 \\ m-2 \geq 0 \Rightarrow m \geq 2 \\ 17-2m \geq 0 \Rightarrow m \leq 8{,}5 \end{array}\right\}$$

Intersectando los intervalos :

$2 \leq m \leq 8{,}5$ .... (**)

Dado que $\frac{m}{3}$ debe ser un número natural, entonces concluímos que m es un múltiplo de tres.

De (**) : $m \begin{smallmatrix} \nearrow 3 \\ \searrow 6 \end{smallmatrix}$. Pero recordando que : $m \neq 3$, concluímos que $m = 6$

$\therefore$ **Σ COEF = 10** **RPTA. D**

27.- Si : $P(x) = a\,x^2 + b$; y : $P\,[P(x)] = 8\,x^4 + 24\,x^2 + c$

el valor de : $a + b + c$, es :

A) 28 B) 32 C) 30 D) 31 E) 26

Resolución.-

Evaluamos : $P\,[P\,(x)]$

$$P\,[P\,(x)] = P\left[ax^2 + b\right]$$

$$= a\left(ax^2 + b\right)^2 + b$$

$$= a^3 x^4 + 2a^2\,b\,x^2 + ab^2 + b$$

Este polinomio es idéntico a : $8x^4 + 24x^2 + c$ se concluye que :

$$a^3 = 8 \;\; ; \;\; 2a^2\,b = 24 \;\; ; \;\; ab^2 + b = c$$

Resolviendo, obtenemos : $a = 2$; $b = 3$; $c = 21$

Reemplazamos este valor en las expresiones correspondientes a los términos dados :

Entonces : $a + b + c =$ **26** **RPTA. E**

28.- Dados :

$$P(x) \equiv \left(3x^{n^{n^n}} - 7x^n + 3\right)^{n^{n^n}} \quad \wedge \quad Q(x) \equiv \left(3x^{n^{n^n}} - 7x + 1\right)^2 \quad \wedge \quad R(x) \equiv 11x + 5$$

Si : $°[\,P(x) \,.\, Q(x) \,.\, R(x)\,] = 289$; calcular el grado de : $M(x) \equiv \left(11x^{n^n} + 1\right)^2 \left(x^{2n} - x^n\right)$

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 16

Resolución.-

Debemos reconocer que al referimos únicamente al grado de un polinomio nos estamos refiriendo implicitamente al Grado Absoluto. Del mismo modo la notación $°[P\,(x)]$, está referida al Grado Absoluto de $P\,(x)$.

Ahora, de acuerdo con la teoría del item 3.11, se tendrá :

$$°[P(x)] = \left(n^{n^n}\right)\left(n^{n^n}\right) = \left(n^{n^n}\right)^2$$

$$°[Q(x)] = \left(n^{n^n}\right)(2) = 2\left(n^{n^n}\right)$$

$$°[R(x)] = 1$$

Teniendo en cuenta la condición del problema : $°[P(x)\,.\,Q(x)\,.\,R(x)] = 289$

Y por tratarse de un producto de polinomios, se tendrá que : $°[P(x)] + °[Q(x)] + °[R(x)] = 289$

Reemplazando : $\left(n^{n^n}\right)^2 + 2\left(n^{n^n}\right) + 1 = 289$

Reduciendo el 1^er^ miembro : $\left(n^{n^n}+1\right)^2 = 289 \Rightarrow n^{n^n} + 1 = 17$

Despejando, se obtiene : $n^{n^n} = 16 \Rightarrow n^{n^n} = 2^4 = 2^{2^2}$

Comparando los exponenetes se deduce que : $n = 2$

Finalmente diremos que : $°[M(x)] = 2\left(n^n\right) + 2n$

$\therefore$ $\boldsymbol{°[M(x)] = 12}$ **RPTA. D**

29.- Calcular "m + n" si el polinomio :

$$P(x, y) \equiv 3x^{2m+n-4}\,y^{m+n+2} + 5x^{2m+n-3}\,y^{m+n+1} - 7x^{2m+n-2}\,y^{m+n}$$

es de grado 10 y la diferencia entre los grados relativos a "x" e "y" es 4.

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Recordemos que el $°[P(x, y)]$ viene dado por la mayor suma de exponentes de las variables de uno de sus términos. Pues bien, si observamos los exponentes de la parte literal de cada uno de los términos, concluiremos que el polinomio es homogéneo y cuyo grado viene dado por :

$$°[P(x, y)] = 3m + 2n - 2 \quad ....(*)$$

Por condición : $3m + 2n - 2 = 10 \Rightarrow 3m + 2n = 12$ .... (**)

También se reconoce que : $GR(x) = 2m + n - 2$

$GR(y) = m + n + 2$

Donde por condición : $GR(x) - GR(y) = 4 \Rightarrow m = 8$

Reemplazando en (**) : $3(8) + 2n = 12 \Rightarrow n = -6$

Finalmente encontramos que : $m + n = 2$ **RPTA. B**

30.- Proporcionar el valor de : $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$,

si se cumple que : $50x^3 + 5x^2 - 8x + 1 \equiv \alpha_1 (\alpha_3 x + 1)^{\alpha_1} . (\alpha_2 x - \alpha_1)^{\alpha_3}$

A) 2 *B) 4* *C) 6* *D) 8* *E) 10*

Resolución.-

Al efectuarse las potencias y los productos indicados, es previsible que el exponente de x en el segundo miembro sea ($\alpha_1 + \alpha_3$). Es interesante saber que esto se obtiene haciendo que en cada paréntesis solo quede la variable x.

Luego, de la identidad se deduce que : $\alpha_1 + \alpha_3 = 3 \ / \ \{\alpha_1 ; \alpha_2\} \subset N$

Haciendo $x = 0$, obtenemos el término independiente en el 2do miembro y por la identidad se establece que : $1 = \alpha_1 (1)^{\alpha_1} . (-\alpha_1)^{\alpha_3}$

Efectuando y reduciendo, encontramos que : $1 = \alpha_1 (-\alpha_1)^{\alpha_3}$ .....(1)

Como α_1 y α_3 son naturales, reconocemos que los únicos valores que satisfacen (1) son : $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_3 = 2$ .....(2)

Es fácil reconocer el coeficiente principal en la identidad pues esto se consigue así : $50 = \alpha_1 (\alpha_3)^{\alpha_1} (\alpha_2)^{\alpha_3}$ ....(3)

Reemplazando (2) en (3), tendremos : $50 = (1)\ (2)^1 (\alpha_2)^2$

Luego de efectuar y extraer raíz cuadrada : $50 = 2(\alpha_2)^2 \Rightarrow \alpha_2 = 5$

Finalmente concluímos que : $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 4$ **RPTA. B**

31.- Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio completo.

$$P(x) \equiv c(x^a + x^b) + a(x^b + x^c) + b(x^a + x^c) + abc$$

A) 6 *B) 9* *C) 12* *D) 15* *E) 18*

Resolución.-

Efectuando los productos indicados, el polinomio tendrá la siguiente forma :

$$P(x) \equiv cx^a + cx^b + ax^b + ax^c + bx^a + bx^c + abc$$

Agrupando términos semejantes y factorizando, obtenemos :

$$P(x) \equiv (b+c)x^a + (a+c)x^b + (a+b)x^c + abc$$

Recordando que la suma de coeficientes se obtiene haciendo $x=1$, tendremos :

$$\Sigma \text{ coef. } P(x) = P(1) \quad \Rightarrow \quad \Sigma \text{ coef. } P(x) = 2(a+b+c) + abc$$

Desde que $P(x)$ es un polinomio completo y posee 4 términos, concluiremos que $P(x)$ es de tercer grado . Por esto se establece que los exponentes de x son tales que:

$$\{a;b;c\} = \{1;2;3\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+b+c = 1+2+3 = 6 \\ \\ a.b.c = 1.2.3 = 6 \end{cases} \quad \text{..................(1)}$$

Finalmente se concluye que : Σ coef. $P(x) = 2(a+b+c) + abc$ ....(2)

Y reemplazando (1) en (2) , tendremos : Σ coef. $P(x) = P(1) =$ **18** **RPTA. E**

32.- En el polinomio : $P(x+1) \equiv (2x+1)^n + (x+2)^n - 128(2x+3)$; donde "n" es impar, la suma de coeficientes y el término independiente suman 1; luego el valor de "n" es :

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

Resolución.-

Por condición del problema se debe cumplir que : $P(1) + P(0) = 1$ .... (1)

Si en el polinomio hacemos : $x = -1$, tendremos : $P(0) = -128$ .... (2)

Si ahora hacemos : $x = 0$, se establecerá que : $P(1) = 2^n - 383$ .... (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1) , obtendremos : $2^n - 383 - 128 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 512$

Reconociendo que $512 = 2^9$, tendremos : $2^n = 2^9 \quad \therefore \quad n = 9$ **RPTA. C**

33.- Dados :

$$Q(x) \equiv 2x+3 \text{ .... (I)}$$

$$Q[F(x)+G(x)] \equiv 4x+3 \text{ .... (II)}$$

$$Q[F(x)-G(x)] \equiv 7 \text{ .... (III)}$$

Calcular : $T = F(G(F(G(\ldots F(G(1))\ldots))))$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) -2

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en aislar a los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, de este modo será fácil determinar el valor numérico de T.

De las relaciones : (I) y (II), inducimos que : $x = F(x) + G(x)$

Si trabajamos ahora con esta relación en (I) : $Q[F(x) + G(x)] \equiv 2[F(x) + G(x)] + 3$

Utilizando la relación (II), tendremos : $4x + 3 \equiv 2[F(x) + G(x)] + 3$

Despejando, se puede establecer que : $F(x) + G(x) \equiv 2x$ .... (1)

De las relaciones (I) y (III), se induce que : $x = F(x) - G(x)$

Empleando esta relación en (I), tendremos : $Q[F(x) - G(x)] \equiv 2[F(x) - G(x)] + 3$

Sustituyendo el 1er miembro por (III) : $7 \equiv 2[F(x) - G(x)] + 3$

Despejando se obtendrá : $F(x) - G(x) \equiv 2$ .... (2)

Resolviendo (1) y (2), encontramos que : $F(x) = x+1 \ \wedge \ G(x) = x - 1$ ..... (α)

Ahora calcularemos el valor numérico de T : $T = F(G(F(G(\ldots F(G(1)) \ldots))))$

Haciendo $x = 1$, en (α): $\begin{cases} G(1) = 0 & \Rightarrow \quad T = F(G(F(G(\ldots F(0) \ldots)))) \\ F(0) = 1 & \Rightarrow \quad T = F(G(F(G(\ldots F(G(1)) \ldots)))) \end{cases}$

Es fácil reconocer que cada vez que reemplazamos : $G(1) = 0 \ \wedge \ F(0) = 1$, va surgiendo una repetición de valores : 1 y 0, los que se van sucediendo ordenadamente desde adentro hacia afuera. Puesto que la última notación es de F, concluímos que :

$T = F(0)$ $\therefore$ $\mathbf{T = 1}$ **RPTA. A**

34.- Dada la relación : $F(x + 2\sqrt{x}) \equiv x + 4\sqrt{x} + 4$ ***; halle usted :*** $F(x - 2\sqrt{x})$

A) $x - 4\sqrt{x} + 4$ *B)* x *C)* $2x$ *D)* $x + 4$ *E)* $\sqrt{x}$

Resolución.-

De la identidad : $F(x + 2\sqrt{x}) \equiv \sqrt{x}^2 + 4\sqrt{x} + 4 \equiv \left(\sqrt{x} + 2\right)^2$ .... (I)

Haciendo un cambio de variables : $x + 2\sqrt{x} = m$ .... (*)

Sumando 1 a cada miembro : $\sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} + 1 = m + 1$

Reduciendo, se tiene : $\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 = m + 1$

Extrayendo raíz y despejando : $\sqrt{x} = \sqrt{m+1} - 1$

Reemplazando en (I) : $F(m) \equiv \left(\sqrt{m+1} + 1\right)^2$ ..... (II)

Finalmente reemplazamos (*) en la rela-ción(II), encontrando que : $F(x - 2\sqrt{x}) \equiv \left(\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1\right)^2$

$$F(x-2\sqrt{x}) \equiv \left(\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}+1\right)^2$$

Reconociendo un T.C.P. en lo indicado : $F(x-2\sqrt{x}) \equiv \left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}+1\right)^2$

Simplificando el exponente y el radical : $F(x-2\sqrt{x}) \equiv \left(\sqrt{x}-1+1\right)^2$

Reduciendo y simplificando obtenemos : $\mathbf{F(x-2\sqrt{x}) \equiv x}$ **RPTA. B**

35.- Si : $F\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right) \equiv \dfrac{ax}{b}$; $\{a\,;b\} \subset \mathbb{N}$

Calcular el valor de : $E = \underbrace{F(F(F(\ldots.\ F(F}_{2\,000\ \text{veces}}(7)\ldots.)))$

A) 7   *B)* $\frac{4}{3}$ *C)* $\frac{1}{7}$ *D)* $\frac{3}{4}$ *E)* 14

Resolución.-

Del dato : $F\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right) \equiv \dfrac{ax}{b}$ ...... (1)

Hagamos : $\dfrac{ax+b}{ax-b} = m$

Aplicando las propiedades de proporciones, se tendrá : $\dfrac{ax}{b} = \dfrac{m+1}{m-1}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1), tendremos : $F(m) \equiv \dfrac{m+1}{m-1}$ ... (3)

A partir de la relación (3), se establece que : $F(7) = \dfrac{4}{3}$ $\wedge$ $F\left(\dfrac{4}{3}\right) = 7$

Finalmente analizando cuidadosamente la expresión "E", tal como lo hicimos en el Prob.34, se concluye que : $\mathbf{E = 7}$ **RPTA. A**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Señale Verdadero o Falso :

I. $\sqrt{24}\ x^2 y$ es una E.A. racional entera.

II. $\frac{1}{3}\ x^3\ y^2$ es una E.A. racional fraccionaria.

III. $x^x + 2x$ no es una expresión algebraica.

A) VVF B) VVV C) VFF
D) FVF E) VFV

2.- Hallar el grado absoluto de la expresión :

$$x^2 y + x^3 y z - xyz + x^3\ y^3$$

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 15

3.- Con respecto al monomio $7x^3\ y^4\ z^2$ es FALSO que :

I) Su grado absoluto es 9

II) Su G.R. (x) es 3

III) Su G.R. (z) es mayor que G.R. (x)

A) Solo II B) Solo I C) I y II
D) Solo III E) I y III

4.- Son términos semejantes :

A) $5b^2$ y $5a^2$ B) $3a^2bc$ y $3a^2b$

C) $99a^2$ y $\left(-\frac{1}{6}\right)a^2$ D) $a^2 + b$ y $a + b^2$

E) N. A.

5.- ¿Cuál es el coeficiente numérico de la expresión

$$\left(\frac{17}{4}\right)\ \left(\frac{1}{2}\,b^3\right)\ c\quad ?$$

A) $\frac{17}{4}$ B) $\frac{17}{4}\ c$ C) $\frac{17}{8}\ c$ D) $\frac{17}{8}$ E) N. A.

6.- La expresión :

$$10\ x^3 y^2\ -\ 9\ y^2 x^3\ +\ 2^3\ x\ (xy)^2$$

A) Es un trimonio

B) Se puede reducir a binomio

C) Se puede reducir a monomio

D) Equivale a cero (0)

E) N.A.

7.- Al ordenar decrecientemente el polinomio :

$$x^6 + y^3 + x^4\ y^2 + x^5\ y + x^3\ y^5$$

respecto a "x" o respecto a "y" ¿Qué término ocupa en ambos casos el mismo lugar?

A) x^6 B) y^3 C) $x^4\ y^2$ D) $x^5 y$ E) $x^3\ y^5$

8.- Señale la afirmación Falsa :

A) Un polinomio completo no siempre está ordenado

B) Un polinomio ordenado no siempre está completo.

C) Un polinomio completo de grado 8, siempre tiene 9 términos.

D) Un polinomio ordenado de grado 6, siempre tiene 7 términos.

E) Un polinomio completo puede estar ordenado.

9.- Hallar el valor de a para que el grado del siguiente polinomio sea 9 :

$$3x^{a+1}\ y - 4^{a+2}\ \ x^a\ y - 5x^2$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 5

10.- El polinomio : $x^{m+3} + x^{m+1}\ y^n + y^4$ es homogéneo. Hallar : $m + n$.

A) 4 B) 3 C) 5
D) 6 E) No se puede determinar

NIVEL B

11.- Hallar el grado del producto :

$$P(x) = \left(6x^2+1\right)^3 \left(x^2+x+1\right)^5 \left(x^3-8\right)$$

A) 15 B) 7 C) 20 D) 17 E) 19

12.- Señale verdadero o falso respecto a estas expresiones :

I) $\sqrt{5x}\ .\ y^3$ es irracional.

II) $3xy + y^2$ es racional entera.

III) $\dfrac{\sqrt{2}\,y}{3x+1}$ es racional fraccionaria.

A) VFV B) VFF C) VVV
D) FFF E) VVF

13.- Hallar $2a+b$, si se tiene que :

$$(2a-b)x^2 + 4bx + 2c \equiv 7x^2 + 20x - 5$$

A) 21 B) 17 C) 19 D) 11 E) 13

14.- Hallar el valor de n , para que el grado de $\left(2x^{n+2}\,y\right)^3$ sea 18.

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

15.- Respecto a x , la expresión :

$$x^{30^{2^5}} + x^{17^2} - x^{2^{30}} + x^{0^{3^{8^9}}}$$

A) Es de 1er grado B) Es de 2do grado
C) Es de 3er grado D) Es de grado 6
E) Es de grado 8

16.- Si el siguiente polinomio es homogéneo :

$$P(x,y) = x^5 + x^n y^2 + x^m y^4 + y^{r-1}$$

Hallar $m+n+r$.

A) 5 B) 7 C) 9 D) 10 E) 12

17.- El polinomio :

$$P(x,y) = ax^3 - a^2x^2y + a^3xy^2 - a^4y^3$$

A) Es heterogéneo, ordenado y completo.
B) Es homogéneo, ordenado y completo.
C) Es homogéneo, ordenado e incompleto.
D) No es homogéneo, no es ordenado ni completo.
E) Ninguna anterior.

18.- Si el polinomio es completo, hallar n .

$$P(x) = x^{n+1} + 3x^{n+2} + x^{n+3} + 5$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

19.- Indique Verdadero o falso :

I) $P(x) = x^{-2} + 3x^{-1} + 2$ es polinomio entero en x.

II) $a\,x^2\,y^3$, con a constante es de grado absoluto 5.

III) $\operatorname{sen} x + x^2$. es una expresión algebraica.

A) VFF B) FFF C) FFV
D) VVF E) FVF

20.- Dada la expresión : $\sqrt{\dfrac{x^4\,y^6}{z\,x^{-1}}}$

Hallar : G.A. + G.R. (x) - G.R. (z)

A) 3 B) 5 C) 8 D) 9 E) 12

21.- Si : $(a+2)\,x^{2a+3}\,y^{3b-1}$; $(b-3)\,x^{a+5}\,y^{2a+b-3}$

son semejantes; su suma es :

A) $2x^7y^2$ B) $-x^5y^3$ C) $3x^3y^7$
D) $-2x^7y^3$ E) $5x^4y^3$

22.- Señale respecto a qué variable, el término :

$\sqrt{\dfrac{u}{x}\sqrt{\dfrac{v}{u}\sqrt{\dfrac{vz}{y}}}}$, tiene el mayor grado relativo.

A) u B) v C) x D) y E) z

23.- Hallar n de tal forma que la expresión :

$$\sqrt[3]{3x^{n^2} \div \left(2^n \sqrt{x^{-2.5}}\right)} + n\,x^{\frac{n^2}{3}+1}$$

sea de grado $\frac{7}{3}$. Luego respecto al valor de n se puede afirmar :

A) $2,1 < n < 2,5$ B) $1,5 < n < 2,2$

C) $4 < n < 5$ D) $0,5 < n < 1$

E) $3 < n < 4$

24.- Los polinomios :

$$P(x) = 2\,(mx+n)^2 + mx^2 - 2n$$

$$R(x) = 4\,(9x^2 + 8x + p)$$

son idénticos. Hallar P(-1), si además se sabe que : $m > 0$

A) 8 B) 12 C) -4 D) 0 E) -6

25.- Tenemos un polinomio P(x) ordenado y completo de grado $6n$. Al suprimir todos los términos de exponente par, quedan 82 términos. ¿Cuánto vale n?

A) 41 B) 82 C) 81 D) 27 E) 24

NIVEL C

26.- Si : $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$

Halle : $P(1-x)$

A) 1 B) 2 C) x D) $\frac{1}{x}$ E) $x+1$

27.- Si :

$$Q(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots\ldots + 100x^{100}$$

Halle : Q (-1)

A) 100 B) 99 C) 50 D) 25 E) 199

28.- Determinar la suma de coeficientes de P(x), sabiendo que su término independiente es 17, además se cumple que :

$$P(x+1) = (x+1)(ax+2) + (a-1)(x+2) + a$$

A) 34 B) 27 C) 8 D) 9 E) 17

29.- Hallar el grado de :

$$A^6 \,.\, B^{24} \,.\, C^{60} \,.\, D^{120} \ldots\ldots (n-1) \text{ factores}$$

A) $\frac{n\,(2n+1)\,(2n+3)}{6}$ B) $\frac{(n^2+1)\,(2n+1)}{4}$

C) $\frac{(2n+1)\,(2n^2-5)}{6}$ D) $\frac{n\,(n+1)\,(n^2+4)}{6}$

E) $\frac{n\,(n+1)\,(n^2+n-2)}{4}$

30.- Con $n \neq 0$, la siguiente expresión se puede reducir a monomio:

$$n\left(n^2-1\right)^3 x^{a^2-a+1} - 2\,x^{n(n+1)\,a^2-a+2} + (n-2)\,x^{a^2+a-1}$$

El coeficiente del monomio reducido es :

A) -4 B) -5 C) 2 D) 3 E) 4

31.- El polinomio :

$$x\left(ax^2+bx+c\right) - 2x\left(bx^2+cx+d\right) + 2d - 1$$

es idénticamente nulo. Halle : $\sqrt[acd]{abcd}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

32.- Si la expresión : $\sqrt[n^2-1]{x^{2n+2}}$; con $n \neq 1$

es racional entera, ¿De qué tipo es $x^{1+\frac{1}{n}}$?

A) Racional entera B) Racional fraccionaria

C) Irracional D) Trascendente

E) N.A.

33.- Encontrar el polinomio cuadrático $F(x)$ que verifica :

$$F\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+F\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\equiv 6x^2+8x+5$$

para luego indicar la suma de sus coeficientes:

A) 1 B) 8 C) 2 D) 9 E) 13

34.- La suma de los grados absolutos de todos los términos de un polinomio entero, homogéneo y completo de dos variables es 600. ¿Cuál es su grado absoluto?

A) 12 B) 30 C) 24 D) 36 E) 25

35.- Si se cumple que :

$$7x^{d-1}+dx^{b+c}+bx^{a}-1\equiv ax^{4}+(2a+1)x^{a-1}$$
$$+5x^{a}+c$$

Halle el valor de : $(b+d)^{a^c}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 9 E) 16

36.- Si la expresión : $\sqrt[4]{\left[\dfrac{x^{2n+1}\sqrt[3]{y^{2n}}}{z^{2n-3}\sqrt[6]{x^{5n}}}\right]^5}$

es de grado cero, calcular "n"

A) 48 B) 12 C) 24 D) 6 E) 16

37.- Si :

$$P(x;y)\equiv(abc+16)\,x^{-a}y^{b}-(bc+a)\,x^{b}y^{c}$$
$$+(b-c)\,x^{-a}y^{c}$$

es un polinomio identicamente nulo. Calcular "$a+b+c$".

A) 8 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

38.- Calcular : $N=\dfrac{F\left(\sqrt[5]{2}+3\right)+F(3)}{F\left(\sqrt[5]{2}+3\right)}$

Si : $F(x)=60x^5-185x^4+45x^3-92x^2+10x-12$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

39.- Calcular : $P(-1\,;\sqrt{7}+1)$ del siguiente polinomio homogeneo.

$$P(x;y)\equiv x^{a^2+1}+a\,y^{a-b}+3b\,x^{a-2b}$$

A) -4 B) $-\sqrt{7}-4$ C) $\sqrt{7}-4$

D) $\sqrt{7}+4$ E) 1

40.- Si : $P\left(x^3+x^2\right)\equiv x^5+x$; hallar : $P(1)$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

41.- Si : $P(x;y)\equiv a^2(bx+cy)+b^2(ay+cx)$
$$+b^2(ax+by)$$

$$Q(x;y)\equiv\frac{9ax}{(bc)^{-1}}+\frac{5by}{(ac)^{-1}}$$

Halle el equivalente de :

$$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\div\left(a^2c^{-2}+c^2b^{-2}+b^2a^{-2}\right)$$

siendo : $P(x;y)<>Q(x;y)$

A) $\frac{7}{71}$ B) $\frac{9}{71}$ C) $\frac{10}{71}$

D) $\frac{1}{71}$ E) $\frac{13}{71}$

42.- En el siguiente polinomio homogéneo :

$$P(x;y)\equiv x^{(an)^a}+y^{a^{a^n}}\quad;n\neq 1\;;$$

calcular el valor de : $26a + 24n$

A) 48 B) 52 C) 26 D) 100 E) 50

43.- Si : $P\left(x^x + 2n + 1\right) \equiv 6x^x + 12n$

$$P[F(x)] \equiv 24x + 12$$

proporcionar el valor de : $F(n - 1)$

A) $2n$ B) $2n - 2$ C) $4n - 2$

D) $4(n - 1/4)$ E) $4n$

44.- Se tiene una función que verifica :

$$F(n) + F(n-1) = \frac{2}{n^2 - 1} \quad \wedge \quad F(1) = \frac{1}{2}$$

Luego la adición :

$$F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + \ldots\ldots\ldots;$$

es equivalente a :

A) 2 B) 2^0 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2^2

45.- Indicar la suma de todos los valores de "n" de tal modo que al simplificar $\sqrt[n+2]{\dfrac{x^{n+7} + x^{n+8}}{x^2 + x}}$ se obtenga una E.A.R.E.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

46.- Si la suma de los grados absolutos de los términos de :

$$M(x\,;y) \equiv a x^{a^{2b-14}} - 5ab(xy)^{a^{b-7}} + by\ ,$$

es : $\left(a^{10} + 1\right)^2$

¿Qué valor asume "b"?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

47.- Si el polinomio :

$$P(x) \equiv \left(a^{b^2} - 4\right) x^2 + \left(a^{a} - 2\right) x + c^{a^b} - 4$$

es identicamente nulo. Calcular el valor de :

$$a^2 + b^2 + c^2$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

48.- Si : $F(x) \equiv \sqrt{x^2 + 2F(x)}$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$,

tal que : $F(x) \geq 2$;

calcular : $2\,000 - F\left(\sqrt{1997^2 - 1}\right)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

49.- El polinomio completo y ordenado :

$$P(x\,;y) \equiv x^{4n-1} + x^{4n-2}y + \ldots + x\,y^{4n-2} + y^{4n-1}$$

que también es homogéneo, se verifica que la suma de los grados absolutos de sus términos es 240. según esto halle Ud. su grado de homogeneidad.

A) 20 B) 15 C) 10 D) 5 E) 25

50.- Si : $P(x)$ y $Q(x)$, son polinomios enteros en x cumpliéndose que : $P(x) <> Q(x)$. Siendo además :

$P(x) \equiv (x - a)(x - b) \;\wedge\; Q(x) \equiv (x - 7)(x - c) + 1$;

proporcionar la suma de todos los valors de "a".

A) 12 B) 10 C) 14

D) 17 E) N.A.

51.- Si : $[F(x)]^2 \, . \, F\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \equiv \left(\dfrac{x}{3}\right)^3$

calcular el valor de : $F(3)$

A) 2 B) 5 C) -6 D) 3 E) -1

4 Productos Notables

Se les da este nombre por ser el resultado de multiplicaciones indicadas, con el agregado de ser notables porque estos resultados tienen formas que resultan fáciles de identificar y que pueden ser escritos en forma directa, sin necesidad de efectuar todos los pasos de la multiplicación.

4.1) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

4.2) DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a^n+b^n)(a^n-b^n) = a^{2n}-b^{2n}$$

4.3) CUADRADO DE UN TRINOMIO

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$= a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Si x es un número real distinto de cero, tal que $4\left(x^4+1\right) = 5x^2$; entonces el valor de $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ es :

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{13}{4}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{7}{4}$ E) 2 UNMSM 92

<u>Resolución</u>.-

Podemos reconocer que la expresión, cuyo valor nos es solicitado, corresponde a un Trinomio Cuadrado Perfecto, por tanto lo que nos proponemos es convertir de algún modo a la igualdad dada para que de ella pueda surgir un valor necesariamente conocido.

Efectuando transformaciones a partir del dato : $4\left(x^4+1\right) = 5x^2$

Transponiendo términos tendremos : $\dfrac{x^4+1}{x^2} = \dfrac{5}{4}$

Efectuando en el primer miembro : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{5}{4}$

Sumando 2 a cada miembro : $x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{5}{4} + 2$

El 1^{er} miembro de la última igualdad es un trinomio cuadrado perfecto idéntico a la expresión que se busca : $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = \boxed{\dfrac{13}{4}}$ **RPTA. B**

2.- Si $y = x + \dfrac{1}{x}$; entonces la expresión : $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$; se convierte en :

A) $y^2-2y+6=0$ *B)* $y^2-y-6=0$ *C)* $x^2\left(y^2+y-6\right)=0$

D) $x^2\left(y^2+2y-6\right)^2=0$ *E)* $x^2\left(y^2-y+6\right)$ ***UNI 90***

Resolución.-

Nuestro trabajo consistirá en transformar la expresión dada, empleando para ello la igualdad propuesta. De acuerdo con los distractores, es previsible elevar al cuadrado por lo menos una vez a la condición del problema. Veamos :

Multiplicando y dividiendo la expresión dada por x^2 : $x^2\left[x^2+x-4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right]=0$ .... (1)

Agrupando términos dentro del corchete se tendrá : $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4$ ....(*)

A partir de la condición dada se tiene : $x + \dfrac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$

Utilizando esta última relación en cada paréntesis de (*), se tendrá : $\left(y^2-2\right)+y-4$ .... (2)

Finalmente sustituimos (2) en (1) : $\boxed{x^2\left(y^2+y-6\right)=0}$ **RPTA. C**

3.- Si : $p-q-r=2$, y , $pq+pr=qr$; entonces : $p^2+q^2+r^2$, es igual a :

A) 4 *B) -4* *C) 2* *D) -2* *E) 0* ***UNMSM 90***

Resolución.-

Elevamos la 1^{ra} condición al cuadrado : $(p-q-r)^2 = 2^2$

Desarrollando el cuadrado del trinomio : $p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr + 2qr = 4$ ..... (1)

De la 2^{da} condición tenemos que : $pq + pr = qr$

Multiplicando ahora por -2 : $-2pq - 2pr = -2qr$ ..... (2)

A continuación reemplazamos (2) en (1) : $p^2 + q^2 + r^2 - 2qr + 2qr = 4$

Eliminando términos semejantes : $p^2 + q^2 + r^2 = \boxed{4}$ **RPTA. A**

4.- Diga en cuál de los siguientes pasos se cometió el error :

$$x = y$$

$$x^2 = y^2 \overset{①}{\Rightarrow} x^2 - xy = y^2 - xy$$

$$\overset{②}{\Rightarrow} x^2 - y^2 = x^2 - xy \overset{③}{\Rightarrow} (x+y)(x-y) = x(x-y)$$

$$\overset{④}{\Rightarrow} x + y = x \overset{⑤}{\Rightarrow} 2x = x \overset{⑥}{\Rightarrow} 2 = 1$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6 UPCH 89

Resolución.-

(1) es correcto (a ambos lados se resta lo mismo)

(2) es correcto (se utiliza adecuadamente $x = y$)

(3) es correcto (se aplica diferencia de cuadrados)

(4) parece correcto porque se elimina $(x - y)$, pero como $x = y$ la diferencia $(x - y)$ es igual a cero (0). Esto significa que se ha hecho :

$$(x + y) \,.\, 0 = x \,.\, 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = x$$

Esto es absurdo puesto que no se puede dividir por cero. **RPTA. C**

5.- Calcular : 445 . 444 - 447 . 443

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

Resolución.-

Este modelo de ejercicios nos permitirá apreciar la enorme utilidad de los productos notables para el cálculo de operaciones aparentemente tediosas. Veamos :

Haciendo $x = 445$, la operación se convierte en : $(x + 1)(x - 1) - (x + 2)(x - 2)$

Aplicando productos notables se obtiene : $x^2 - 1 - \left(x^2 - 4\right)$

Y reduciendo términos semejantes, obtenemos : $-1 + 4 = \boxed{3}$ **RPTA. B**

4.4) CUBO DE UN BINOMIO

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3 - 3\,ab\,(a-b)$$

EQUIVALENCIAS DE CAUCHY

4.5) SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$(a+b)\ (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)\ (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

4.6) CUBO DE UN TRINOMIO

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\,(a+b)\,(b+c)\,(a+c)$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3\,(a+b+c)\,(ab+bc+ac) - 3\,abc$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6\,abc$$
$$= 3\,(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2(a^3+b^3+c^3) + 6abc$$

4.7.) EQUIVALENCIA DE GAÜSS

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc = (a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ac)$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

6.- Si se cumple que : $x + y = 6$, $xy = 7$; hallar el valor de $x^3 + y^3$

A) 20 *B) 40* *C) 60* *D) 80* *E) 90* *PUCP 91-I*

Resolución.-

Recordando el producto notable : $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x+y)$

Reemplazamos los datos $x + y = 6$; $xy = 7$: $6^3 = x^3 + y^3 + 3\,.\,7\,.\,6$

Despejando la suma de cubos : $x^3 + y^3 = 6^3 - 3\,.\,7\,.\,6$

Finalmente obtenemos : $x^3 + y^3 =$ **90** RPTA. E

7.- Sabiendo que : $a + b = ab = 5$; ***calcular el valor de :*** $\dfrac{a^2+b^2+5}{a^3+b^3+10}$

A) $\frac{1}{2}$ *B)* 1 *C)* $\frac{1}{3}$ *D)* $\frac{2}{3}$ *E)* $\frac{1}{5}$

Resolución.-

A partir de las equivalencias vistas en los items 4.1 y 4.4, despejamos convenientemente para obtener :

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^3+b^3 = (a+b)\left[a^2-ab+b^2\right]$$

Si ahora sustituimos los valores dados en la condición del problema, tendremos :

$$a^2+b^2 = 5^2 - 2 \,.\, 5 = 15$$

$$a^3+b^3 = 5\,(15-5) = 50$$

El valor pedido es : $\dfrac{15+5}{50+10} = \dfrac{20}{60} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ **RPTA.C**

8.- Efectuar : $\sqrt{1000.1001.1002.1003+1}$

A) 1 003 001 *B) 1 004 001* *C) 1 002 001* *D) 1 005 001* *E) N.A.*

Resolución.-

Es evidente que el valor de la expresión dada resulta muy tediosa de calcular si lo hacemos por las multiplicaciones indicadas. Sin embargo al recurrir a las equivalencias, el cálculo puede resultar menos laborioso. Veamos :

Haciendo : $x = 1\,000$; $x + 1 = 1\,001$; ....

De este modo la cantidad dentro del radical queda así : $= x\,(x+1)\,(x+2)\,(x+3)+1$

Cambiando el orden de los factores : $= x\,(x+3)\,.\,(x+1)\,(x+2)+1$

Desarrollando el producto en las llaves : $= \left(x^2+3x\right).\left(x^2+3x+2\right)+1$

Efectuando el producto indicado : $= \left(x^2+3x\right)^2 + 2\left(x^2+3x\right)+1$

Podemos reconocer en la última expresión a un Trinomio Cuadrado Perfecto : $= \left[\left(x^2+3x\right)+1\right]^2$

Ahora si aplicamos el radical : $= \sqrt{\left(x^2+3x+1\right)^2}$

Luego de extraer raíz cuadrada nos queda : $= x^2+3x+1$

Como $x = 1\,000$; el valor de la expresión resultante es : $1\,000\,000 + 3\,000 + 1 =$ **1 003 001** **RPTA. A**

9.- Si : $a - b = b - c = \sqrt{3}$ ***; calcular el valor de :*** $T = \dfrac{a(a^2 - bc)+b(b^2 - ac)+c(c^2 - ab)}{a+b+c}$

A) 6 ***B) 3*** ***C) 18*** ***D) 9*** ***E) 27***

Resolución.-

Efectuando los productos indicados y reduciendo el numerador de la expre-sión "T", ésta quedaría así : $T = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a+b+c}$

Empleando la equivalencia de Gaüss en el numerador : $T = \dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)}{a+b+c}$

Simplificando : $T = a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ac$

Multiplicando por 2 a ambos miembros : $2T = 2a^2+2b^2+2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$

Ahora debemos agrupar convenientemente con la finalidad de obtener binomios al cuadrado en el segundo miembro : $2T = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2$ ...... (α)

Sumando los datos se obtiene : $a - c = 2\sqrt{3}$

Reemplazando datos en (α) : $2T = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 18$

$\therefore$ **T = 9** **RPTA. D**

10.- Si se cumple que : $\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{x}-1} = 1$ ***; calcular el valor de :*** $64x^3 - 129x^2 + 876x$

A) 856 ***B) 794*** ***C) 868*** ***D) 784*** ***E) 486***

Resolución.-

Si elevamos al cubo el dato del problema, tendremos :

$$\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 1 + 3\sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\ \Big(\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}_{1}\Big) = 1$$

Efectuando y reduciendo, se logra establecer que : $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x-1} = 1$

Transponiendo términos, encontramos : $3\sqrt[3]{x-1} = 1 - 2\sqrt{x}$

Elevamos de nuevo al cubo : $27 . (x-1) = 1 - 6\sqrt{x} + 12x - 8x\sqrt{x}$

Simplificando y ordenando : $8x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} = 28 - 15x$

Ahora elevamos al cuadrado : $64x^3 + 96x^2 + 36x = 784 - 840x + 225x^2$

Finalmente al transponer términos : $64x^3 - 129x^2 + 876x =$ **784** **RPTA. D**

4.8) BINOMIOS CON TÉRMINOS COMUNES (STIVEN) :

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc$$

4.9) EQUIVALENCIAS DE LAGRANGE :

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(az-cx)^2$$

4.10) EQUIVALENCIAS DE ARGAND

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = x^4+x^2y^2+y^4$$

Caso particular : $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$

4.11) EQUIVALENCIAS ADICIONALES QUE NO SON PRODUCTOS NOTABLES

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2+(a-b)^2 &= 2(a^2+b^2)\\(a+b)^2-(a-b)^2 &= 4ab\end{aligned}\right\}\ \textbf{Equivalencias de Legendre}$$

$$(a+b)(b+c)(a+c)+abc = (a+b+c)(ab+bc+ac)$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

11.- El producto de dos números cuya suma es 27, es 180. Entonces, la diferencia de dichos números es :

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 7* *UL 95-I*

Resolución.-

Recordemos una de las equivalencias de Legendre : $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$

Si a y b son los números buscados, reemplazamos $a+b=27$ y $ab=180$: $(27)^2-(a-b)^2 = 4(180)$

A continuación despejamos la diferencia del paréntesis : $(a-b)^2 = 729-720$

Finalmente extraemos raíz cuadrada : $|a-b| = \mathbf{3}$ **RPTA. A**

12.- Efectuar : $(a+b+c)(a+b+d)+(a+c+d)(b+c+d)-(a+b+c+d)^2$

A) $ab+a^2$ ***B)*** $ab-b^2$ ***C)*** $ab+cd$ ***D)*** $abcd$ ***E)*** $a+b-c-d$

Resolución.-

Si hacemos un cambio de variable de modo que : $x=a+b+c+d$, provocaremos una reducción en la expresión original. Esto hará que en cada paréntesis aparesca un binomio diferencia, lo cual nos permitirá emplear las equivalencias del item 4.8. Veamos :

Haciendo el cambio de variable : $(x-d)(x-c)+(x-b)(x-a)-x^2$

Desarrollando los productos : $x^2-cx-dx+cd+x^2-ax-bx+ab-x^2$

Agrupando convenientemente : $\left(x^2+x^2-x^2\right)-(ax+bx+cx+dx)+cd+ab$

Luego de simplificar y sacar el factor x en el paréntesis, tendremos : $x^2-x\underbrace{(a+b+c+d)}_{x}+cd+ab$

Eliminando términos semejantes : $cd+ab$ **RPTA. C**

13.- Se sabe que : $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$

Además : $a=\sqrt{2}$; $b=\sqrt[3]{2}$; $c=\sqrt[6]{2}$; ***¿Cuánto vale d ?***

A) 1 ***B)*** 2 ***C)*** $\sqrt{2}$ ***D)*** $\sqrt[4]{2}$ ***E)*** 0

Resolución.-

Ordenando y agrupando convenientemente los términos, tendremos :

$$[(a+d)+(b+c)][(a+d)-(b+c)]=[(a-d)-(b-c)][(a-d)+(b-c)]$$

Efectuando los productos notables en cada miembro, se obtiene :

$$(a+d)^2-(b+c)^2=(a-d)^2-(b-c)^2$$

Transponiendo términos se establecerá que :

$$(a+d)^2-(a-d)^2=(b+c)^2-(b-c)^2 \quad \text{...........}(*)$$

Empleando las equivalencias de Legendre para cada miembro de (*), concluímos que :

$$4ad=4bc \quad \Rightarrow \quad d=\frac{bc}{a}$$

Reemplazando datos : $d=\dfrac{\sqrt[3]{2}.\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$ **1** **RPTA. A**

14.- Proporcionar el equivalente de : $T=\dfrac{(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)(a^6-a^3+1)(a^6+a^3+1)}{a^9+1}$

A) $a-1$ ***B)*** a^7+1 ***C)*** a^9-1 ***D)*** $a^{12}-1$ ***E)*** $a+1$

Resolución.-

Haciendo una inspección de la expresión dada, reconocemos en el numerador una diferencia de cuadrados, que será el punto departida de un conjunto de productos notables. Veamos :

$$T=\frac{\overbrace{(a+1)(a-1)}(a^4+a^2+1)(a^6-a^3+1)(a^6+a^3+1)}{a^9+1}$$

Por diferencia de cuadrados : $T=\dfrac{\overbrace{(a^2-1)(a^4+a^2+1)}(a^6-a^3+1)(a^6+a^3+1)}{a^9+1}$

Por diferencia de cubos : $T=\dfrac{(a^6-1)\overbrace{(a^6-a^3+1)(a^6+a^3+1)}}{a^9+1}$

Por la equivalencia de Argan'd : $T=\dfrac{(a^6-1)(a^{12}+a^6+1)}{a^9+1}$

Por diferencia de cubos : $T=\dfrac{a^{18}-1}{a^9+1}=\dfrac{(a^9)^2-(1)^2}{a^9+1}$

Por diferencia de cuadrados : $T=\dfrac{(a^9+1)\,(a^9-1)}{(a^9+1)}$

Finalmente simplificando se tendría : $\mathbf{T=a^9-1}$ **RPTA. C**

15.- Si : $\{a\,;b\}\subset\Re\,/\,a^2+b^2=4$; encontrar el máximo valor de : $a+b$

A) 0,5 ***B) 4*** ***C) $2\sqrt{2}$*** ***D) 0,25*** ***E) $\sqrt{2}$***

Resolución.-

Por la equivalencia de Legendre : $(a+b)^2+(a-b)^2=2\left(a^2+b^2\right)$

Es decir : $(a+b)^2=2\left(a^2+b^2\right)-(a-b)^2$

Reemplazando : $(a+b)^2=8-(a-b)^2$ ..... (*)

Debemos reconocer que si : $a+b=\textit{máximo}$, entonces : $(a+b)^2$ también es máximo

Analizando la relación (*) : $(a+b)^2$ es máximo $\Leftrightarrow$ $(a-b)^2$ es mínimo

Por esta razón se establece que : $(a+b)^2_{máx}=8-(a-b)^2_{mín}$

Dado que se trabaja en $\Re$, se concluye que : $(a-b)^2_{min}=0$

Luego : $(a+b)^2_{máx}=8$

Finalmente se tendría : $(a+b)_{máx}=2\sqrt{2}$ **RPTA. C**

4.12) EQUIVALENCIAS CONDICIONALES

Si : $a+b+c=0$; se verifica que :

1) $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ac)$

2) $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

3) $(ab+bc+ac)^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$

4) $a^4+b^4+c^4 = 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$

5) $(a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4)$

4.13) IMPLICACIONES NOTABLES

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) Si : } x^2+y^2+z^2 = xy+xz+yz \Rightarrow x=y=z \\ \text{2) Si : } x^3+y^3+z^3 = 3xyz \Rightarrow x=y=z \text{ , ó , } x+y+z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \{x,y,z\} \subset \mathbb{R} \end{array}$$

3) Si : $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \quad \Rightarrow \quad x=y \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0$

4) Si : $x^2+y^2=2xy \quad \Rightarrow \quad x=y$

5) Si : $x^2+y^2+z^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=y=z=0$

6) Si : $x+x^{-1}=a \quad \Rightarrow \quad x^2+x^{-2}=a^2-2$

$$x^3+x^{-3} = a^3-3a$$

$$x^4+x^{-4} = (a^2-2)^2-2$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO IV)

16.- Si : $a+b+c=0$, el valor de : $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc} \cdot \dfrac{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2}{ab+ac+bc}$, es :

A) -4 *B) -6* *C) 4* *D) 9* *E) 12*

Resolución.-

Nuestro trabajo consistirá en sustituir los numeradores por expresiones equivalentes, para lo cual será necesario emplear las equivalencias Condicionales vistas en el item 4.12. Veamos :

Empleando la relación (2) de las equivalencias condicionales para el primer factor y desarrollando asimismo los binomios, tendremos :

$$\frac{3abc}{abc} \cdot \frac{\overbrace{a^2+2ab+b^2}+\overbrace{a^2+c^2+2ac}+\overbrace{b^2+2bc+c^2}}{ab+bc+ac}$$

Simplificando en el 1er factor y agrupando términos en el 2do, la expresión queda así : $3 \cdot \dfrac{(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$

Dado que el contenido del paréntesis es nulo, obtenemos : $3 \cdot \dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$

Empleando la relación (1) de las equivalencias condicionales, el numerador de la última expresión queda así :

$$3 \cdot \frac{-2\,(ab+bc+ac)}{ab+bc+ac} = 3 \cdot (-2) = \boxed{-6}$$ **RPTA. B**

17.- Halle el valor numérico de : $T = \dfrac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{abc\,(ab+bc+ac)}$

Si : $a = \sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$b = \sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

$c = \sqrt{5}-2\sqrt{3}$

A) 1 *B) 3* *C) -6* *D) -3* *E) 6*

Resolución.-

Haciendo una inspección de los valores de a; b y c , comprobamos que estos son tales que : $a+b+c=0$ .Por ello utilizaremos las relaciones 1 y 2 del grupo de Equivalencias Condicionales vistas en el item 4 .12; de esta forma el numerador de la expresión T, quedará así :

$$T = \frac{3abc\,[-2\,(ab+bc+ac)]}{abc\,(ab+bc+ac)}$$

Donde luego de simplificar se obtiene : $\boxed{T=-6}$ **RPTA. C**

18.- Si se verifica : $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ac)$; $\{a;b;c\} \subset \mathbb{R}$

Encontrar el equivalente de : $E = \sqrt[3]{\dfrac{(a+b+c)^4}{a^4+b^4+c^4}} + \sqrt[5]{\dfrac{(a+b+c)^6}{a^6+b^6+c^6}}$

A) 2 *B) 4* *C) 6* *D) 8* *E) 12*

Resolución.-

Desarrollando el 1er miembro de la condición dada, tendremos :

$$a^2+b^2+c^2+2\,(ab+bc+ac) = 3\,(ab+bc+ac)$$

Recordando ahora la 1^{ra} relación del item 4.13 de Implicaciones Notables, donde :

$$a^2+b^2+c^2 = ab + bc + ac \quad \Rightarrow \quad a = b = c = k$$

Reemplazando esta implicancia en "E" : $\quad E = \sqrt[3]{\dfrac{(3k)^4}{3k^4}} + \sqrt[5]{\dfrac{(3k)^6}{3k^6}} = \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[5]{3^5}$

Simplificando y reduciendo se tendría : $\quad$ **E = 6** $\quad$ **RPTA. C**

19.- Siendo : a, b, c ∧ x . Números reales que verifican :

$$\begin{cases} x^2\left(a^2+b^2+c^2\right) = 3(2x-1) \text{ .... (I)} \\ a+b+c = 3 \text{ .... (II)} \end{cases}$$

Donde : $x \neq \{0\,;\,1/2\}$. Halle el valor numérico de : $\quad T = \dfrac{a^2+ab+b^2+c^2}{bc}$

A) 1 $\quad$ *B) 2* $\quad$ *C) 3* $\quad$ *D) 4* $\quad$ *E) 5*

Resolución.-

Transformando la relación (I) :

$$(ax)^2+(bx)^2+(cx)^2 = 2x\,(3) - 3 \quad \text{...... (*)}$$

Reemplazando la parte literal de la relación (II) en (*), tendremos :

$$(ax)^2+(bx)^2+(cx)^2 = 2x\,(a+b+c) - 3$$

Transponiendo todos los términos al 1^{er} miembro :.

$$\underbrace{(ax)^2-2(ax)+1} + \underbrace{(bx)^2-2(bx)+1} + \underbrace{(cx)^2-2(cx)+1} = 0$$

Sustituyendo cada llave por su correspondiente binomio al cuadrado :

$$(ax-1)^2 + (bx-1)^2 + (cx-1)^2 = 0$$

Debemos reconocer que esta última relación será satisfecha si y solo si :

$$ax = bx = cx = 1 \quad \text{(por ser números reales)}$$

Esto significa que : $\quad a = b = c$

Ahora la expresión "T" sería : $\quad T = \dfrac{a^2+a.a+a^2+a^2}{a.a} = \dfrac{4a^2}{a^2}$

$\therefore \quad$ **T = 4** $\quad$ **RPTA. D**

20.- Sabiendo que : $(a+b+c+d)^2 = 4(a+b)(c+d)$

Calcular el valor de : $\dfrac{a-c}{d-b} + \dfrac{b-c}{d-a}$

A) 2 *B) 4* *C) 0* *D) 1* *E)* $\dfrac{1}{2}$

Resolución.-

Nuestra técnica consistirá en determinar qué relación existe entre los numeradores y denominadores de la expresión solicitada, para lo cual trataremos de transformar la condición dada por medio de las equivalencias. Veamos :

Hagamos el siguiente cambio de variable : $x = a + b \;\; ; \;\; y = c + d$

De este modo la condición dada queda así : $(x+y)^2 = 4xy$

Desarrollando el primer miembro : $x^2 + 2xy + y^2 = 4xy$

Transponiendo términos : $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

Reconocemos un Trinomio Cuadrado Perfecto en el 1er miembro : $(x-y)^2 = 0$

De esta igualdad concluímos que : $x = y$

Esto último nos permite asegurar que : $a + b = c + d$

A partir de esta igualdad deducimos que : $a - c = d - b$ ó $b - c = d - a$

Esto significa que : $\dfrac{a-c}{d-b} = 1 \;\; ; \;\; \dfrac{b-c}{d-a} = 1$

Y al reemplazar en la expresión original : $\dfrac{a-c}{d-b} + \dfrac{b-c}{d-a} = 1 + 1 = \boxed{2}$

RPTA. A

MISCELANEA

21.- El valor de : $2[\,4\,.\,10\,.\,82\,.\,\ldots\ldots\,(n\ \text{factores}) + 0{,}5\,]$ ***, es equivalente a :***

A) $4^n + 1$ *B)* $8^n - 1$ *C)* $8^n + 1$ *D)* 3^{2^n} *E)* 2^{3n}

Resolución.-

En este caso nuestra estrategia consistirá en expresar a cada factor como un binomio, de modo que el primero sea un binomio diferencia y los siguientes sean binomios suma, de esta forma tenemos la esperanza de que al multiplicar una pareja de binomios aparezcan Diferencias de Cuadrados. Veamos :

La expresión que se pide hallar es : $E = 2\,.\underbrace{4\,.\,10\,.\,82\,.\ \ldots\ldots\,(?)}_{n\ \text{factores}} + 1$

$$E = \underbrace{(3-1)(3+1)}\left(3^2+1\right)\left(3^{2^2}+1\right)\ldots\ldots\ldots\left(3^{2^{n-1}}+1\right) + 1$$

Aplicando sucesivas diferencias de cuadrados :

$$E = \underbrace{\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)}\left(3^{2^2}+1\right)\ldots\ldots\ \left(3^{2^{n-1}}+1\right) + 1$$

$$E = \underbrace{\left(3^{2^2}-1\right)\left(3^{2^2}+1\right)}\ldots\ldots\ldots\left(3^{2^{n-1}}+1\right) + 1$$

Luego de realizado el último producto, tendremos :

$$E = \underbrace{\left(3^{2^{n-1}}-1\right)\left(3^{2^{n-1}}+1\right)} + 1 = \left(3^{2^{n-1}}\right)^2 - 1^2 + 1$$

$$E = 3^{2^{n-1}\cdot 2^1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E = 3^{2^n}}$$

RPTA. D

22.- Si : $\dfrac{a^n}{b^n} + \dfrac{b^n}{a^n} = 7$ ***; el valor de :*** $\dfrac{a^n + b^n}{a^{\frac{n}{2}}\,.\,b^{\frac{n}{2}}}$ ***, es :***

A) $\sqrt{3}$ *B)* 3 *C)* $\sqrt{2}$ *D)* 2 *E) N.A.* ***PUCP 91-I***

Resolución.-

Sea x el valor que buscamos de manera que : $x = \dfrac{a^n + b^n}{\sqrt{a^n b^n}}$

A continuación separamos en dos fracciones : $x = \dfrac{a^n}{\sqrt{a^n b^n}} + \dfrac{b^n}{\sqrt{a^n b^n}}$

Expresando cada sumando como un radical : $x = \sqrt{\frac{a^n}{b^n}} + \sqrt{\frac{b^n}{a^n}}$

Si ahora elevamos al cuadrado tendremos : $x^2 = \underbrace{\frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{a^n}} + 2$

Sustituyendo en la llave la condición dada : $x^2 = 7 + 2 = 9 \Rightarrow$ $\boxed{x = 3}$ **RPTA. B**

23.- Simplificar : $\dfrac{(ax+by)^2+(ay-bx)^2}{x^2+y^2}$

A) a ***B) a^2+b^2*** ***C) ab*** ***D) abxy*** ***E) a^2b^2***

Resolución.-

Haciendo transformaciones en el numerador (N), desarrollaremos los cuadrados de los binomios, obteniéndose :

$$N = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$$

Simplificando y agrupando : $N = \left(a^2x^2 + a^2y^2\right) + \left(b^2x^2 + b^2y^2\right)$

Factorizando en cada paréntesis : $N = a^2\left(x^2+y^2\right) + b^2\left(x^2+y^2\right)$

Si ahora factorizamos el paréntesis : $N = \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$ .....(*)

A continuación sustituimos (*) en la expresión original :

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \boxed{a^2+b^2}$$ **RPTA. B**

24.- Al reducir : $(x+y+z)^3 + 2\left(x^3+y^3+z^3\right) - 3(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)$ ***, se obtiene :***

A) $2x^2yz$ ***B) $x+y+z$*** ***C) $3x+2yz^2$*** ***D) 6xyz*** ***E) 3xyz***

Resolución.-

La última equivalencia del item 4 .6 sobre el cubo de un trinomio es :

$$(x+y+z)^3 = 3(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2\left(x^3+y^3+z^3\right) + 6xyz$$

Que se puede convertir en :

$$(x+y+z)^3 + 2\left(x^3+y^3+z^3\right) - 3(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) = 6xyz$$

El lado izquierdo de esta igualdad es justamente la expresión que se pide reducir. **RPTA. D**

25.- El valor de : $(x-y)^2+(z-w)^2-(y-z)^2-(w-x)^2+2(x-z)(y-w)$ ***, es :***

A) x^2 ***B)*** y^2 ***C)*** $2xy$ ***D)*** w^2 ***E)*** 0 ***UNALM 92***

Resolución.-

Desarrollando los cuadrados de los binomios y efectuando el producto indicado, tendremos :

$$\overbrace{x^2-2xy+y^2}+\overbrace{z^2-2wz+w^2}-\left(y^2-2yz+z^2\right)-\left(w^2-2wx+x^2\right)+2xy-2xw-2yz+2zw$$

Ordenando y agrupando convenientemente, tendremos :

$$\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)-\left(y^2+z^2+w^2+x^2\right)-2xy-2wz+2yz+2wx+2xy-2xw-2yz+2zw$$

Eliminando términos semejantes, obtenemos cero : **(0)** **RPTA. E**

26.- Por cuánto hay que multiplicar a^4-b^4 ***, para obtener :*** $(a+b)\left(a^3-b^3\right)+(a-b)\left(a^3+b^3\right)$

A) a ***B)*** 2 ***C)*** b ***D)*** a^2+b^2 ***E)*** 1

Resolución.-

Sea x la cantidad que buscamos, luego por condición del problema se debe establecer que :

$$\left(a^4-b^4\right).x=(a+b)\left(a^3-b^3\right)+(a-b)\left(a^3+b^3\right)$$

Efectuando en el 2do miembro : $\quad = a^4-ab^3+a^3b-b^4+a^4+ab^3-a^3b-b^4$

Reduciendo términos semejantes : $\quad = 2a^4-2b^4$

Sacando factor común 2, queda : $\quad = 2\left(a^4-b^4\right)$

Y por una simple comparación se deduce que : $\boldsymbol{x=2}$ **RPTA. B**

27.- Sabiendo que : $a^3+b^3+c^3=30$; ***calcular :*** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

$a+b+c=3$

$abc=4$

A) $\dfrac{1}{2}$ ***B)*** $\dfrac{1}{3}$ ***C)*** $\dfrac{1}{4}$ ***D)*** 1 ***E)*** 2

Resolución.-

Por los datos condicionales podemos asegurar que será necesario utilizar la equivalencia 4 .6 . Trabajando con la expresión solicitada, tendremos :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc} \quad .... (1)$$

Recordemos la equivalencia 4 .6 :

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3\,(ab + bc + ac)\,(a + b + c) - 3\,abc$$

Reemplazando convenientemente los datos dados, tendremos : $27 = 30 + 9\,(ab + bc + ac) - 3\,.\,4$

De donde podemos despejar la expresión entre paréntesis : $ab + bc + ac = 1$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ **RPTA. C**

28.- Si : $a^3 + b^3 + c^3 = 10$

$a^2 + b^2 + c^2 = 6$

$a + b + c = 4$

Halle el valor de : $a^4 + b^4 + c^4$

A) 8 *B) 16* *C) 10* *D) 18* *E) 12*

Resolución.-

Recordemos los productos notables de los items 4 .3 y 4 .6 :

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2\,(ab + bc + ac) \qquad ..... (*)$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3\,(a + b + c)\,(ab + bc + ac) - 3\,abc \qquad ......(**)$$

Utilizando convenientemente las condiciones dadas, tendremos :

En (*): $4^2 = 6 + 2\,(ab + bc + ac) \Rightarrow ab + bc + ac = 5$

En (**): $4^3 = 10 + 3\,(4)(5) - 3\,abc \Rightarrow abc = 2$

Utilizamos ahora la relación (*) pero con nuevos elementos :

1ro) Con a^2, b^2 y c^2 : $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = a^4+b^4+c^4 + 2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$ ..... (1)

2do) Con ab , bc y ac : $(ab+bc+ac)^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 + 2\,[ab\,.\,bc + bc\,.\,ac + ab\,.\,ac]$

$$(ab+bc+ac)^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 + 2\,abc\,(a + b + c) \qquad ..... (2)$$

Sustituyendo en (2) los valores obtenidos en el paso anterior, tendremos :

$$5^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 + 2\,.\,(2)\,.(4) \Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = 9 \qquad ..... (3)$$

Finalmente utilizamos los datos del problema y lo obtenido en (3) ,en (1) :

$6^2 = a^4+b^4+c^4 + 2\,.(9) \Rightarrow a^4+b^4+c^4 = \boxed{18}$ **RPTA. D**

29.- Calcular el valor de : $\dfrac{\sqrt{(a+b)(c+d+b)}}{b} + \dfrac{\sqrt{(a+c+d)(c+d+b)}}{c+d} + \dfrac{\sqrt{(a+b)(c+d+a)}}{a}$

sabiendo que : $ac + ad + bc + bd + ab = 0$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 0***

Resolución.-

Efectuando el producto en el 1er radical : $\cancel{ac} + \cancel{ad} + \cancel{ab} + \cancel{bc} + \cancel{bd} + b^2 = 0 + b^2$

En el 2do radical : $$\cancel{ac} + \cancel{ad} + \cancel{ab} + c^2 + cd + \cancel{bc} + cd + d^2 + \cancel{bd} = c^2 + 2cd + d^2$$
$$= (c+d)^2$$

Y en el 3er radical : $$\cancel{ac} + \cancel{ad} + a^2 + \cancel{bc} + \cancel{bd} + \cancel{ab} = a^2$$

Reemplazando en la expresión original : $$= \frac{\sqrt{b^2}}{b} + \frac{\sqrt{(c+d)^2}}{c+d} + \frac{\sqrt{a^2}}{a}$$

$$= 1 + 1 + 1 = \boxed{3}$$ **RPTA. C**

30.- Establecer la condición que deben cumplir los coeficientes a, b, c y d en la expresión :

$(a+bx)^2 + (c+dx)^2$ ***, para que resulte un trinomio cuadrado perfecto .***

A) ab = cd ***B) bc = ad*** ***C) a+ b = c + d***

D) b + c = a + d ***E) a = b = c = d = 1***

Resolución.-

Desarrollando los cuadrados de ambos binomios y ordenando :

$$\left(b^2+d^2\right) x^2 + 2\,(ab + cd)\,x + \left(a^2+c^2\right)$$

Para que la expresión dada sea un Trinomio Cuadrado Perfecto el término central debe ser el doble del producto de las raíces de los otros dos términos, por lo tanto :

$$(ab + cd) = \sqrt{b^2+d^2}\ .\ \sqrt{a^2+c^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros y efectuando el producto indicado, se tendrá

$$\cancel{a^2b^2} + 2\,abcd + \cancel{c^2d^2} = \cancel{a^2b^2} + b^2c^2 + a^2d^2 + \cancel{c^2d^2}$$

Transponiendo términos se establecerá que : $b^2c^2 - 2\,abcd + a^2d^2 = 0$

Luego : $(bc-ad)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{bc = ad}$ **RPTA. B**

31.- ¿Cómo se relacionan A y B si : $A = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $B = \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$

A) $B = \dfrac{A^2-1}{A^2+1}$ *B)* $\dfrac{A^2}{B^2} = A^3+1$ *C)* $\dfrac{B}{2} = \dfrac{A^2+1}{A^2-1}$ *D)* $A^2 = \dfrac{B^2+1}{B^2-1}$ *E)* $A^2 = \dfrac{1+2B}{1-2B}$

Resolución.-

Elevando al cuadrado a A, se tendrá : $A^2 = \dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}$ .... (1)

De la expresión de B despejamos : $\sqrt{ab} = B\,(a+b)$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $A^2 = \dfrac{a+b+2B\,(a+b)}{a+b-2B\,(a+b)}$

Factorizando $(a+b)$, nos queda : $A^2 = \dfrac{\cancel{(a+b)}\,(1+2B)}{\cancel{(a+b)}\,(1-2B)}$

Luego de simplificar, obtenemos : $A^2 = \dfrac{1+2B}{1-2B}$ **RPTA. E**

32.- Si : $\dfrac{ab}{a^2+b^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ***, qué valor se obtiene para :*** $E = \left(\dfrac{a}{b}\right)^8 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^8$

A) 23 *B) 25* *C) 47* *D) 39* *E) 95*

Resolución.-

Por dato : $\dfrac{ab}{a^2+b^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Invirtiendo cada miembro : $\dfrac{a^2+b^2}{ab} = \dfrac{5}{\sqrt{5}}$

Racionalizando el segundo miembro : $\dfrac{a^2+b^2}{ab} = \left(\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{5\sqrt{5}}{5}$

Ahora la igualdad será : $\dfrac{a^2}{ab} + \dfrac{b^2}{ab} = \sqrt{5}$

Luego de simplificar se obtiene : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \sqrt{5}$

Elevando al cuadrado ambos miembros, se tendría : $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

Desarrollando el 1er miembro : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 5$

Luego de despejar se concluye : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 3$

Elevando al cuadrado y efectuando en ambos miembros se tendría : $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{a}\right)^4 = 7$

Elevemos al cuadrado a ambos miembros : $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{a}\right)^4\right]^2 = 7^2$

Efectuando el desarrollo del binomio : $\left(\frac{a}{b}\right)^8 + 2 + \left(\frac{b}{a}\right)^8 = 49$

Finalmente, la expresión solicitada será : **E = 47** **RPTA. C**

33.- Sabiendo que : $x = \sqrt[3]{1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}} + \sqrt[3]{1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}$ ***; calcular :*** $E = 5x^3 + 3x + 1$

A) 7 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 11***

Resolución.-

Recordando la equivalencia de Cauchy : $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$

Elevando al cubo a ambos miembros de la igualdad : $x^3 = \left[\sqrt[3]{1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}} + \sqrt[3]{1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}\right]^3$

Desarrollando el 2do miembro según la equivalencia de Cauchy : $x^3 = 2 + 3\sqrt[3]{\left(1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}\right)\left(1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}\right)}\,[x]$

Efectuando la diferencia de cuadrados en el radicando : $x^3 = 2 + 3\sqrt[3]{\frac{125-126}{125}}\,[x]$

Luego de extraer la raíz , obtenemos : $x^3 = 2 - \frac{3x}{5}$

Multiplicando a ambos miembros por cinco : $5x^3 = 10 - 3x$

Transponiendo términos : $5x^3 + 3x = 10$

Sumando uno (1) a ambos miembros : $5x^3 + 3x + 1 = 10 + 1$

$\therefore$ **E = 11** **RPTA. E**

34.- Conociendo : $\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 4abc \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (I) \\ a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac + 1 \;\ldots\ldots\; (II) \end{cases}$

Calcular : $E = \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} - ab - bc - ac$

A) 1 ***B) -1*** ***C) 3*** ***D) -3*** ***E) 5***

Resolución.-

De la relación (I) tenemos : $a^3+b^3+c^3-3\,abc = abc$

Por la equivalencia de Gaüss : $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right) = abc$ .... (1)

Pero de (II) : $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ac+1$

Transponiendo términos : $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac = 1$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $(a+b+c)\,(1) = abc$

Esto significa que : $a+b+c = abc$ .... (3)

Sumando 3 a lo que nos piden : $E+3 = \underbrace{\dfrac{a+b}{c}+1}+\underbrace{\dfrac{a+c}{b}+1}+\underbrace{\dfrac{b+c}{a}+1}-ab-bc-ac$

Efectuando lo indicado con llaves :

$$E+3 = \frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}-ab-bc-ac \quad .... (4)$$

Reemplazando (3) en (4) :

$$E+3 = \frac{abc}{c}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{a}-ab-bc-ac \quad \Rightarrow \quad E+3 = ab+ac+bc-ab-bc-ac$$

Eliminando términos semejantes : $E+3=0$

Finalmente se obtiene : $\boxed{E=-3}$ **RPTA. D**

35.- Si : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ ***; proporcionar el equivalente de :*** $T=\dfrac{(a+b)^6-6(a^6+b^6)}{(ab)^3}$

A) 7 ***B) -7*** ***C) 9*** ***D) -9*** ***E) -11***

Resolución.-

Efectuando en el dato : $(a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2+b^2 = -ab$

Elevando al cubo : $\left(a^2+b^2\right)^3 = (-ab)^3$. Por Cauchy : $a^6+b^6+3\,a^2b^2\,(-ab) = -a^3b^3$

Luego : $a^6+b^6 = 2\,a^3b^3$. No olvidar : $(a+b)^2 = ab$

Ahora en "T" : $$T = \frac{\left[(a+b)^2\right]^3-6(a^6+b^6)}{a^3b^3}$$

Reemplazando : $$T = \frac{(ab)^3-6\,(2a^3b^3)}{a^3b^3} = \frac{a^3b^3-12\,a^3b^3)}{a^3b^3}$$

Reduciendo y simplificando se tendría : $\boxed{T=-11}$ **RPTA. E**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- La expresión $(1+x)^2$ equivale a :

A) $(x+1)(x^2-x+1)$ B) $(1+x)(1+x+x^2)$

C) $(1+x)(1+2x+x^2)$ D) $(x-1)(x^2+x+1)$

E) N.A.

2.- El trinomio x^2+2x+1 es equivalente a :

A) $x(x+2)$ B) $x^2(x+1)$

C) $(x+1)2$ D) $(x+1)(x-1)$

E) N.A.

3.- Si: $s=-t$; entonces $(x-s)(x-t)$ equivale a :

A) x^2-st B) x^2-t^2 C) x^2-2st

D) $(x+st)^2$ E) $x^2-xt-xs-st$

4.- x^3+27 se puede expresar como :

A) $(x+3)(9x^2-3x+9)$

B) $(x+3)^3$

C) $(x^2-3x+9)(x+3)$

D) $(x^2+3x+9)(x+3)$

E) N.A.

5.- ¿Cuál es el resultado de efectuar : $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2$?

A) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ B) 10 C) $10+2\sqrt{21}$

D) $10+\sqrt{21}$ E) 100

6.- Efectuar : $(2x+3y-z)^2$

A) $4x^2+9y^2+z^2+12xy+4xz+6yz$

B) $4x^2+9y^2+z^2+12xy-4xz-6yz$

C) $4x^2+9y^2-z^2+12xy-4xz-6yz$

D) $4x^2-9y^2-z^2+12xy-4xz-6yz$

E) N.A.

7.- Efectuar : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$

A) $2x$ B) $2y$ C) $4\sqrt{xy}$

D) $2\sqrt{xy}$ E) $2x+2y$

8.- Efectuar : $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

A) 0 B) a C) $4ab$

D) $-4ab$ E) N.A.

9.- Efectuar : $\left(a^{1/2}-b\right)\left(a^{1/2}+b\right)\left(a+b^2\right)$

A) $a-b^2$ B) a^2-b^2 C) a^2+b^4

D) a^2-b^4 E) N.A.

10.- Efectuar : $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)$

A) 10 B) 5 C) $\sqrt{10}$

D) 1 E) $\sqrt{13}$

NIVEL B

11.- ¿Cuáles de las siguientes igualdades son FALSAS?

I) $a^2+b^2=(a+b)^2$

II) $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2-b^2\right)$

III) $(a-b)^3=a^3-b^3$

IV) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

A) I y III B) II y IV C) II y III
D) I, II y III E) I, II, III y IV

12.- $48\,976^2-48\,973^2$ es igual a :

A) 323 647 B) 293 847 C) 333 647
D) 294 847 E) N.A.

13.- Si $a-b=b-c=2$, hallar el valor de :

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

14.- La sexta potencia de : $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ es :

A) 4 B) 64 C) 81 D) 27 E) 216

15.- Efectuar :

$$\left(x^2+x+6\right)\left(x^2+x-3\right)-\left(x^2+x+9\right)\left(x^2+x-6\right)$$

A) 12 B) 18 C) 15 D) 36 E) 45

16.- El primero y el último término de un trinomio cuadrado perfecto son $36x^2$ y $4y^2z^2$. ¿Cuál de los siguientes podría ser el término central?

A) $24xyz$ B) $2xyz$ C) $12x^2y^2z^2$

D) $12xyz$ E) $6x^2yz$

17.- Si $x^2-3x+2\equiv(x-k)^2+p$ ¿Cuál es el valor de p?

A) $-\frac{1}{4}$ B) 2 C) 3 D) -2 E) 1

18.- Hallar el valor de : $(a+b)(b+c)(a+c)$

A partir de estas condiciones : $a+b+c=6$

$a^3+b^3+c^3=24$

A) 64 B) 32 C) 16 D) 8 E) 4

19.- Efectuar :

$$\left(1+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20.- Si $a+b+c=0$, hallar el valor de :

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$$

A) 3 B) -3 C) 1 D) 0 E) 6

21.- Calcular el valor de $x^5+\frac{1}{x^5}$, sabiendo que $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=243$

A) 123 B) 63 C) 241 D) 27 E) 243

22.- Sea S la suma de dos números, y P su producto. Expresar la suma de los cubos de dichos números en función de S y P.

A) S^2-SP B) $S\left(S^2-3P\right)$ C) $S\left(S^2-SP\right)$

D) S^2+SP E) $S^2(S-P)$

23.- Si : $xy=b$; $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=a$, entonces $(x+y)^2$ es igual a :

A) $(a+2b)^2$ B) a^2+b^2 C) $b(ab+2)$

D) $ab(b+2)$ E) $\frac{1}{a}+2b$

24.- Sabiendo que :

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\ ,$$

calcular : $\sqrt{\dfrac{x^5+y^5+z^5}{(x+y+z)^5}}$

A) 9 B) 3 C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

25.- Efectuar :

$$(a^2+a+1)\ (a^2-a+1)\ (a^4-a^2+1)$$

A) a^8+3a^4+1 B) a^8-a^4+1

C) a^4+a^2+1 D) a^8+a^4+1

E) a^8+a^4-1

NIVEL C

26.- Si : $(a+b)^2+(a-b)^2=4ab$, hallar el valor de : $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}+\dfrac{a^3-b^3}{3ab}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) -1

27.- Si : $x=\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}$, calcular :

$$x^3-3x+4$$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

28.- ¿A qué es igual $\sqrt{(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$?

A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) 1

D) $\sqrt{5}-1$ E) $2+\sqrt{3}$

29.- Efectuar :

$$\left(2^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{4}}\left(3+8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{8}}$$

A) 1 B) $2^{\frac{1}{2}}$ C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $2^{\frac{1}{2}}+1$

30.- Efectuar :

$$(a+b+c)^3-(a+b)^3-3c\,(a+b+c)\,(a+b)$$

A) a^3 B) c^3 C) b^3 D) $8c^3$ E) N.A.

31.- Si : $a+b+c=0$, hallar el equivalente de :

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)}{a^5+b^5+c^5}$$

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

32.- Efectuar :

$$(a+b+c)^4+a^4+b^4+c^4-(a+b)^4$$
$$-(b+c)^4-(a+c)^4$$

A) $12abc(a+b+c)$ B) $3abc(a+b+c)$

C) $a^2+b^2+c^2$ D) $(a+b+c)^2-abc$

E) $ab+bc+ac$

33.- Si se sabe que : $x^3+y^3=a$; $x^2+y^2=b$; $x+y=c$, calcular : x^3-y^3

A) $\dfrac{2ab-c}{c}\sqrt{\dfrac{2a-b}{c}}$ B) $\dfrac{2bc-a}{c}\sqrt{\dfrac{2a-bc}{c}}$

C) $\dfrac{2ab-c}{c}\sqrt{\dfrac{2bc-a}{c}}$ D) $\dfrac{2bc-a}{b}\sqrt{\dfrac{2a-bc}{a}}$

E) $\dfrac{2bc-a}{b}\sqrt{\dfrac{2a-bc}{a}}$

34.- Efectuar : $(x^2+x+1)\,(x^2-x+1)$

$(x^4-x^2+1)\,(x^8-x^2+1)$ ..... n factores

A) $x^{2n}+x^{2n-1}+1$ • B) $x^{n}+x^{n-1}+1$

C) $x^{2^n}+x^{2^{n-1}}+1$ D) $x^{2n}-x^{2n-1}+1$

E) $x^{n^2}+x^{n}+1$

35.- Sea $y=(x-a)^2+(x-b)^2$ con a, b constantes.

El valor de y es mínimo cuando x es igual a :

A) $\dfrac{a+b}{2}$ B) $a+b$ C) $\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ E) $\dfrac{2ab}{a+b}$

36.- Proporcionar la raíz cuadrada de :

$$\frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)^2-(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2)}$$

A) $a+b+c$ B) $ab+bc+ac$

C) $a^2+b^2+c^2$ D) $2(ab+bc+ac)$

E) $a^2+2b^2+c^2$

37.- Si : $F(x)\equiv\sqrt[6]{\dfrac{x^{10}+5x^5+1}{x^5}}$

calcular : $F(2+\sqrt{3})$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

38.- Si : $x, y \wedge z$ son número reales :

$$x^3+y^3+z^3=3xyz\ ;\ x+y+z\neq 0$$

Halle el valor de : $\sqrt{\dfrac{x^3+y^3+z^3}{(x+y+z)^3}}$

A) 1 B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{4}{3}$ E) 3

39.- Conociendo : $x^2-3x+1=20$; calcular el valor de : $\left[x^x+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]\left[x^{\frac{1}{x}}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]$

A) 18 B) 20 C) 16 D) 22 E) 24

40.- Si : $x+y+z+w=2a$

Simplificar :

$$\frac{(a-x)^2+(a-y)^2+(x-z)^2+(a-w)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2+(z-w)^2+(z-w)^2}$$

A) 1 B) 2 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\dfrac{1}{2}$ E) -1

41.- Si : $a+b+c=5$

$$a^2+b^2+c^2=41$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=184$$

calcular : $a^3+b^3+c^3$

A) 12 B) 256 C) 169

D) 300 E) 209

42.- Si : $a^2+b^2+c^2=6$

$$a^3+b^3+c^3=-8$$

$$abc=2$$

calcular : $a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3$

A) -1 B) 27 C) -8 D) 8 E) 0

43.- Si : $\{x\,;y\,;z\}\subset\mathbb{R}$ proporcionar el máximo valor de : $x+2y+3z$, sabiendo que :

$$7\left(x^2+y^2+1\right)=9-7z^2$$

A) 4 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 2 E) 14

44.- Si : $a = 1 + \sqrt[4]{2}$ $\wedge$ $b = 1 - \sqrt[4]{2}$; hallar el V.N. de:

$$\frac{(b^2-2b+2)(b-2)(2-a)}{4ab(a^2+b^2)(a^4+6a^2b^2+b^4)}$$

A) 192 B) $\frac{1}{192}$ C) - 192

D) $-\frac{1}{192}$ E) $\frac{1}{912}$

45.- Si : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 45$; hallar : $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2$

A) 15 625 B) 16 525 C) 156 250

D) 12 565 E) 16 552

46.- Si se cumple : $x+b+c=3a$

$y+c+a=3b$

$z+a+b=3c$;

calcular el valor de :

$$\frac{(x^2-yz)x+(y^2-zx)y+(z^2-xy)z}{a(a^2-bc)+b(b^2-ac)+c(c^2-ab)}$$

A) 1 B) 0 C) 4 D) 16 E) abc

47.- ¿Qué valor se obtiene para :

$$\frac{(ab)^3(ab+1)+(bc)^3(bc+1)+(ac)^3(ac+1)}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+3},$$

si se sabe que: $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$; $abc \neq 0$?

A) 1 B) abc C) $(abc)^2$ D) a^2 e) bc

78.- Sabiendo que : $a+b+c=1$

$ab+bc+ac=2$;

determinar el valor de :

$$3\,(a^4+b^4+c^4) - 4\,(a^3+b^3+c^3)$$

A) 0 B) -1 C) 23 D) 17 E) 6

49.- Si : $\{a\,;b\,;c\,;x\,;y\,;z\} \subset \mathbb{R}$ /

$(a+b+c)^2 = 3\,(ab+bc+ac-x^2-y^2-z^2)$;

calcular el valor de :

$$\left[\frac{a^7+b^7+c^7}{(a^5+b^5+c^5)(a^2+b^2+c^2)}\right](x^3+y^3+z^3+9)$$

A) 1 B) a^3 C) x^3 D) 3 E) 0

50.- Si : $\{a\,;b\,;c\} \subset \mathbb{R}$ /

$a^4+b^4+c^4=98$

$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=49$

$ab+bc+ac=-7$;

calcular el valor numérico de :

$$\frac{(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3}{abc}$$

A) 8 B) -6 C) -24 D) -12 E) 9

51.- Si : $a\sqrt{a} = 3$; determinar el valor de :

$$\frac{4a^3\sqrt{a^3+a^6}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{a^6}}$$

A) $9\sqrt{10}$ B) 9 C) $\sqrt{90}$ D) $\sqrt{10}$ E) 1

52.- Sabiendo que: $a=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$

$b=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$

proporcionar el equivalente de :

$$\frac{a^4(a^2-3b^2)+b^4(3a^2-b^2)}{64}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

53.- Si se verifica : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = -a^{-1}-z^{-1}$

$xyz=-a^3$;

siendo : $xyza \neq 0$, calcular el V.N. de:

$$\frac{(x^2+a^2)(y^2+a^2)(z^2+a^2)}{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}$$

A) 1 B) 3 C) 4 D) 2 E) 5

5 Divisiones Algebraicas

5.1) ALGORITMO DE LA DIVISION

Si $D(x)$ y $d(x)$ son dos polinomios y $d(x) \neq 0$ existen dos polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ tales que :

$$D(x) \equiv d(x) \, . \, Q(x) + R(x)$$

En donde : $D(x)$: dividendo ; $d(x)$: divisor

$Q(x)$: cociente ; $R(x)$: residuo

Es necesario saber que $R(x)$ tiene menor grado que $d(x)$, o , bien $R(x) \equiv 0$

Si dividimos ambos lados de la identidad entre $d(x)$, obtenemos la llamada *Forma Racional* de la división.

$$\frac{D(x)}{d(x)} \equiv Q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

5.1a.- División exacta :

Si $R(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad D(x) \equiv d(x) \, . \, R(x)$

En este caso también se afirma que $D(x)$ es *divisible* por $d(x)$.

5.1.b.- División inexacta :

En este caso, el residuo no es nulo ; $R(x) \neq 0$

5.1c.- Propiedades relativas al grado :

$$[Q(x)]^{\circ} = [D(x)]^{\circ} - [d(x)]^{\circ}$$

$$[R(x)]^{\circ}_{máx} = [d(x)]^{\circ} - 1$$

5.2) METODOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS

Para realizar una división entre dos polinomios existen varios métodos, algunos más usados o convenientes que otros. Entre los más difundidos tenemos :

El método CLASICO; el método de COEFICIENTES SEPARADOS, el método de COEFICIENTES INDETERMINADOS, el método de HORNER y el método de RUFFINI. En este texto sólo expondremos los más importantes.

5.3) METODO CLASICO

Se recomienda cuando los polinomios a dividir son de una sola variable ó para polinomios homogéneos de dos variables. El procedimiento es el siguiente :

1.- Ordenar tanto el dividendo como el divisor según las potencias decrecientes de la variable.

2.- En caso de faltar una potencia de la variable se coloca en su lugar el término faltante con coeficiente cero.

3.- Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.

4.- Multiplicar el divisor con signo cambiado por los términos del cociente y sumar ordenadamente el producto obtenido con el dividendo.

5.- Tratar el resto obtenido en el paso 4, como si fuera un nuevo dividendo y repetir los pasos 3 y 4.

6.- Continuar este proceso hasta que el resto obtenido sea tal que su grado resulte menor que el del divisor (o que sea cero), dando el proceso como terminado.

Ejemplo : Dividir $x^2 + 2x^4 - 3x^3 + x - 2$ entre $x^2 - 3x + 2$

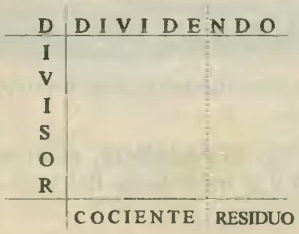
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -3x^3 & +x^2 & +x & -2 & x^2-3x+2 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +6x^3 & -4x^2 & & & 2x^2+3x+6 \\ \cline{1-3}
 & 3x^3 & -3x^2 & +x & -2 & \\
 & -3x^3 & +9x^2 & -6x & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x^2 & -5x & -2 & \\
 & & -6x^2 & +18x & -12 & \\ \cline{3-5}
 & & & 13x & -14 &
\end{array}
$$

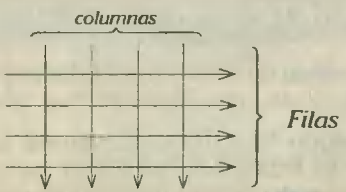
$$\therefore \; D(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)\left(2x^2 + 3x + 6\right) + 13x - 14$$

$$Q(x) = 2x^2 + 3x + 6 \;\; , \;\; y \;\; , \;\; R(x)\ 13x - 14$$

5.4) METODO DE HORNER

Se recomienda cuando el polinomio divisor es de segundo grado o más y se opera solo con los coeficientes de los polinomios ordenados y completos. Dichos coeficientes se distribuyen en un cuadro como el siguiente :





El procedimiento se detalla a continuación :

1.- Se anotan los coeficientes del dividendo en la parte superior del cuadro en forma horizontal.

2.- Se anotan los coeficientes del divisor en la parte izquierda del cuadro en forma vertical con los *signos cambiados* a excepción del primero.

3.- La línea de trazos separa al cociente (Q) del residuo (R) y para su trazo solo se considera el grado del divisor (d) . En el cociente se cuentan tantos términos como $D° - d° + 1$.

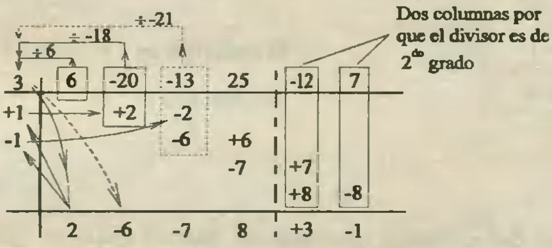
4.- El primer término del cociente (Q) se obtiene dividiendo el primer coeficiente de (D) entre el primer coeficiente de (d).

5.- Este primer coeficiente de (Q), multiplica a los demás coeficientes de (d) que cambiaron de signo y los resultados se escriben en forma horizontal a partir de la siguiente columna hacia la derecha.

6.- Las cantidades que se encuentran en la segunda columna se suman y el resultado se divide entre el primer coeficiente de (d), repitiéndose el procedimiento hasta coincidir con la última columna del dividendo.

7.- Para acabar, se suman directamente las columnas correspondientes al residuo, lo que conformará los coeficientes del polinomio residuo.

Ejemplo : Dividir $6x^5 - 20x^4 - 13x^3 + 25x^2 - 12x + 7$ entre $3x^2 - x + 1$



$\therefore\ Q(x) = 2x^3 - 6x^2 - 7x + 8$

$R(x) = 3x - 1$

5.5) METODO DE RUFFINI

Se recomienda usar este método cuando el divisor tiene la forma $ax \pm b$. Se considera como un caso particular del método anterior.

	DIVIDENDO	
□	↓	
	COCIENTE	RESTO

donde □ es el resultado de resolver la ecuación $ax \pm b = 0$.

El procedimiento es el siguiente :

1.- Se anotan los coeficientes del dividendo en forma horizontal.

2.- Se anota el valor de □ , que es el resultado de resolver la ecuación ya mencionada.

3.- Se baja el primer coeficiente del dividendo y se multiplica por el valor de □ , el resultado se anota en la siguiente columna, debajo del segundo coeficiente del dividendo.

4.- Se suman las cantidades de la segunda columna y se sigue el mismo procedimiento hasta obtener un término debajo del último coeficiente del dividendo.

5.- El residuo es la suma de cantidades de la última columna.

Ejemplo : $(a = 1)$; divisor de la forma $d(x) = x \pm b$.

Dividir $2x^3 + 5x^2 + 10x - 8$ entre $x + 3$.

(*) Se iguala el divisor a cero : $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 10 & -8 \\ -3 & & -6 & 3 & -39 \\ \hline & 2 & -1 & 13 & \boxed{-47} \end{array}$$

El cociente es : $2x^2 - x + 13$ y el residuo es - 47.

Ejemplo : $(a \neq 1)$; divisor de la forma $d(x) = ax \pm b$.

Dividir $2x^3 + x^2 - 3x + 5$ entre $2x - 1$

(*) Se iguala a cero el divisor : $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1/2 & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & \boxed{4} \end{array}$$

$$\div 2 \qquad \underbrace{1 \quad 1 \quad -1}_{cociente}$$

El cociente es : $x^2 + x - 1$

y el residuo es : 4

Observamos que los coeficientes del cociente obtenido se dividen entre el primer coeficiente del divisor para obtener el cociente verdadero.Esto se debe a que :

$$D(x) = (ax + b) \,.\, Q(x) + R$$

$$D(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) . \underbrace{a\,Q(x)} + R \Rightarrow a\,Q(x) = Q_1(x)$$

$$\therefore \quad Q(x) = \frac{Q_1(x)}{a}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Si al polinomio $3x^5 + 6x^3 - 3x$ se le divide entre $x + 1$ se obtiene un cociente de grado "m", término constante "b" y residuo "a". Hallar m + b + a.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 PUCP 96-II

Resolución.-

Puesto que el divisor es de la forma $(x \pm a)$, dividimos por el método de Ruffini; para lo cual será necesario completar el dividendo así :

$$P(x) = 3x^5 + 0x^4 + 6x^3 + 0x^2 - 3x + 0$$

Y haciendo : $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Luego :

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 3 & 0 & 6 & 0 & -3 & 0 \\
-1 & & -3 & 3 & -9 & 9 & -6 \\
\hline
 & 3 & -3 & 9 & -9 & 6 & \underline{-6}
\end{array}$$

Cociente : $3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 9x + 6$; Resto = - 6

Grado : $m = 4$; término constante $b = 6$; y el resto es : $a = -6$

$\therefore \quad m + b + a = 4 + 6 - 6 = \boxed{4}$ **RPTA. D**

2.- Al dividir $6x^5 + 5x^4 - 26x^3 + 33x^2 - 24x + 6$ entre $2x^2 - 3x + 1$, la suma de los coeficientes del cocientes es :

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

Resolución.-

En primer lugar debemos reconocer que el divisor es un polinomio de 2[do] grado, por consiguiente es conveniente aplicar el método de HORNER dado que éste es más práctico y directo. Veamos :

$$d\begin{cases}\begin{array}{r|rrrr:rr}
2 & \overbrace{6 & 5 & -26 & 33 & -24 & 6}^{P} \\
\hline
3 & & 9 & -3 & & & \\
-1 & & & 21 & -7 & & \\
 & & & & -12 & 4 & \\
 & & & & & 21 & -7 \\
\hline
 & \underbrace{3 & 7 & -4 & 7}_{Q} & \underbrace{1 & -1}_{R}
\end{array}\end{cases}$$

Cociente : $3x^3 + 7x^2 - 4x + 7$;

Residuo : $x - 1$

Σ coef.del cociente : $3 + 7 - 4 + 7 = \boxed{13}$

RPTA. B

3.- Para efectuar una división según el método de Ruffini, se planteó el siguiente esquema :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -3 & -b & a \\ x = 2a^2 & & 8a & c & m \\ \hline & 4 & b & d & \boxed{n} \end{array}$$

, determinar el resto.

A) 11 *B) 13* *C) 12* *D) 10* *E) 21*

Resolución.-

Del esquema dado, se debe cumplir que : $4 \cdot 2a^2 = 8a \Rightarrow a = 1$ ... (1)

Asimismo : $-3 + 8a = b \Rightarrow b = 5$ ... (2)

También debe verificarse que : $c = b \cdot 2a^2$ .... (*)

Luego, reemplazando (1) y (2) en (*) : $c = 10$ ... (3)

A continuación se establece que : $-b + c = d$ .... (**)

Reemplazando (2) y (3) en (**) : $d = 5$ ...(4)

Seguidamente reconocemos que : $m = d \cdot 2a^2 \Rightarrow m = 10$

Finalmente en la columna del resto : $a + m = n \Rightarrow 1 + 10 = n$

$\Rightarrow n = 11$ $\therefore$ **El resto es 11** **RPTA. A**

4.- Si la división : $(6x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 10x + a) \div (3x^2 + 2x + b)$

es exacta, entonces el valor de $a^2 + b^2$ ***, es :***

A) 150 *B) 250* *C) 120* *D) 650* *E) 200*

Resolución.-

Resulta claro que el método a utilizar es el de HORNER, pues éste nos permitirá sumar las columnas del resto, las mismas que deberán ser iguales a cero, dado que la división es exacta. Veamos :

$\div\ -5-2b$

$$\begin{array}{r|rrr|rr} 3 & 6 & 4 & \boxed{-5} & -10 & a \\ \hline -2 & & -4 & -2b & & \\ -b & & & 0 & 0 & \\ & & & & \dfrac{10+4b}{3} & \dfrac{-b(-5-2b)}{3} \\ \hline & 2 & 0 & \dfrac{-5-2b}{3} & 0 & 0 \end{array}$$

1ro) $\dfrac{10+4b}{3} - 10 = 0 \Rightarrow 10 + 4b = 30$

$\Rightarrow b = 5$ .... (*)

2do) $\dfrac{b(5+2b)}{3} + a = 0$

Utilizando el resultado de (*), obtenemos : $\dfrac{5[5+2(5)]}{3} + a = 0 \Rightarrow a = -25$

$\therefore a^2 + b^2 = $ **650** **RPTA. D**

5.- Para que la división de $x^4 + a\,x^2 + b$ entre $x^2 + x + 1$ sea exacta, los valores de a y b deben ser :

A) 1; -1 **B) 1;-2** **C) -2; 1** **D) -1; 1** **E) 1; 1** **UNMSM 90**

Resolución.-

Utilizando el método de Horner, tendremos :

1	1	0	a	- 0	b
-1		-1	-1		
-1			1	1	
				$-a$	$-a$
	1	-1	a	$(1-a)$	$(b-a)$

Si la división es exacta, entonces el resto debe ser cero. Esto implica que :

$$1 - a = 0 \quad ; \quad b - a = 0$$

Resolviendo : $a = 1$; $b = 1$

RPTA. E

6.- Qué valor adquiere : $\dfrac{n+19}{k+1}$, si la división $\dfrac{x^{19} - nx + k}{x^2 - 2x + 1}$ es exacta.

A) 1 **B) 2** **C) 19** **D) 38** **E) 4**

Resolución.-

Reconociendo a los elementos de la división, completaremos el polinomio dividendo :

$D(x) \equiv x^{19} + 0x^{18} + 0x^{17} + ... + 0x^2 - nx + k$

$d(x) \equiv x^2 - 2x + 1 \quad \wedge \quad R(x) \equiv 0$ (división exacta)

Efectuemos la división por el método de Horner.

18 coeficientes

1	1	0	0	0	0	....	0	0	$-n$	k
2		2	-1							
-1			4	-2						
				6	-3					
								34	-17	
									36	-18
	1	2	3	4		...por inducción...	17	18	0	0

En las columnas del residuo, se deberá cumplir que :

1) $-n - 17 + 36 = 0 \Rightarrow n = 19$

2) $k - 18 = 0 \Rightarrow k = 18$

Finalmente se tendrá que : $\dfrac{n+19}{k+1} = 2$ **RPTA. B**

5.6) TEOREMA DEL RESTO

Este teorema se emplea para hallar directamente el resto en la división, sin necesidad de efectuar toda la operación. El divisor debe ser de la forma $ax + b$ ó transformable a ella.

1°) Se iguala el divisor a cero, encontrándose un valor para la variable.

$$[ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -b/a]$$

2°) El valor hallado se reemplaza en el dividendo, obteniéndose así el residuo.

$$\boxed{\mathbf{R = D\left(-\frac{b}{a}\right)}}$$

Demostración :

Del algoritmo de la división tenemos : $D(x) \equiv d(x) \,.\, Q(x) + R$

Pero : $d(x) \equiv (ax+b)$, luego : $D(x) \equiv (ax + b) \,.\, Q(x) + R$

Finalmente reemplazando $x = -\frac{b}{a}$, y efectuando se tendría :

$$D\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a \,.\left(-\frac{b}{a}\right) + b\right] Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R$$

$$D\left(-\frac{b}{a}\right) = [0] \,.\, Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R$$

$$\therefore \quad R = D\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo.- Hallar el resto de dividir $P(x) = 3x^2 + x + 1$ entre $2x - 4$

Procedemos así :

1°) Igualamos a cero el divisor : $2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

2°) Sustituimos $x = 2$ en el el dividendo : $R = P(2) = 3(2)^2 + (2) + 1 = 15$

$\therefore$ el resto es $P(2) = 15$

Ejemplo.- El resto de dividir $x^6 - 3x^3 + 5$ entre $x^3 - 1$

Preparando el dividendo por medio de una transformación, tendremos :

1°) Hacemos : $P\left(x^3\right) = \left(x^3\right)^2 - 3\left(x^3\right) + 5$

2°) $x^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 1$

3°) $R = P(1) = 1^2 - 3(1) + 5 = 3.$

5.7) DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA

Un polinomio $P(x)$ es divisible por otro polinomio $d(x)$, si existe otro polinomio $Q(x)$ tal que :

$$\frac{P(x)}{d(x)} \equiv Q(x) \quad ó \quad P(x) \equiv d(x) \,.\, Q(x)$$

Se afirma que $P(x)$ es divisible por $d(x)$ si el cociente $Q(x)$ es exacto y se dice que $Q(x)$ es un factor o divisor de $P(x)$.

Criterios de Divisibilidad :

1[ra]) Si un polinomio $P(x)$ se anula para $x = a$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x - a)$.

2[da]) Si un polinomio $P(x)$ es divisible entre varias expresiones por separado, entonces será divisible por el producto de dichas expresiones siempre y cuando éstas admitan como único factor común a la unidad :

$$P(x) \div (x - a) \text{ es exacto y } P(x) \div (x - b) \text{ es exacto } / \, a \neq b$$

Entonces : $\dfrac{P(x)}{(x-a)(x-b)}$ es exacto . $(R = 0)$

3[ra]) Si un polinomio es divisible entre el producto de varias expresiones, las cuales admitan como único factor común a la unidad, dicho polinomio será divisible por cada una de estas expresiones.

4[ta]) Para que la división de un polinomio entre otro sea una expresión entera, es necesario (aunque no suficiente) que, después de ordenados el dividendo y el divisor, el primero y el último término del dividendo sean respectivamente divisibles entre el primero y el último término del divisor.

Ejemplo.- ¿ Qué valor debe tener a para que $x \pm a$ sea divisor del polinomio $x^2 + 2x + 1$?

De acuerdo con el 4[to] Criterio de Divisibilidad, los divisores solo pueden ser $(x + 1)$ ó $(x - 1)$

$P(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0$

$P(1) = 1^2 + 2(1) + 1 = 4$

Entonces, $x^2 + 2x + 1$ tan sólo es divisible entre $x + 1$ y el valor que debe tomar a es 1.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

7.- Hallar el valor de k para que el polinomio : $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$, sea divisible entre : $x - 2$

A) -13 B) 13 C) 15 D) -14 E) -15

<u>Resolución</u>.-

Dado que el divisor es un binomio de la forma : $x \pm a$; tenemos la oportunidad de aplicar dos métodos diferentes para llegar a la misma respuesta. Veamos :

1ro) **<u>Por Ruffini</u>.-** Procedemos a dividir tal como lo indica el método :

$$\begin{array}{c|cccc} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{3cm}}^{P(x)}} \\ & 1 & 2 & -1 & k \\ 2 & & 2 & 8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & \boxed{k+14} = R \end{array}$$

P (x) será divisible por $(x - 2)$ si y solo si el resto R es igual a cero . Luego :

$$k + 14 = 0$$

$$\therefore \quad k = -14$$

2do) **<u>Por el teorema del resto</u>.-** Si P (x) es divisible por $(x - 2)$, entonces el resto : R = P (2), debe ser igual a cero. Luego :

$$P(2) = 0$$

$$\therefore \quad 2^3 + 2.\,2^2 - 2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -14$$ **RPTA. D**

8.- Hallar el resto de dividir $3x^5 - x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 7x + 22$ entre $x + 1$

A) -10 B) - 8 C) 8 D) 10 E) N.A. UNALM 90-II

<u>Resolución</u>.-

Desde que el divisor es un binomio de la forma $(x \pm a)$, aplicaremos el Teorema del Resto , para determinar el resto de un modo directo. Veamos :

Según el teorema del resto debemos hacer : $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

A continuación calcularemos el valor numérico de P (x) con $x = -1$

$$R = P(-1) = 3\,.\,(-1)^5 - (-1)^4 + 12(-1)^3 - 9(-1)^2 + 7(-1) + 22$$

$$R = -3 - 1 - 12 - 9 - 7 + 22$$

$$\therefore \quad R = -10$$ **RPTA. A**

9.- El valor que debe tener m para que el polinomio : $x^3 + m x^2 + nx - 6$ sea divisible por el trinomio : $x^2 - 5x + 6$, es :

A) - 6 B) 11 C) 6 D) - 5 E) - 11 UNMSM 92

Resolución.-

En este ejercicio trataremos de aplicar el 2[do] Criterio de Divisibilidad, para lo cual será necesario descomponer al divisor en factores. Veamos :

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

De este modo diremos que si el polinomio dado es divisible por $x^2 - 5x + 6$, debe ser divisible separadamente por $x - 3$ y por $x - 2$. A continuación aplicaremos el teorema del resto en ambos casos :

1[ro]) Divisible por $x - 3 \Rightarrow P(3) = 0$

$$3^3 + m \cdot 3^2 + n \cdot 3 - 6 = 0 \Rightarrow 3m + n = -7 \ .... (1)$$

2[do]) Divisible por $x - 2 \Rightarrow P(2) = 0$

$$2^3 + m \cdot 2^2 + n \cdot 2 - 6 = 0 \Rightarrow 2m + n = -1 \ ....(2)$$

Resolviendo (1) y (2) , encontramos : $n = 11$ y $m = -6$ **RPTA. A**

10.- En el polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - mx + \frac{15}{4}$ ¿Cuál es el valor de "m" para que P(x) sea divisible por 2x - 1?

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{7}{25}$ C) $\frac{75}{8}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$ UPCH 89

Resolución.-

Aplicando el teorema del resto, hacemos : $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

A continuación calcularemos el resto a partir de $P\left(\frac{1}{2}\right)$; veamos :

$$R = P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - m \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{75 - 8m}{16} = 0 \qquad \therefore \quad m = \frac{75}{8}$$ **RPTA. C**

11.- Al dividir un polinomio P(x) separadamente por (x - 1) y (x - 2) se obtiene como restos 6 y 18 respectivamente. Determinar el resto que se obtendrá al dividir el polinomio P(x) por el producto : (x - 1) . (x - 2)

A) 3x - 12 B) 2x - 12 C) 6x - 12 D) x - 6 E) 12x - 6

<u>Resolución</u>.-

Al dividir $P(x)$ por $(x-1).(x-2)$, el resto deberá ser de primer grado, es decir, será de la forma: $R(x) \equiv ax + b$

Ahora por el algoritmo de la división tendremos que :

$P(x) \equiv (x-1).(x-2).Q(x) + ax + b.$

De los datos : $P(1) = 6 \Rightarrow a + b = 6$

$P(2) = 18 \Rightarrow 2a + b = 18$

Resolviendo : $a = 12$, y , $b = -6 \Rightarrow$ **$R(x) = 12x - 6$** **RPTA. E**

12.- Calcular el resto de dividir $x^{160} + x^5 + 2x^{13} - 1$ entre $x^4 - 1$.

A) 3x ***B) 2x-1*** ***C) 4x*** ***D) 2x+1*** ***E) 3x-1***

<u>Resolución</u>.-

Nuestra estrategia consistirá en transfomar el dividendo $P(x)$ en términos de x^4 , dado que al hacer un cambio de variable : $x^4 = y$, el divisor pueda ser de la forma : $y - 1$, con lo cual se podrá aplicar el Teorema del Resto de un modo directo. Veamos :

$$P(x) = x^{160} + x^5 + 2x^{13} - 1$$

$$\Rightarrow P\left(x^4\right) = \left(x^4\right)^{40} + x\left(x^4\right) + 2\left(x^4\right)^3 . x - 1 \quad .... (*)$$

Por el Teorema del Resto, hacemos : $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1$

Ahora calculamos el resto R, a partir de (*) así : $P\left(x^4\right) = P(1)$

$$\Rightarrow R = P(1) = 1^{40} + x . 1 + 2 . 1^3 . x - 1$$

$\therefore$ **Resto = $3x$** **RPTA. A**

5.8) COCIENTES NOTABLES

Son resultados de divisiones de la forma conocida $(x^n \pm y^n) \div (x \pm y)$, que se pueden escribir en forma directa sin efectuar la división misma .

Ejemplo.- Si se aplica el teorema del residuo a las divisiones de $(x^7 \pm y^7) \wedge x^8 \pm y^8$ por $(x \pm y)$, se tiene :

1ro) Para el divisor $x + y$

Dividendo	**divisor**	**Residuo**
x^7+y^7		$-y^7+y^7=0$
x^7-y^7	$x+y$	$-y^7-y^7=-2y^7$
x^8+y^8		$+y^8+y^8=2y^8$
x^8-y^8		$+y^8-y^8=0$

Se deduce que (x^7+y^7) y (x^8-y^8) son divisibles entre $(x + y)$.

2do) Para el divisor $x - y$

Dividendo	**divisor**	**Residuo**
x^7+y^7		$y^7+y^7=2y^7$
x^7-y^7	$x-y$	$y^7-y^7=0$
x^8+y^8		$y^8+y^8=2y^8$
x^8-y^8		$y^8-y^8=0$

Se deduce que x^7-y^7 y x^8-y^8 son divisibles entre $x - y$

Lo anterior puede resumirse así :

$x^n + y^n \div x+y$ es exacto cuando n es impar

$x^n - y^n \div x+y$ es exacto cuando n es par

$x^n + y^n \div x-y$ no es exacto (sea n par o impar)

$x^n - y^n \div x-y$ siempre es exacto (sea n par o impar)

Los cocientes que resultaron *exactos* son los llamados COCIENTES NOTABLES.

I) $\boxed{\dfrac{x^n-y^n}{x-y} = \text{C.N.}}$; donde n es par o impar.

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots\ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

Ejemplo : $\dfrac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + x\,y^3 + y^4$

II) $\boxed{\dfrac{x^n + y^n}{x + y} = \text{C.N.}}$; cuando n es impar.

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots\ldots\ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}$$

Ejemplo : $\dfrac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - x\,y^3 + y^4$

III) $\boxed{\dfrac{x^n - y^n}{x + y} = \text{C.N.}}$; cuando n es par.

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots\ldots + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

Ejemplo : $\dfrac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + x\,y^2 - y^3$

IV) $\boxed{\dfrac{x^n + y^n}{x - y} \text{ no es C.N.}}$ Sea n par o impar.

Observaciones.-

1ra) El desarrollo del cociente notable tiene n términos.

2da) El grado del cociente es $n - 1$. El cociente es un polinomio homogéneo.

3ra) Si el divisor es $x - y$ todos los términos son positivos, mientras que si el divisor es $x + y$ los términos tienen signos alternados.

4ta) Los exponentes de la 1ra variable (x) disminuyen de uno en uno y los exponentes de la 2da variable (y) van aumentando de uno en uno.

5.9) TERMINO GENERAL

Si : $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$ es un cociente notable, y t_k es el término que ocupa el lugar "k" en su desarrollo, entonces.

$$\boxed{t_k = (\text{signo})\; x^{n-k} \cdot y^{k-1}}$$

el signo se colocará de acuerdo al caso que corresponda.

Ejemplo.- El quinto término de $\dfrac{a^{12}-b^{12}}{a-b}$ es :

Reconocemos que : $n=12$, $k=5 \Rightarrow \quad t_5 = (+)\ a^{12-5} \,.\, b^{5-1} = a^7 \,.\, b^4$

Observación.- $\dfrac{x^p \pm y^q}{x^r \pm y^s}$ da lugar a un cociente notable si se cumple :

$$\boxed{\frac{p}{r} = \frac{q}{s} = \#\ \text{de términos}}$$

los exponentes de la variable x disminuye de r en r ; mientras que los de la variable y aumentan de s en s.

También debe notarse que tanto $\dfrac{p}{r}$ como $\dfrac{q}{s}$ deben ser enteros y positivos ya que es igual al número de términos.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

13.- $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ es cociente de :

A) $\dfrac{x^{16}-1}{x^2+1}$ *B)* $\dfrac{x^{16}+1}{x-1}$ *C)* $\dfrac{x^{16}-1}{x^4-1}$ *D)* $\dfrac{x^{12}-1}{x^4-1}$ *E)* $\dfrac{x^{16}-1}{x^4+1}$

UNI 87

Resolución.-

Observamos que : $x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = \left(x^4\right)^3 + \left(x^4\right)^2 + \left(x^4\right) + 1$

Si hacemos el cambio de variable $x^4 = y$, tendremos : $y^3 + y^2 + y + 1 = \dfrac{y^4-1}{y-1}$

Retomando a nuestra variable original : $\dfrac{(x^4)^4-1}{x^4-1} = \boxed{\dfrac{x^{16}-1}{x^4-1}}$ **RPTA. C**

14.- Hallar "n" si la división : $\dfrac{x^{5n+3} - y^{5(n+6)}}{x^{n-1} - y^{n+2}}$, ***origina un cociente notable :***

A) 3 *B) 5* *C) 6* *D) 9* *E) 10*

Resolución.-

Si la división dada origina un Cociente Notable, entonces deberá cumplirse que :

$$\frac{5n+3}{n-1} = \frac{5(n+6)}{n+2} = \text{\# entero positivo.}$$

$$\Rightarrow \quad (5n+3)(n+2) = 5(n+6)(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad 5n^2 + 13n + 6 = 5n^2 + 25n - 30$$

$$\Rightarrow \quad 6 + 30 = 12n \qquad \therefore \quad \boxed{n = 3}$$

Comprobación : $\dfrac{5n+3}{n-1} = \dfrac{15+3}{3-1} = 9$ (entero positivo) **RPTA. A**

15.- El número de términos de : $\dfrac{x^a - y^b}{x^3 - y^5}$ es ocho ; ¿Cuál es el quinto término?

A) $x^{20}y^9$ *B)* x^8y^{18} *C)* x^9y^{20} *D)* $x^{18}y^8$ *E)* $x^{12}y^{20}$

Resolución.-

Recordando lo expuesto en el item 5.8 , se sabe que el cociente dado será notable si se cumple que :

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \text{\# de términos} = 8 \text{ (dato)}$$

De donde : $a = 3(8)$; $b = 5(8)$

De este modo el cociente es de la forma : $\dfrac{(x^3)^8 - (y^5)^8}{x^3 - y^5}$

Por lo expuesto en el item 5.6, este cociente notable es de la forma (I) , y en él todos los términos son positivos. Así pues el 5[to] término será con $n = 8$ y $k = 5$, tal que :

$$t_5 = (+) \cdot \left(x^3\right)^{8-5} \cdot \left(y^5\right)^{5-1} \quad \Rightarrow \quad t_5 = \boxed{x^9 \cdot y^{20}}$$ **RPTA. C**

16.- Hallar el coeficiente del tercer término del desarrollo de : $\dfrac{x^{12} - 16}{2x^3 + 4}$

A) 2 *B) - 4* *C) - 2* *D) 8* *E) 4* *PUCP 92-I*

Resolución.-

Transformando el denominador; lograremos visualizar en cociente notable de la forma (III) ; veamos :

$$\frac{x^{12}-16}{2x^3+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{12}-16}{x^3+2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{(x^3)^4 - 2^4}{x^3+2}}_{\alpha}$$

Los términos del cociente (α), tienen signos alternados de modo que todos lo que ocupan una posición impar son positivos. Así el 3er término será con $n = 4$ y $k = 3$:

$$t_3^1 = (\text{signo}) \cdot \left(x^3\right)^{4-3} \cdot (2)^{3-1} = +\ x^3 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad t_3^1 = 4x^3$$

Debemos tener en cuenta que todos los términos de (α) están multiplicados por $\frac{1}{2}$, luego el tercer término del verdadero cociente es :

$$t_3 = \frac{1}{2} \cdot t_3^1 = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad \text{coeficiente} = \boxed{2}$$ **RPTA. A**

17.- Calcular a + b, sabiendo que el término de lugar 12 del cociente notable de dividir :

$$\frac{x^a - y^b}{x^2 - y^3} \quad es \quad x^2y^{33}$$

A) 65 *B) 56* *C) 35* *D) 81* *E) 72*

Resolución.-

Por ser C.N. : $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = n$; donde n es un entero positivo.

$$\Rightarrow \quad a = 2n \ ; \ b = 3n \quad \Rightarrow \quad a + b = 5n \ .... (*)$$

Aprovechando el dato del término 12 tendremos : $t_{12} = (+) \cdot (x^2)^{n-12} \cdot (y^3)^{12-1}$

$$\Rightarrow \quad x^{2n-24} \cdot y^{33} \equiv x^2 . y^{33} \qquad \therefore \quad n = 13$$

Luego, en (*) : $\boxed{a + b = 65}$ **RPTA. A**

18.- Expresar el polinomio : P (x)≡ $x^{18} - x^{16} + x^{14} - .... + x^2 - 1$ como cociente notable.

A) $\frac{x^{18} - 1}{x - 1}$ *B)* $\frac{x^9 - 1}{x + 1}$ *C)* $\frac{x^{18} + 1}{x^2 - 1}$ *D)* $\frac{x^{20} - 1}{x^2 + 1}$ *E)* $\frac{x^{20} + 1}{x + 1}$

Resolución.-

El polinomio dado se puede transformar en :

$$P\ (x^2) \equiv (x^2)^9 - (x^2)^8 + (x^2)^7 - ...... + x^2 - 1$$

Reconocemos que éste es un polinomio completo, ordenado, y de 10 términos; entonces proviene de un Cociente Notable de la forma :

$$\frac{(x^2)^{10} - 1}{x^2 + 1} = \boxed{\frac{x^{20} - 1}{x^2 + 1}}$$ **RPTA. D**

MISCELANEA

19.- Al dividir $x^3 + y^3 - 3xy + 1$ entre $x + y + 1$ e igualar el cociente a cero, se obtendrá :

A) $x + y = 0$	*B) $x < 0$; $y < 0$*	*C) $x > 0$; $y > 0$*
D) $x = y = 1$	*E) $x = 0$; $y > 0$*	***UNI 87***

Resolución.-

El dividendo se puede transformar en :

$$x^3 + y^3 + 1^3 - 3xy \, . \, 1 = (x + y + 1)\;(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y)$$

(Recordar la Equivalencia de Gaüss - Cap. 4)

De este modo al dividir entre $x + y + 1$ se obtiene como cociente a :

$$Q = x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y \qquad \Rightarrow \qquad 2Q = 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y$$

Ordenando y agrupando términos convenientemente :

$$2Q = \left(x^2 - 2xy + y^2\right) + \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right)$$

Reconociendo que cada paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto, concluímos que:

$$\therefore \quad Q = \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{2}$$

Por condición del problema debemos igualar Q a cero, observándose que esto solo es posible si :

$$x - y = 0 \quad ; \quad x - 1 = 0 \quad ; \quad y - 1 = 0$$

Es decir : $\boxed{x = y = 1}$ **RPTA. D**

20.- Determinar el resto de dividir : $(x - 2)^3\ (x + 1)$ entre $(x - 2)(x + 3)$

A) -50	*B) 100*	*C) -50x + 100*	*D) 50x - 100*	*E) 5x - 10*

Resolución.-

En primer lugar debemos reconocer que el divisor es de 2do grado, por lo tanto el resto es de la forma : $ax + b$. Ahora, de acuerdo con el Algoritmo de la División, se debe cumplir que :

$$D(x) \equiv d(x) \, . \, Q(x) + R(x)$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)^3 \, . \, (x + 1) \equiv (x - 2) \, . \, (x + 3) \, . \, Q(x) + \underbrace{ax + b}_{\text{Resto}}$$

A continuación aplicaremos el Teorema del Resto para los siguientes casos :

1^{ro}) Cuando se divide $P(x) \div (x - 2)$. Hacemos : $x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$

$$P(2) = d(2) \,.\, Q(2) + a(2) + b$$

$$0 = 0 + 2a + b \;\Rightarrow\; 2a = -b \qquad \text{.... (1)}$$

2^{do}) Cuando se divide $P(x) \div (x + 3)$. Hacemos : $x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -3$

$$P(-3) = d(-3) \,.\, Q(-3) + a(-3) + b$$

$$(-5)^3 \,.\, (-2) = 0 - 3a + b \;\Rightarrow\; -3a + b = 250 \qquad \text{.... (2)}$$

De (1) y (2) : $a = -50$; $b = 100$

Finalmente el Resto es : $R(x) = \boxed{-50x + 100}$ **RPTA. C**

21.- En el polinomio : $2x^3 + 10x^2 - 14x - 3$ ¿Cuánto hay que aumentarle al coeficiente de x^2 para que la división entre $x - 3$ sea exacta?

A) 11 B) 12 C) -10 D) -11 E) 12 PUCP 91-I

Resolución.-

De acuerdo con el Teorema del Resto, hacemos : $x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3$

Ahora suponemos que a es la cantidad buscada de modo que el dividendo quedará así :

$$P(x) \equiv 2x^3 + (10 + a)x^2 - 14x - 3$$

Luego hacemos : $P(3) = 0 \;\Rightarrow\; 2 \,.\, 3^3 + (10 + a) \,.\, 3^2 - 14 \,.\, 3 - 3 = 0$

$$9 + 9(10 + a) = 0$$

$$\therefore \quad a = \boxed{-11}$$ **RPTA. A**

22.- Si se conoce que un polinomio P(x) es divisible por $5x^2 + 16x + 12$, entonces, el residuo que se obtendría al dividirlo entre $x + 2$ es :

A) P(2) B) 2 C) 5x D) 0 E) No se puede determinar.

Resolución.-

Por condición del problema se sabe que : $P(x)$ es divisible por: $5x^2 + 16x + 2$

Debemos reconocer que : $5x^2 + 16x + 12 = (5x+6)\,(x + 2)$

De acuerdo con el 2^{do} Criterio de Divisibilidad, $P(x)$ debe ser divisible también por :

$$(5x + 6) \text{ y por } (x + 2)$$

$\therefore$ Al dividir $P(x) \div (x + 2)$ el residuo es cero. **RPTA. D**

23.- Al dividir un polinomio P(x) entre x + 2, se obtiene como resto - 6 y un cociente cuya suma de coeficientes es igual a 3. El resto de dividir dicho polinomio entre x - 1 es :

A) 4 B) 2 C) 5 D) 3 E) N.A. UNALM 92

Resolución.-

Al dividir $P(x)$ entre $x + 2$ el resto es - 6 . Entonces por el Teorema del Resto se deberá cumplir que : $P(-2) = -6$

Y empleando el algoritmo de la división se tendrá :

$$D(x) \equiv d(x) \,.\, Q(x) + R(x) \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x+2) \,.\, Q(x) + (-6) \quad .....(*)$$

Por la teoría de Expresiones Algebraicas (Cap. 3), recordamos que :

$$\Sigma \text{ coef. de } Q(x) = Q(1)$$

Luego por condición del problema : Σ coef. de $Q(x) = 3$

Lo cual implica que : $Q(1) = 3$

Así mismo sabemos que el resto de dividir : $P(x) \div (x - 1)$ es $P(1)$; luego en (*) :

$$R = P(1) = (1+2) \,.\, Q(1) + (-6)$$

$$\Rightarrow \quad R = 3 \,.\, 3 - 6 = \boxed{3} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

24.- Un polinomio de tercer grado, cuyo primer coeficiente es la unidad es divisible por x - 2 y por x + 1, y al dividirlo por x - 3 da de resto 20. ¿Qué resto daría al dividir dicho polinomio por x + 3?

A) 8 B) -10 C) 12 D) -2 E) 0

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en determinar el polinomío $P(x)$ el cual por ser de 3er grado, tendrá la siguiente forma :

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

A continuación utilizaremos el Teorema del Resto y los datos dados, veamos :

1ro) $P(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 + 4a + 2b + c = 0$

2do) $P(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + a - b + c = 0$

3ro) $P(3) = 20 \quad \Rightarrow \quad 27 + 9a + 3b + c = 20$

Resolviendo : $a = 1$; $b = -4$; $c = -4$

$$\therefore \quad P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

El resto que se obtendrá al dividir $P(x)$ por $(x + 3)$, será $P(-3)$

$$R = P(-3) = -27 + 9 + 12 - 4 = \boxed{-10} \qquad \textbf{RPTA. B}$$

25.- Se sabe que los restos de la división de un polinomio entero en x, por los binomios $x+1$, $x-1$, $x-2$ son respectivamente 5, -1, -1. Hallar el resto de la división de dicho polinomio por el producto $(x^2-1)\ (x-2)$.

A) x^2-3x+1 ***B)*** x^2-3x-1 ***C)*** x^2+3x+1 ***D)*** x^2+3x-1 ***E) N.A.***

Resolución.-

Sabiendo que el divisor $(x^2-1)\,.\,(x-2)$ es de 3er grado, diremos que el resto será un polinomio de 2do grado (un grado menos que el grado del divisor) : $R(x) = ax^2+bx+c$

Recordando el algoritmo de la división, se tendrá :

$$P(x) = (x^2-1)\,.\,(x-2)\,.\,Q(x) + ax^2+bx+c$$

Empleando ahora el Teorema del Resto, diremos :

1ro) Si $x=-1 \Rightarrow \quad 5 = 0+a-b+c$

2do) Si $x=1 \Rightarrow \quad -1 = 0+a+b+c$

3ro) Si $x=2 \Rightarrow \quad -1 = 0+4a+2b+c$

Resolviendo estas ecuaciones concluimos que : $a=1$; $b=-3$; $c=1$

$$R(x) = x^2-3x+1 \qquad \textbf{RPTA. A}$$

26.- Hallar el resto de dividir : $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ entre $x^2-7x+11$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución.-

Desarrollando convenientemente el producto de los factores que forman al polinomio tomados por parejas, tendremos :

$$(x^2-7x+6)\ (x^2-7x+10)\ (x^2-7x+12)$$

Haciendo un cambio de variable tal que : $x^2-7x=y$

$$\Rightarrow \qquad P(y) = (y+6)\,(y+10)\,(y+12)$$

Así mismo el divisor será : $x^2-7x+11 = y+11$; de este modo al aplicar el Teorema del Resto, se tendrá :

$$R = P(-11) \Rightarrow P(-11) = (-5)(-1)(1) = 5 \qquad \textbf{RPTA. E}$$

27.- Si : $f(x) \equiv x^5+\left(3\sqrt{2}-2\right)x^3+2\sqrt{2}-1$; calcular : $f(\sqrt{2}-1)$

A) 1 ***B)*** $\sqrt{2}+1$ ***C)*** $2\sqrt{2}$ ***D)*** 2 ***E)*** 4

Resolución.-

El problema nos pide el valor numérico de $f(x)$ cuando : $x = \sqrt{2} - 1$. Aplicando el método de RUFFINI, el valor numérico pedido será coincidentemente el residuo de dividir : $f(x) \div \left[x - \left(\sqrt{2} - 1\right)\right]$. Calculemos dicho residuo.

	1	0	$\left(3\sqrt{2}-2\right)$	0	0	$\left(2\sqrt{2}-1\right)$
$\sqrt{2}-1$	$\downarrow$	$\sqrt{2}-1$	$3-2\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}-1$	$3-2\sqrt{2}$
	1	$\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\left(\sqrt{2}+1\right)$	1	$\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\underbrace{f\left(\sqrt{2}+1\right)}_{\text{Residuo}}$

A partir de la última columna se obtendrá el resto :

$$f\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(2\sqrt{2}-1\right) + \left(3-2\sqrt{2}\right) \quad \therefore \quad f\left(\sqrt{2}-1\right) = \boxed{2} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

28.- Si el polinomio racional. $P(x) \equiv ax^7 + bx^5 - 1$, es divisible por :

$$M(x) \equiv mx^5 + nx^4 + cx^3 - x - 1$$

Calcular : "ab + mn + c"

A) 7 B) 1 C) 4 D) 3 E) 5

Resolución.-

Por Dato : $P(x) \equiv M(x) \cdot Q(x)$ con $R(x) \equiv 0$

Como la división es exacta, al aplicar el método de Horner, los polinomios deberán ser ordenados y para este caso lo haremos en forma creciente :

$P(x) \equiv -1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + bx^5 + 0x^6 + ax^7$ (dividendo)

$M(x) \equiv -1 - x + 0x^2 + cx^3 + nx^4 + mx^5$ (divisor)

Trasladando los coeficientes al siguiente cuadro, tendremos :

-1	-1	0	0	0	0	b	0	a
1		1	0	$-c$	$-n$	$-m$		
0			-1	0	c	n	m	
$-c$				1	0	$-c$	$-n$	$-m$
$-n$								
$-m$								
	1	-1	1	0	0	0	0	0
		Q(x)				R(x)		

Revisando las columnas del residuo, diremos que :

1) $-c+1=0 \Rightarrow c=1$

2) $-n+c=0 \Rightarrow n=c$ es decir : $n=1$

3) $m-n=0 \Rightarrow m=n$ es decir : $m=1$

4) $b-m+n-c=0 \Rightarrow b=m-n+c$ es decir : $b=1$

5) $a-m=0 \Rightarrow a=m$ es decir : $a=1$

Finalmente : $ab+mn+c=$ **3** **RPTA. D**

29.- Halle el residuo de dividir : $\dfrac{(x-2)^{1999}+(x-1)^{1998}+7}{(x-2)(x-1)}$

A) 3 *B) 2x - 1* *C) 3x + 2* *D) 2x - 4* *E) 2x + 4*

Resolución.-

Recordando el algoritmo de la división : $D(x) \equiv d(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Sustituyendo cada polinomio donde corresponda, tendremos :

$$(x-2)^{1999}+(x-1)^{1998}+7 \equiv \underbrace{(x-2)(x-1)}_{\text{divisor}} Q(x)+R(x)$$

Debemos observar que el grado del divisor es 2, por lo tanto, el grado máximo del residuo es 1. Esto significa que el residuo es un polinomio de 1er grado y de la forma :

$$R(x) \equiv ax+b$$

Ahora en la identidad se tendría : $(x-2)^{1999}+(x-1)^{1998}+7 \equiv (x-2)(x-1)Q(x)+ax+b$

Para eliminar $Q(x)$, apliquemos el Teorema del Resto, es decir, haremos : $x=2 \wedge x=1$

Si : $x=2$, se tiene : $2a+b=8$

Si : $x=1$, se tiene : $a+b=6$

Resolviendo : $a=2$ $b=4 \Rightarrow$ $\mathbf{R(x) \equiv 2x+4}$ **RPTA. E**

30.- Encontrar el residuo de la siguiente división : $\dfrac{x^{4^{5n}}+x^{4^{3n}}+x^{4^n}+2}{x^{4^n}+1}$; $n \in N$

A) - 1 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) N.A.*

Resolución.-

Trataremos de determinar el resto de la división de un modo directo, lo cual supone utilizar el Teorema del Resto.

Transformando el dividendo : $D\left(x^{4^n}\right) \equiv \left(x^{4^n}\right)^{4^{4n}}+\left(x^{4^n}\right)^{4^{2n}}+\left(x^{4^n}\right)+2$

Ahora, calcularemos el resto haciendo :

$$x^{4^n}+1=0 \Rightarrow x^{4^n}=-1 \qquad \Rightarrow \qquad R(x) \equiv (-1)^{4^{4n}}+(-1)^{4^{2n}}+(-1)+2$$

Y puesto que n es un número natural, tendremos :

$$R(x) \equiv (1)+(1)-(1)+(2) \quad \therefore \quad \boxed{R(x) \equiv 3} \qquad \text{RPTA. B}$$

31.- Al efectuar la división del polinomio P(x) por (x^2+1), se obtiene como residuo: (x-2). Encontrar el residuo de dividir el cubo del polinomio P(x) entre : (x^2+1)

A) 8x-11 *B) 11x+2* *C) 11x-2* *D) 11x+2* *E) x-11*

Resolución.-

De acuerdo con el algoritmo de la división y los datos dados, se sabe que :

$$P(x) \equiv (x^2+1)\ Q(x)+(x-2)$$

El cubo de este polinomio será:

$$P^3(x) \equiv [(x^2+1)\,Q(x)+(x-2)]^3$$

Utilizando la equivalencia de Cauchy vista en el Cap. 4 , tendremos :

$$P^3(x) \equiv [(x^2+1)\,Q(x)]^3+(x-2)^3+3[(x^2+1)\,Q(x)]\,[x-2]\,[P(x)] \ ....(\alpha)$$

Ahora, el ejercicio nos pide el residuo de dividir : $P^3(x)$ por (x^2+1), entonces lo que haremos es utilizar el Teorema del Resto haciendo : $x^2=-1$

Al sustituir en (α) se observa que la mayoría de los términos se eliminan quedando solamente la expresión : $(x-2)^3$, luego :

$$R(x) \equiv (x-2)^3 \equiv x^3-3\,(x^2)\,(2)+3\,(x)(2^2)\;-\;(2)^3$$

Acomodando esta relación, tendremos : $R(x) \equiv x\,(x^2)-6\,(x^2)+12x-8$

De este modo el resto real se conseguirá haciendo aquí $x^2=-1$, luego :

$$R(x) \equiv x(-1)-6\,(-1)+12x-8 \quad \therefore \quad \boxed{R(x) \equiv 11x-2} \qquad \text{RPTA. C}$$

32.- Un polinomio P(x) de cuarto grado es divisible separadamente por : (x^2+1) y (x^2+2x+2). Si se divide : P(x) por (x^3-1) se obtiene por residuo $(6x^2+6x+8)$. Luego el término independiente de P(x) es :

A) 2 *B) 4* *C) 6* *D) 8* *E) 10*

Resolución.-

De acuerdo con el 2^{do} Criterio de Divisibilidad, $P(x)$ deberá ser divisible por el producto $(x^2+1)(x^2+2x+2)$. Luego según el algoritmo de la división se tendrá :

$$P(x) \equiv (x^2+1)(x^2+2x+2) \quad \text{con} \quad R(x) \equiv 0$$

De acuerdo con esta relación y el dato del problema, podemos decir que :

$$°[P(x)] = 4 \Rightarrow °[Q(x)] = 0$$

Esto significa que : $Q(x) = k \ / \ k \in \mathbb{R}^*$

Ahora : $P(x) \equiv (x^2+1)(x^2+2x+2)\,k$ .... (*)

También se sabe que : $P(x) \div (x^3-1)$, tiene por residuo a : $R(x) \equiv 6x^2 + 6x + 8$

Utilizando nuevamente el algoritmo de la división se tendrá que :

$$P(x) \equiv (x^3-1)\,Q(x) + 6x^2 + 6x + 8$$

Aquí para eliminar $Q(x)$, haremos : $x = 1$, obteniéndose :

$$P(1) = (1-1)\,Q(1) + 6(1)^2 + 6(1) + 8 \Rightarrow P(1) = 20$$

Pero de (*) . $P(1) = 10k$, es decir : $10k = 20 \Rightarrow k = 2$

Al reemplazar este valor en (*) , obtenemos : $P(x) \equiv (x^2+1)(x^2+2x+2)\,2$

El problema nos pide el término independiente de $P(x)$, el cual se obtendrá siendo $x = 0$ (ver teoría de Expresiones Algebraicas Cap. 3)

$$\Rightarrow \quad P(0) = (0+1)\,[0+2(0)+2]\,(2)$$

$$\therefore \quad \boxed{P(0) = 4} \qquad \text{RPTA. B}$$

33.- Calcular el valor numérico del término central del cociente notable originado al dividir :

$$\frac{(x+y)^{100}-(x-y)^{100}}{8xy\,(x^2+y^2)} \qquad \textit{para}: \ x = 3, \quad y = 2\sqrt{2}$$

A) 1   *B) 2*   *C) 100*   *D) 200*   *E) 1000*

Resolución.-

Observar que : $8xy\left(x^2+y^2\right) = 2\left(x^2+y^2\right)(4xy)$

Por la equivalencia de Legendre, el 2^{do} miembro queda así :

$$8xy\left(x^2+y^2\right) = [(x+y)^2+(x-y)^2]\,[(x+y)^2-(x-y)^2]$$

Efectuando la diferencia de cuadrados : $8xy\left(x^2+y^2\right) = (x+y)^4 - (x-y)^4$

Ahora la división notable será : $\dfrac{(x+y)^{100}-(x-y)^{100}}{(x+y)^4-(x-y)^4}$

De aquí , el # términos $= \dfrac{100}{4} = 25$

A continuación diremos que : L_{TC} = Lugar del Término Central $= \dfrac{25+1}{2} = 13$

Luego el término central será T_{13} , el cual se calculará así :

$$t_{13} = [(x+y)^4]^{25-13}\ [(x-y)^4]^{13-1}$$

$$t_{13} = (x+y)^{48}\ (x-y)^{48}$$

$$t_{13} = [(x+y)(x-y)]^{48} = [x^2-y^2]^{48}$$

Se pide el Valor Numérico (V.N.) de : t_{13} con $x = 3$, y , $y = 2\sqrt{2}$

$$\text{V.N. } t_{13} = \left[(3)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right]^{48} \qquad \therefore \qquad \text{V.N. } t_{13} = \mathbf{1} \qquad \textbf{RPTA. A}$$

34.- Si la división notable : $\dfrac{x^n - x^{-n}}{x - x^{-1}}$, origina un cociente notable que solo tiene 15 términos enteros.

La suma de los valores de "n" que hacen posible que esto suceda es :

A) 57 ***B) 58*** ***C)59*** ***D) 60*** ***E) 61***

Resolución.-

Observar que el # términos del cociente viene dado así : $\dfrac{n}{1} = n$

Por condición del problema solo existen 15 términos enteros, es decir : t_{15} es entero y t_{16} no es entero.

Calculemos t_{15} : $t_{15} = x^{n-15}(x^{-1})^{14} = x^{n-29}$

Como es entero se cumple : $n - 29 \geq 0 \Rightarrow n \geq 29$ .... (α)

Calculemos ahora t_{16} : $t_{16} = x^{n-16}(x^{-1})^{15} = x^{n-31}$

Como no es entero deberá cumplirse que : $n - 31 < 0 \Rightarrow n < 31$ .... (θ)

Finalmente de (α) $\wedge$ (θ) se obtendrá :

$n = 29$, y , $n = 30$ $\therefore$ **Σ Valores = 59** **RPTA. C**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Para dividir polinomios entre binomios de la forma $x \pm a$, el método más conveniente es :

A) de Ruffini B) método clásicode Horner

C) de Horner D) de coeficientes separados

E) N. A.

2.- "El resto de la división de un polinomio en x por un binomio de la forma $x - a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado :

A) la "x" por $-a$ B) la "x" por a

C) $x - a$ por $x + a$ D) "a" por 1

E) N. A.

3.- El residuo de dividir $3x^3 + x^2 - 5x + 20$ entre $x + 2$ es :

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 10

4.- La expresión $a^n + b^n$ es divisible exactamente entre $a - b$ cuando :

A) n es impar B) n es cualquier entero

C) n es par D) n es mayor que $a + b$

E) nunca es divisible

5.- Cuando $x^8 - 1$ se divide entre $x - 1$ el residuo es :

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.- Si P(x) se anula para $x = a$; entonces P(x) será divisble por :

A) $x + a$ B) P(a) C) $x - a$

D) $x^2 + a^2$ E) N. A.

7.- Indicar ¿Cuál de los siguientes es C.N.?

I) $\dfrac{a^5+b^5}{a+b}$ II) $\dfrac{a^4-b^4}{a-b}$ III) $\dfrac{a^7-b^7}{a+b}$

A) Sólo II B) Sólo III

C) Sólo I y II D) Sólo II y II

E) N. A.

8.- ¿Cuál será el cociente de la división :

$$\frac{x^5-32}{x-2}$$

A) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

B) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$

C) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

D) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 16$

E) N. A.

9.- Hallar m sabiendo que el resto de dividir :

$(m+1)x^3 + 2x^2 - 4x + m$ entre $(x+2)$ es 1

A) -1 B) 2 C) -2 D) 1 E) $\frac{3}{2}$

10.- Señalar la afirmación FALSA

A) °Dividendo $\geq$ °divisor

B) °Cociente = °D - °d

C) $°(r)_{MAX} = °d - 1$

D) $°r > °d$

E) °D > °Q

NIVEL B

11.- Si $3x^3 - 9x^2 + kx - 12$ es divisible por $x - 3$ entonces, también es divisible por :

A) $3x^2 - x + 4$ B) $3x^2 - 4$

C) $3x^2 + 4$ D) $3x - 4$

E) $3x + 4$

12.- Al dividir $P(x) = x^{29} + 8x^{28} + 16a^{27}$ entre $x - a$ el residuo es cero (0) ¿Cuál es el valor de a?

A) - 4 B) 8 C) 1 D) 4 E) 2

13.- En una división por el método de Ruffini se conoce parte del esquema utilizado :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 6 & b & 12 & e \\
-2 & & a & -8 & c & -4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 5 & d & \boxed{0}
\end{array}$$

Hallar : $a + b - c + d - e$

A) -11 B) 13 C) 18 D) 19 E) - 15

14.- El cociente de dividir :

$$P(x) = 2x^6 - x^5 - 9x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

entre $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right)$ es :

A) $x^2 - 2x + 2$ B) $2x^2 - x + 1$

C) $x^2 + x + 2$ D) $x^2 + 1$

E) $x^2 + x + 1$

15.- Determinar el valor de $a + b$ de manera que el polinomio :

$P(x) = x^3 + ax + b$, sea divisible por $(x - 1)^2$

A) -1 B) - 2 C) - 5 D) 5 E) 1

16.- Hallar la suma de los polinomios que se obtienen al desarrollar estos cocientes :

$$\frac{x^4 - a^4}{x - a} \quad ; \quad \frac{x^4 - a^4}{x + a}$$

A) $2x^3 + 2a^2x$ B) $2ax^2 + 4a^3$

C) $x^3 + ax$ D) $x^3 - ax + 2$

E) $4x^4 + 2a^3$

17.- Hallar el residuo de la división :

$$2x^5 + 7x^4 - 50x^3 - 173x^2 - 22x + 60 \div \left(x^2 - 2x - 15\right)$$

A) 0 B) $x - 1$ C) $2x + 4$

D) $2x - 4$ E) $x + 4$

18.- El polinomio $P(x)$ al dividirlo entre $(x - 2)$ da de resto 5, y la suma de los coeficientes del polinomio cociente es 7. Hallar $P(1)$

A) 4 B) - 2 C) - 3 D) - 4 E) 3

19.- Calcular el resto de dividir $(x - 2)^7 + (x - 3)^3$ entre $x^2 - 5x + 6$

A) $2x + 1$ B) $2x - 5$ C) $2x$

D) $2x - 1$ E) $3x - 1$

20.- Hallar el coeficiente del cuarto término del desarrollo de :

$$\frac{32x^5 + 243y^5}{2x + 3y}$$

A) 24 B) 52 C) - 34 D) 34 E) 54

21.- Al dividir $P(x) = x^2 + mx + 2$ por $x - 1$ el cociente es $f(x)$ y el residuo R_1. Al dividir $P(x)$ por $x + 1$ el cociente es $g(x)$ y el residuo es R_2. Si $R_1 = R_2$, entonces m es:

A) 0 B) 1 C) 2

D) -1 E) Una constante indeterminada

22.- Hallar la suma de los coeficientes de un polinomio de tercer grado divisible entre x^2+x-2 tal que al dividirlo entre $x-2$ y entre $x-3$ se obtiene residuos 8 y 20 respectivamente.

A) 4 B) - 6 C) 4 D) 6 E) 0

23.- En una división efectuada por el método de Horner, se obtuvo este esquema :

a	6	e	f	g	h	j
b		2	-2	4		
c			3	-3	6	
d				1	-1	2
	2	3	1	-4	-2	5

Determinar la suma de coeficientes del dividendo :

A) - 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) 4

24.- Dados los polinomios x^4+px^2+q y x^2+2x+5 determinar $p+q$ de tal manera que el primero sea divisible por el segundo.

A) 29 B) 19 C) 33 D) 31 E) 41

25.- Al dividir $P(x)=ax^4+bx^3+c$ separadamente entre (x^2+1) y entre (x^3+1) la diferencia de los restos obtenidos es $2(x-2)$, entonces $a \,.\, b$ es igual a :

A) 5 B) 7 C) 4 D) 3 E) 2

NIVEL C

26.- Hallar el residuo luego de dividir $(x^{194}+194)$ entre x^3+x^2+x+1

A) 0 B) $x+1$ C) x^2+1

D) 1 E) 194

27.- ¿Qué condición debe cumplirse para que el polinomio x^3+px+q sea divisible por un polinomio de la forma x^2+mx-1?

A) $p=q^2-1$; $m=p$ B) $p=q^2+1$; $m=-p$

C) $m=-q$; $p=m-q$ D) $p=-m^2-1$; $m=q$

E) $m=q^2$; $p=m$

28.- Hallar el resto de dividir :

$$(x+1)^{35}+7(x+1)^{28}+3(x+1)^{17}+(x+1)^6+3$$

entre x^2+2x+2

A) $-4x+5$ B) $2x+11$ C) $x+3$

D) $x+11$ E) $2x+5$

29.- Hallar la suma de los términos del desarrollo del cociente :

$$\frac{3^{2^a}-2^{a^{a+1}}}{8-15}\text{ , sabiendo que es exacto :}$$

A) 25 B) 32 C) 128

D) 96 E) 48

30.- En el desarrollo del C.N. :

$$\frac{x^{148m}-y^{296p}}{x^{2m}-y^{4p}}$$

el término de lugar 60 es $x^{56} \,.\, y^{708}$, entonces el grado del término de lugar 21 es :

A) 234 B) 432 C) 214

D) 532 E) 452

NIVEL C

31.- Si el trinomio racional x^5-ax+b es divisible por x^2-2x+1 ; hallar $a+b$ si además a, b son distintos de cero.

A) 7 B) 9 C) 5

D) 8 E) 6

32.- ¿Qué resto se obtiene al dividir ?

$$P(x) \equiv \frac{(x-a)(x-c)}{(a-b)(a-c)}a + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}b + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}c$$

entre $(x-a)(x-b)(x-c)$?

A) x^2+x+1 B) x C) x^2+1

D) $x-1$ E) x^2-1

33.- P(x) es divisible por M(x) y al dividir los polinomios mencionados entre $x+5$ se obtienen como restos 15 y 5 respecti-vamente entonces determinar el resto de dividir.

$$\left[\frac{P(x)}{M(x)}\right]^2 \text{, entre } (x+5).$$

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 0

34.- Hallar $\alpha+\beta$ en el cociente notable $\dfrac{x^\alpha - y^\beta}{x^3 - y^4}$

Si : $\dfrac{t_6 \cdot t_9}{t_7} = x^{12}\ y^{28}$

A) 20 B) 84 C) 48 D) 36 E) N. A.

35.- Si : $x^a\ y^{24}$ es el término central del desarrollo del C.N. :

$\dfrac{x^{75}-y^b}{x^c-y^2}$; el valor de $a+b+c$ es :

A) 49 B) 73 C) 91 D) 85 E) 89

36.- Encontrar el residuo de dividir :

$$x^{18} \div \left(x^2+x+1\right)$$

A) $x+1$ B) 0 C) $x-1$

D) 1 E) x

37.- Al efectuar la divisón de dos polinomios enteros en "x" el producto de los términos independientes del divisor y cociente es 8, la diferencia de los cuadrados de los términos independientes del dividendo y residuo es 24. Halle la suma de los términos independientes del dividendo y residuo.

A) 2 B) 3 C) 12 D) 4 E) 48

38.- Cuando el polinomio :

$$8x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se divide por : $2x^2 - x + 1$. Se obtiene un cociente cuyos coeficientes van disminuyendo de uno en uno a partir del primero y un residuo idéntico a : $5x + 1$. ¿Qué valor se obtiene para $\sqrt{a+b+c+d}$?

A) 1 C) 2 B) 3 D) 4 E) 5

39.- ¿Qué relación existe entre : a , b $\wedge$ m , si la división :

$$\frac{a\left(x^{4a}\right)^m - b\left(x^b\right)^{4m}}{ax^2-b} \text{, es exacta ?}$$

A) $2am = 2b + 1$ B) $2am = 2bm + 1$

C) $2am = 2bm - 1$ D) $am = b$

E) $a + m = b$

40.- Si el cociente notable originado al dividir:

$\dfrac{x^{9m}+y^{8n}}{x^{2n}+y^{4m}}$, tiene "k" términos; hallar "k"

A) 7 B) 15 C) 9 D) 11 E) 3

6 Factorización

Es la transformación de un polinomio en un producto indicado de factores polinomios primos, dentro de un determinado campo numérico.

6.1) POLINOMIO SOBRE UN CAMPO

Se dice que un polinomio está definido sobre un campo numérico, cuando los coeficientes de dicho polinomio pertenecen al conjunto numérico asociado a dicho campo. Se consideran tres campos : Racional (Q) ; Real ($\Re$) y Complejo (C).

Ejm :

$P(x) = x^2 - x - 2 \quad \Rightarrow$ está definido en Q , $\Re$ y C

$Q(x) = \sqrt{3}\,x^2 + 2x - \sqrt{2} \quad \Rightarrow$ está definido en $\Re$ y C pero no en Q.

$R(x) = x^2 + 2ix + i + 2 \quad \Rightarrow$ está definido sólo en C...........($i = \sqrt{-1}$)

6.2) FACTOR . O, DIVISOR

Es un polinomio de grado distinto de cero que divide exactamente a otro.

6.3) FACTOR PRIMO

Un polinomio es primo sobre un campo numérico cuando *no se puede* transformar en el producto de dos polinomios sobre el mismo campo numérico.

Ejemplo.- $P(x) \equiv x^2 - 9$

No es primo en Q, ni en $\Re$ ni en C porque se puede transformar en :

$P(x) \equiv (x + 3)\,(x - 3)$

Ejemplo.- $M(x) \equiv x^2 - 3$

Es primo en Q, pero no en $\Re$ ni en C , porque :

$M(x) \equiv \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$

Ejemplo.- $T(x) \equiv x^2 + 4$

Es primo en Q y en $\Re$ pero no en C, porque :

$T(x) \equiv (x + 2i)\;(x - 2i)$

6.4) NUMERO DE FACTORES PRIMOS

El número de factores primos depende sobre que campo numérico se factorice.

Ejemplos.-

a) $P(x) \equiv x^4 - 9 \equiv (x^2+3)(x^2-3)$

$\Rightarrow$ P(x) tiene 2 factores primos en Q.

b) $P(x) \equiv x^4 - 9 \equiv (x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ P(x) tiene 3 factores primor en $\Re$.

c) $P(x) \equiv x^4 - 9 \equiv (x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ P(x) tiene 4 factores primos en C.

NOTA : A menos que se indique lo contrario, cada factorización va a realizarse hasta obtener factores primos en Q. cada uno de ellos con coeficientes enteros. Esto se define como factorización en Q.

6.5) FACTORES COMPUESTOS

Aparte de los factores primos, se obtiene otros factores que resultan de la combinación de los factores primos, estos son los factores compuestos.

Ejemplo.-

$x^2 y$ tienen los siguientes factores :

1 : polinomio de grado cero, es factor de cualquier polinomio.

x : factor primo

y : factor primo

xy : factor compuesto

x^2 : factor compuesto

$x^2 y$: factor compuesto

$\therefore$ $x^2 y$ tiene seis factores, de los cuales solo dos son primos.

6.6) NUMERO DE FACTORES DE UN POLINOMIO

El número de factores de un polinomio (# fact.) viene dado por la reunión del número de factores primos (# F.P.), número de factores compuestos (# F.C.) y la unidad. Veamos :

 # Fact. = # F.P. + # F.C. + 1

Ejemplo.- Para el polinomio del ejemplo anterior : $x^2 y$ tenemos : # F.P. = 2 $\wedge$ # F.C. = 3

Si aplicamos la relación matemática para el número de factores, se tendrá :

$$\# \text{Fact.} = 2 + 3 + 1 = 6$$

En efecto como se encontro anteriormente el número de factores que presenta el polinomio : $x^2 y$ es seis.

Nota : Dado el polinomio P el cual luego de ser factorizado totalmente se expresa así :

$$P \equiv A^{\alpha} \,.\, B^{\beta} \,.\, C^{\theta}$$

Siendo A, B $\wedge$ C, sus factores primos, el número de factores del polinomio P se calcula de la manera siguiente :

$$\boxed{\# \text{Fact.} = (\alpha + 1)\,(\beta + 1)\,(\theta + 1)}$$

Ejemplo.- Para el polinomio : $P(x\,;y) \equiv x^2 y$ tenemos :

$$\# \text{Fact.} = (2 + 1)\,(1 + 1) = (3)\,(2)$$

$$\therefore \quad \# \text{Fact.} = 6$$

6.7) METODOS DE FACTORIZACION

I.- METODO DEL FACTOR COMUN

Se utiliza cuando todos los términos del polinomio tienen un factor que les es común. El factor común puede ser un monomio o un polinomio.

Ejemplo.- Factorizar : $2\,a^2x + 4\,ax^2 - 6\,a\,x$

$$2\,a\,x\,(a + 2x - 3)$$

NOTA : $2\,a\,x$ es el factor común (monomio).

II.- METODO DE AGRUPACION DE TERMINOS (Factor Común Polinomio)

Consiste en agrupar los términos del polinomio por binomios, trinomios, que luego de descomponerlos a su vez en dos factores, aparece algún factor común a todas las agrupaciones realizadas.

Ejemplo.- Factorizar : $ax + by + ay + bx$

$$(ax + ay) + (bx + by) = a\,(x + y) + b\,(x + y)$$

$$= (x + y)\,(a + b)$$

NOTA : $(x+y)$ es el factor común (polinomio).

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Con respecto al polinomio : $a(x-1) - b(1-x) + cx - c$

Señale verdadero o falso :

I) a + b + c es un factor ***II) x + 1 es un factor*** ***III) solo tiene 2 factores primos.***

A) VVF ***B) VFV*** ***C)FVV*** ***D) FFF*** ***E) VVV***

<u>Resolución</u>.-

Efectuando los productos indicados : $ax - a - b + bx + cx - c$

Ordenando convenientemente y agrupando : $(ax + bx + cx) - a - b - c$

Factorizando x en el paréntesis : $x(a + b + c) - (a + b + c)$

Factorizando las expresiones entre paréntesis : $(a + b + c)\ (x - 1)$

Finalmente la expresión tiene 2 factores primos : $(a + b + c)$ y $(x - 1)$

$\therefore$ De las proposiciones dadas la II es falsa. **RPTA. B**

2.- Al descomponer en dos factores la expresión : $(a-5)(a-6)(a-7) + (a-5)(a-6) - (a-5)$

El resultado del producto de los valores absolutos de los términos no literales es :

A) 157 ***B) 165*** ***C) 156*** ***D) 175*** ***E) 105*** ***UPCH 89***

<u>Resolución</u>.-

Agrupando con llaves los dos primeros términos : $\overbrace{(a-5)(a-6)}.\ (a-7) + \overbrace{(a-5)(a-6)} - (a-5)$

Factorizando lo indicado, tendremos : $(a-5)(a-6)\,[(a-7)+1] - (a-5)$

Operando dentro del corchete y efectuando el producto indicado : $\overbrace{(a-5)}\ (a-6)^2 - \overbrace{(a-5)}$

Factorizando lo indicado : $(a-5)\ \left[(a-6)^2 - 1\right]$

Desarrollando el trinomio cuadrado perfecto (TCP) : $(a-5)\ \left(a^2 - 12a + 35\right)$

Finalmente hemos obtenido dos factores que la condición exige. Luego según el enunciado :

$$|-5|\ .\ |35| = 5\,.\,35 = \mathbf{175} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

3.- Factorizar : $\left(n^2+n-1\right)^2 + (2n+1)^2$ ***, e indicar la suma de los términos independientes de sus factores primos.***

A) 3 ***B) -1*** ***C) 4*** ***D) 2*** ***E) -2***

Resolución.-

Efectuando cada potencia y ordenando se obtiene : $n^4+2n^3+3n^2+2n+2$

Descomponiendo $3n^2$ en una suma : $\overbrace{n^4+2n^3+2n^2}+n^2+2n+2$

Factorizando en la expresión indicada con llave : $n^2(n^2+2n+2)+(n^2+2n+2)$

Finalmente factorizamos el valor trinomio : $(n^2+2n+2)\ (n^2+1)$

De este último concluímos que la suma de términos independientes es : $2+1=$ **3** **RPTA. A**

4.- Hallar la suma de los factores primos de : $x^3+(a+b+c)\ x^2+(ab+ac+bc)\ x+abc$

A) $x+a+2b+c$ *B) $2x+2a+2b$* *C) $3x+a+b+c$*

D) $2x+2a+2b+2c$ *E) $x+3a+2b+c$*

Resolución.-

Efectuando los productos indicados : $\overbrace{x^3+ax^2}+\overbrace{bx^2+cx^2}+\overbrace{abx+acx}+\overbrace{bcx+abc}$

Agrupando como se indica, factorizamos y obtenemos : $x^2(x+a)+bx\,(x+a)+cx\,(x+a)+bc\,(x+a)$

Factorizando la expresión entre paréntesis : $(x+a)\left[\overbrace{x^2+bx}+\overbrace{cx+bc}\right]$

Factorizando dentro del corchete : $(x+a)\ [x\,(x+b)+c\,(x+b)]$

Luego de factorizar la expresión encerrada entre corchetes : $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)$

$\therefore$ Suma de factores primos : $3x+a+b+c$ **RPTA. C**

5.- Factorizar : $(x+y)\,(y+z)+(x+z)\,(y+z)+(x+y)\,(x+z)-x^2-yz$, y dar la suma de los coeficientes de sus factores primos :

A) 7 *B) 6* *C) 5* *D) 4* *E) 3*

Resolución.-

Efectuando en el tercer producto solamente :

$$(x+y)\,(y+z)+(x+z)\,(y+z)+x^2+xz+xy+yz-x^2-yz$$

Simplificando términos comunes : $(x+y)\,(y+z)+(x+z)\,(y+z)+x\,(y+z)$

Factorizando $(y+z)$: $(y+z)\,[x+y+x+z+x]$

Reduciendo términos dentro del corchete : $(y+z)\,(3x+y+z)$

$\therefore$ Suma de coeficientes : $(1+1)+(3+1+1)=$ **7** **RPTA. A**

6.8) METODO DE LAS EQUIVALENCIAS

Consiste en aplicar las equivalencias o productos notables en forma inversa,es decir , del producto pasar a los factores . Veamos algunos casos :

a) Trinomio Cuadrado perfecto (TCP) :

$$a^{2m} \pm 2a^m b^n + b^{2n} = \left(a^m \pm b^n\right)^2$$

b) Diferencia de Cuadrados (DDC) :

$$a^{2m} - b^{2n} = \left(a^m + b^n\right)\left(a^m - b^n\right)$$

c) Suma y Diferencia de Cubos :

$$a^{3m} \pm b^{3n} = \left(a^m \pm b^n\right)\left(a^{2m} \mp a^m b^n + b^{2n}\right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

6.- ¿Cuál NO es un factor de $(1+mx)^2 - (m+x)^2$ ***?***

A) $1+m$ ***B)*** $1+x$ ***C)*** $1-m$ ***D)*** $1-x$ ***E)*** $m+x$

__Resolución__.-

Por diferencia de cuadrados obtenemos : $[1+mx+m+x]\ [1+mx-m-x]$

Ordenando y agrupando en cada corchete : $[m(x+1)+(x+1)]\ [m(x-1)-(x-1)]$

Factorizando en cada corchete : $(x+1)(m+1) . (x-1)(m-1)$

Y reacomodando conseguimos : $(1+x)(1+m)(1-x)(1-m)$

Finalmente, de los distractores dados concluímos que : $m+x$ no es factor. **RPTA. E**

7.- El polinomio $3x^3 - 21x + 18$ ***al factorizarse tiene la forma :*** $a(x-b)(x-c)(x-d)$ ***donde*** $b<c<d$ ***. Calcular :*** $a-b+c-d$ ***.***

A) 7 ***B)*** -7 ***C)*** 9 ***D)*** 6 ***E)*** 5 ***PUCP 94-II***

__Resolución__.-

1ro) Factorizamos el 3 : $3\left(x^3 - 7x + 6\right)$

2do) Expresando $-7x$ como $-x-6x$, entonces : $3\left[x^3-x-6x+6\right]$

3ro) Agrupando y factorizando : $3\left[x\left(x^2-1\right)-6\,(x-1)\right]$

4to) Descomponiendo la diferencia de cuadrados : $3\ [x\,(x+1)\,(x-1)-6\,(x-1)]$

5to) Factorizamos $(x-1)$; y efectuamos dentro del corchete : $3\ (x-1)\left[x^2+x-6\right]$

6to) Factorizando dentro del corchete, nos queda : $3\ (x-1)\,(x+3)\,(x-2)$

Ordenando y acomodando para que se cumpla : $b<c<d$: $3\,(x-(-3))\,(x-1)\,(x-2)$

De este último reconocemos que : $a=3$; $b=-3$; $c=1$; $d=2$

Finalmente : $a-b+c-d=$ **5** **RPTA. E**

8.- El número de factores primos de : $x^3y^2+y^3z^2-x^3z^2-y^5$, es :

A) 5 B) 4 C)3 D) 2 E) 1 UNALM 91

Resolución.-

Ordenando y agrupando términos : $\left(x^3y^2-x^3z^2\right)+\left(y^3z^2-y^5\right)$

Factorizando en cada paréntesis : $x^3\left(y^2-z^2\right)-y^3\left(y^2-z^2\right)$

Descomponiendo la diferencia de cuadrados : $x^3\,(y+z)\,(y-z)-y^3\,(y+z)\,(y-z)$

Y factorizando las expresiones entre paréntesis : $(y+z)\,(y-z)\,.\left(x^3-y^3\right)$

Finalmente factorizamos la diferencia de cubos : $(y+z)\,(y-z)\,(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$

Se obtiene : **4 factores primos** **RPTA. B**

9.- Hallar el número de factores primos de : $64\,a^7\,b-ab^7$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7 PUCP 93 - II

Resolución.-

1ro) ab es un factor común monomio : $ab\left(64\,a^6-b^6\right)$

2do) Por diferencia de cuadrados (DDC) : $ab\left(8\,a^3+b^3\right)\left(8\,a^3-b^3\right)$

3ro) Ahora factorizamos la suma y diferencia de cubos :

$$ab\ (2a+b)\left(4a^2-2ab+b^2\right)\ (2a-b)\left(4a^2+2ab+b^2\right)$$

El resultado presenta **6** factores PRIMOS. **RPTA. D**

10.- Indicar el mayor grado de uno de los factores de :

$$x^{8n}+x^{4n}+x^{3n}+2$$

A) 6n B) n - 1 C) n + 1 D) 4n E) 2n + 1

Resolución.-

Expresemos 2 como la suma 1 + 1, luego procedemos a agrupar convenientemente :

$$\left(x^{8n}+x^{4n}+1\right)\ +\ \left(x^{3n}+1\right)$$

Reconocemos que el primer grupo contiene un TCP así :

$$\left[\left(x^{4n}+1\right)^2-x^{4n}\right]+\left[\left(x^n\right)^3+1^3\right]$$

Identificamos una DDC y una suma de cubos, en cada corchete :

$$\underbrace{\left(x^{4n}+x^{2n}+1\right)}\left(x^{4n}-x^{2n}+1\right)+\left(x^n+1\right)\left(x^{2n}-x^n+1\right)$$

Utilizando la Equivalencia de Argand (Cap. 4), observamos que el primer factor del primer término (indicado con llave), puede factorizarse así :

$$\left(x^{2n}+x^n+1\right)\underbrace{\left(x^{2n}-x^n+1\right)}\left(x^{4n}-x^{2n}+1\right)+\left(x^n+1\right)\underbrace{\left(x^{2n}-x^n+1\right)}$$

Factorizando $x^{2n}-x^n+1$:

$$\left(x^{2n}-x^n+1\right)\left[x^{6n}-x^{4n}+x^{2n}+x^{5n}-x^{3n}+x^n+x^{4n}-x^{2n}+1+x^n+1\right]$$

Reduciendo términos semejantes, obtenemos :

$$\left(x^{2n}-x^n+1\right)\left[x^{6n}+x^{5n}-x^{3n}+2x^n+2\right]$$

De este último concluímos que el mayor grado es : **6 n** **RPTA. A**

6.9) METODO DEL ASPA SIMPLE

Se emplea para factorizar trinomios de la forma :

$$ax^{2n} + bx^ny^m + cy^{2m}$$

1er factor

$$\begin{array}{lcccl} (a_1x^n + c_1y^m) \longrightarrow & a_1x^n & \times & c_1y^m & \longrightarrow (a_2x^n)(c_1y^m) = b_1x^ny^m \\ (a_2x^n + c_2y^m) \longrightarrow & a_2x^n & & c_2y^m & \longrightarrow (a_1x^n)(c_2y^m) = b_2x^ny^m \\ & & & & \overline{(b_1+b_2)\,x^ny^m} \end{array}$$

2do factor

$$\boxed{a_1x^n \,.\, a_2x^n = ax^{2n}} \qquad \boxed{c_1y^m \,.\, c_2y^m = cy^{2m}}$$

$$\therefore \; a\,x^{2n} + b\,x^ny^m + c\,y^{2m} = (a_1x^n + c_1y^m)\,.\,(a_2x^n + c_2y^m)$$

1ro) Luego de ordenar el trinomio, se descompone cada uno de los términos extremos en un producto de factores.

2do) Estos factores se multiplican en aspa y se debe cumplir que la suma de los productos sea igual al término central.

3ro) Al cumplirse lo anterior, los factores se toman en forma horizontal.

Ejemplo.- Factorizar $10\,x^2 - 13\,x - 3$

Descomponiendo adecuadamente los extremos, tenemos :

$$\begin{array}{ccccl} 10\,x^2 & - & 13\,x & - & 3 \\ 5\,x & & \times & 1 & \longrightarrow \;\; 2\,x \\ 2\,x & & & -3 & \longrightarrow \; -15\,x \quad (+) \\ & & & & \qquad \overline{-13\,x} \end{array}$$

Los factores son : $5x + 1$ y $2x - 3$ $\Rightarrow$ $10\,x^2 - 13\,x - 3 = (5x + 1)(2x - 3)$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

11.- Si $x+1$ es un factor de x^2+cx-2 y $2x-1$ es un factor de dx^2+5x-4, entonces el valor de d/c es :

A) 1/2 B) 4 C) -1/2 D) - 6 E) 6 UNMSM 96

Resolución.-

1ro) Reconstruímos el aspa simple para el 1er trinomio :

$$\begin{array}{ccc} x^2 & +\ cx & -\ 2 \\ \boxed{x \qquad\qquad +1} & & \longleftarrow \text{DATO} \\ x & & -\ 2 \end{array}$$

Vemos que $-2x+x=cx \quad \Rightarrow \quad c=-1$

2do) Reconstruímos el aspa simple para el 2do trinomio :

$$\begin{array}{ccc} dx^2 & +\ 5x & -\ 4 \\ \boxed{2x \qquad\qquad -1} & & \longleftarrow \text{DATO} \\ ax & & +4 \end{array}$$

Debe cumplirse : $-ax+8x=5x \ \Rightarrow \ a=3$

Pero : $2x\,.\,ax=d\,x^2 \ \Rightarrow \ d=6$

Finalmente concluímos que : $\dfrac{d}{c} = \boxed{-6}$ **RPTA. D**

12.- Los trinomios $2x^2+ax+6$ y $2x^2+bx+3$ admiten un factor común de la forma $2x+c$. Calcular el valor de $(a-b)\,c$.

A) -3 B) 2 C) 6 D) -2 E) 3 UNI 96 - II

Resolución.-

1er Método : Por aspa simple en ambos casos :

$$\begin{array}{ccc} & 2x^2 \ +\ ax \ +\ 6 & \\ \text{DATO} \longrightarrow & \boxed{2x \qquad\qquad c} & \\ & x \qquad\qquad \dfrac{6}{c} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2x^2 \ +\ bx \ +\ 3 & \\ & \boxed{2x \qquad\qquad c} & \longleftarrow \text{DATO} \\ & x \qquad\qquad \dfrac{3}{c} & \end{array}$$

Del 1[er] diagrama : $a = 2\,.\,\frac{6}{c} + c$

Del 2[do] diagrama : $b = 2\,.\,\frac{3}{c} + c$

Entonces : $(a - b)\,.\,c = \left[\frac{12}{c} + c - \frac{6}{c} - c\right].\,c = \frac{6}{c}\,.\,c = 6$

2[do] Método : Si $2x + c$ divide exactamente a ambos trinomios, también dividirá a su diferencia.

$$\left(2x^2 + ax + 6\right) - \left(2x^2 + bx + 3\right) = (a - b)\,x + 3$$

Es decir $(a - b)\,x + 3$ es divisible por $2x + c$, luego los coeficientes deben guardar una proporción entre sí :

$$\frac{a-b}{2} = \frac{3}{c} \quad \Rightarrow \quad (a - b)\,.\;c = \boxed{6}$$ **RPTA. C**

13.- La expresión (x - 3) (x - 2) (x - 1) x - 3 admite ser descompuesta en dos factores cuadráticos. ¿Cuál de ellos posee menor valor numérico para cualquier valor de x?

A) $x^2 - 3x - 1$ ***B)*** $x^2 - 3x + 1$ ***C)*** $x^2 - 3x - 3$

D) $x^2 - 3x + 3$ ***E)*** $x^2 + 3x - 1$

<u>Resolución</u>.-

Ordenando : $\overbrace{x\,(x - 3)}\,.\,\overbrace{(x - 2)\,(x - 1)} - 3$

Multiplicamos lo indicado : $\left(x^2 - 3x\right).\left(x^2 - 3x + 2\right) - 3$

Volvemos a multiplicar y obtenemos : $\left(x^2 - 3x\right)^2 + 2\left(x^2 - 3x\right) - 3$

Tratando de conservar los términos cuadráticos, descomponer por el método del Aspa Simple :

$$\begin{array}{ccc} x^2 - 3x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & +3 \\ x^2 - 3x & & -1 \end{array}$$

Los factores son : $\left(x^2 - 3x + 3\right)\left(x^2 - 3x - 1\right)$

Para cualquier valor de x, el que toma el menor valor es : $\boxed{x^2 - 3x - 1}$ **RPTA. A**

14.- Factorizar : ***(x - 5) (x - 7) (x + 6) (x + 4) - 504***

e indicar uno de sus factores lineales.

A) ***x - 5*** ***B)*** ***x + 7*** ***C)*** ***x + 6*** ***D)*** ***x + 3*** ***E)*** ***x - 2***

Resolución.-

Ordenando los factores del primer término : $\overbrace{(x-5)(x+4)}\,.\,\overbrace{(x-7)(x+6)}-504$

Efectuando el producto de las expresiones indicadas : $\left(x^2-x-20\right)\left(x^2-x-42\right)-504$

Haciendo un cambio de variable (C.V.) : $x^2-x=a$, hacemos : $(a-20)(a-42)-504$

Efectuando el producto : $a^2-62a+840-504$

Ahora nos queda por factorizar : $a^2\ -\ 62a\ +\ 336$

$$\begin{array}{ll} a & -56 \\ a & -6 \end{array}$$

Los factores son : $(a-56)\ \ (a-6)$

Reemplazando "a" : $(x^2\ -\ x\ -\ 56)\quad(x^2\ -\ x\ -\ 6)$

$$\begin{array}{ll} x & -8 \\ x & +7 \end{array}\qquad\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & +2 \end{array}$$

La expresión completamente factorizada resulta ser :

$$\mathbf{(x-8)\ (x+7)\ (x-3)\ (x+2)}$$ **RPTA. B**

15.- Indicar el término independiente de uno de los factores primos del trinomio P(x ; y) ≡ (x + y + 3)^2 + 7x + 7y + 31

A) 2 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 3*** ***E) 39***

Resolución.-

Con la finalidad de aplicar el método del aspa simple descomponemos convenientemente al 31. Veamos :

$$P(x\,;y)\equiv(x+y+3)^2+7x+7y+21+10$$

Extrayendo el factor 7 de la expresión indicada con llave, se tendrá :

$$P(x\,;y)\equiv(x+y+3)^2+7(x+y+3)+10$$

Aplicando aspa simple :

$$\begin{array}{ll} (x+y+3) & 5 \\ (x+y+3) & 2 \end{array}$$

Finalmente obtenemos : $P(x\,;y)\equiv(x+y+8)+(x+y+5)$ **RPTA.C**

6.10) METODO DEL ASPA DOBLE

Se emplea para factorizar polinomios que tienen la siguiente forma general :

$$A\,x^2 + B\,xy + Cy^2 + D\,x + E\,y + F$$

1^ro^) Se trazan dos aspas simples entre los términos $Ax^2 \wedge Cy^2 \wedge Cy^2 \wedge F$

2^do^) Se traza un aspa grande entre los extremos $Ax^2 \wedge F$

3^ro^) Se verifican los aspas simples y el aspa grande.

4^to^) Se forman factores como en el método anterior. (horizontalmente)

Ejemplo.- Factorizar : $x^2 + 5xy + 4y^2 + 2x + 5y + 1$

$$\begin{array}{ccccc}
x^2 + 5xy & + & 4y^2 + 2x & + & 5y + 1 \\
x & & 4y & & 1 \\
x & & y & & 1
\end{array}$$

Verificaciones :

1^ra^ aspa : $xy + 4xy = 5xy$

2^da^ aspa : $4y(1) + y(1) = 5y$

3^ra^ aspa : $x(1) + x(1) = 2x$

La expresión factorizada es : $(x + 4y + 1)\ (x + y + 1)$

6.11) ASPA DOBLE ESPECIAL

Se utiliza para factorizar polinomios de 4^to^ grado de la forma general :

$$A\,x^4 + B\,x^3 + C\,x^2 + D\,x + E$$

1^ro^) Se aplica un aspa simple en los términos extremos $Ax^4 \wedge E$

2^do^) El resultado se resta del término central Cx^2

3^ro^) Expresar la diferencia en dos factores y colocarlos debajo del término central.

4^to^) Luego se aplican dos aspas simples, y se toman horizontalmente.

Ejemplo.- Factorizar : $6x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 6x - 8$

$$\begin{array}{ll}
6x^4 - 13x^3 + 7x^2 + 6x - 8 & \\
3x^2 & 4 \\
2x^2 & -2
\end{array}$$

Verificaciones :

$-6x^2 + 8x^2 = 2x^2$

$\Rightarrow \quad 7x^2 - 2x^2 = 5x^2$

Se descompone $5x^2$ en dos factores $(-5x)(-x)$ que se ubican bajo el término central :

$$\begin{array}{ccc}
6x^4 - 13x^3 & + 7x^2 + & 6x - 8 \\
3x^2 & -5x & 4 \\
2x^2 & -x & -2
\end{array}$$

Los factores son :

$(3x^2 - 5x + 4)\ (2x^2 - x - 2)$

$\therefore \quad \left(3x^2 - 5x + 4\right)\ \left(2x^2 - x - 2\right)$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO IV)

15.- Reconocer un factor del polinomio : $6a^2 - 11ab + 4b^2 - 8a + 14b - 8$

A) $3a + 4b - 2$ ***B)*** $3a - 2b + 4$ ***C)*** $2a - 2b + 1$

D) $2a + 4b - 1$ ***E)*** $3a - 4b + 2$

Resolución.-

Tratándose de un Polinomio de segundo grado con dos variables y seis términos, aplicaremos el Método del Aspa Doble :

$$6a^2 - 11ab + 4b^2 - 8a + 14b - 8$$

$$\begin{array}{ccccc} 3a & & -4b & & +2 \\ 2a & & -b & & -4 \end{array}$$

El término encerrado en el círculo es el resultado del aspa mayor :

$$3a \,.\, (-4) + 2a\,(2) = -12a + 4a = -8a$$

Los factores son : $\boxed{(3a - 4b + 2)}$ y $(2a - b - 4)$ **RPTA. E**

16.- Factorizar : $6x^2 + 20y^2 + 23xy + x + 6y - 2$ ***indicando la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.***

***A)* 5** ***B)* 7** ***C)* 9** ***D)* 4** ***E)* 10**

Resolución.-

Dadas las características del polinomio, haremos uso del Método del Aspa Doble :

$$6x^2 + 23xy + 20y^2 + x + 6y - 2$$

$$\begin{array}{ccccc} 3x & & 4y & & 2 \\ 2x & & 5y & & -1 \end{array}$$

De esta manera identificamos a los factores : $(3x + 4y + 2)\ (2x + 5y - 1)$

Suma de coeficientes : $3 + 4 + 2 = \mathbf{9}$; $2 + 5 - 1 = \mathbf{6}$ **RPTA. C**

17.- Factorizar en Z al polinomio : $P(x) \equiv x^6 + 4x^5 - 21x^4 - 20x^2 - 4$

A) $(x^3 + 7x^2 - 2)\ (x^3 - 3x^2 + 2)$ ***B)*** $(x^4 + 2)\ (x^3 - 3x - 2)$ ***C)*** $(x^3 + 7x - 2)\ (x^3 - x - 2)$

D) $(x^3 + 7x^2 + 2)\ (x^4 - 2)$ ***E)*** $(x^3 + 7x^2 + 2)\ (x^3 - 3x^2 - 2)$

Resolución.-

Completando convenientemente para aplicar aspa doble agregando el término : $0x^3$, tendremos :

$$P(x) \equiv x^6 + 4x^5 - 21x^4 + 0x^3 - 20x^2 - 4$$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ x^3 & 7x^2 & 2 \\ x^3 & -3x^2 & -2 \end{array}$$

(*) : término fijo.

$\therefore \quad P(x) \equiv \boxed{\left(x^3 + 7x^2 + 2\right)\left(x^3 - 3x^2 - 2\right)}$ **RPTA. E**

18.- El coeficiente de un término lineal de uno de los factores primos de :

$$P(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 5x + 2 \text{, es :}$$

A) 2 *B) -2* *C) 1* *D) -1* *E) -3*

Resolución.-

Completando el polinomio P(x) de 4to grado para aplicar aspa doble especial, tendremos :

$$P(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 5x + 2$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & 3x & 1 & \rightarrow & x^2 \\ x^2 & -x & 2 & \rightarrow & 2x^2 \end{array} \Big\} \; (+) = 3x^2$$

$$* \quad 0x^2 - 3x^2 = -3x^2$$

Ojo.- Lo indicado en el recuadro se obtiene después de construir el aspa grande.

Luego : $P(x) \equiv \left(x^2 + 3x + 1\right)\left(x^2 - x + 2\right)$

términos lineales

$\therefore$ Los coeficientes de los términos lineales son : 3 y $\boxed{-1}$ **RPTA. D**

6.11) METODO DE LOS DIVISORES BINOMICOS

Este método se fundamenta en el siguiente principio : "Si un polinomio se anula para $x = \pm a$, uno de sus factores es $(x \mp a)$".

Para obtener los valores de x que anulan el polinomio se recordará lo siguiente :

a) Cuando el coeficiente del término de mayor grado es la unidad, los posibles valores de a son los divisores del término independiente del polinomio.

b) Cuando el coeficiente del término de mayor grado no es la unidad, los posibles valores de a son cantidades enteras o fraccionarias que resultan de combinar los divisores del término independiente y del primer coeficiente.

Ejemplo.- Factorizar : $x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 42x + 40$

Debe reconocerse que los posibles valores de a son :

$$\{\text{divisores de } 40\} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; ....\}$$

De este modo los posibles factores son : $(x \pm 1)$; $(x \pm 2)$; ....

Por el método de Ruffini se verifica si el polinomio dado se puede dividir exactamente entre estos divisores :

	1	6	-5	-42	40
$x = 1$		1	7	2	-40
	1	7	2	-40	0
$x = 2$		2	18	40	
	1	9	20	0	
$x = -4$		-4	-20		
	1	5	0		

Conclusiones :

- El polinomio se anula para : $x = 1 ; 2 ; -4.$

- Tres de sus factores son : $(x - 1)$; $(x - 2)$ y $(x + 4)$

- El último factor es el cociente final : $x + 5$

$\therefore$ La expresión factorizada es : $\mathbf{(x - 1)\ (x - 2)\ (x + 4)\ (x + 5)}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO V)

19.- Factorizar : $6x^3 - 25x^2 + 23x - 6$ indicando la suma de sus factores primos lineales.

A) $5x - 1$ B) $6x - 6$ C) $3x + 2$ D) $4x - 3$ E) $2x - 7$

Resolución.-

Por tratarse de un polinomo ordenado y completo, procederemos a utilizar el Método de Divisores Binómicos, para intentar así,encontrar una primera factorización. Veamos :

Luego de analizar los divisores del término independiente (- 6) :

$$\{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6\}$$

De estos reconocemos que para $x = 3$, tenemos : $6 . 3^3 - 25 . 3^2 + 23 . 3 - 6 = 0$

	6	-25	23	-6
3		18	-21	6
	6	-7	2	0

De este modo $(x - 3)$ es un factor y el otro es : $6x^2 - 7x + 2$

Continuamos factorizando esta última expresión por Aspa Simple :

$$\begin{array}{lll} 6x^2 & - 7x & + 2 \\ 3x & & -2 \\ 2x & & -1 \end{array} \Bigg\} (3x-2)(2x-1)$$

De este modo la expresión factorizada es : $(x - 3)(3x - 2)(2x - 1)$

Reconociendo que todos sus factores son lineales; la suma de ellos será :

$$x - 3 + 3x - 2 + 2x - 1 = \boxed{6x - 6}$$ **RPTA. B**

20.- Cuántos factores primos tiene la siguiente expresión : $P(x) \equiv x^5 + 4x^4 - 10x^2 - x + 6$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución.-

Haciendo una simple inspección, observamos que el polinomio se anula para :

$$x = 1 \qquad \therefore \qquad P(1) = 0$$

Pues bien, recordando la teoría de los Divisores Binómicos, diremos que : $(x - 1)$ es un factor del polinomio $P(x)$.

Por Ruffini obtendremos el 2[do] factor, veamos :

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 4 & 0 & -10 & -1 & 6 \\
\hline
1 & \downarrow & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\
\hline
 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 & 0
\end{array} \rightarrow \text{Residuo}$$

$$\Rightarrow \quad P(x) \equiv (x-1)\left(x^4+5x^3+5x^2-5x-6\right)$$

Factorizando el polinomio de 4[to] grado por el mismo método , tendremos que :

$x = 1$ (anula el polinomio) $\Rightarrow$ $(x-1)$ es un factor

$x = -1$ (anula el polinomio) $\Rightarrow$ $(x+1)$ es un factor

$x = -3$ (anula el polinomio) $\Rightarrow$ $(x+3)$ es un factor

$x = -2$ (anula el polinomio) $\Rightarrow$ $(x+2)$ es un factor

Así, concluimos que el polinomio estará compuesto por los siguientes factores :

$$P(x) \equiv (x-1)(x-1)(x+1)(x+3)(x+2)$$

Es decir : $$P(x) \equiv (x-1)^2 (x+1)(x+3)(x+2)$$

$\therefore \quad \# \text{F.P.} = \boxed{4}$ **RPTA. D**

21.- La expresión $21x^2 + nx + 21$ debe ser factorizada en dos factores binomios lineales y primos con coeficientes enteros. Esto se puede hacer si n es :

A) Cualquier entero impar ***B) Algún entero impar*** ***C) Cualquier entero par***

D) Algún número par ***E) cero***

Resolución.-

Sean: $ax + b$ y $cx + d$ los factores binomios lineales que la condición del problema exige, luego ; si efectuamos el producto de ellos obtendremos :

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$\Rightarrow \quad ac\,x^2 + (ad+bc)x + bd \equiv 21\,x^2 + nx + 21 \quad \text{.........} (*)$$

Por tratarse de polinomios idénticos deberá cumplirse que : $a.c = 21$; $b.d = 21$

Puesto que 21 es un número impar, todos sus factores serán impares, por tanto a y b son impares, lo mismo que b y d.

Estas observaciones nos permiten efectuar ahora el siguiente análisis. De la (*) :

$$n = a\,.\,d + b\,.\,c$$

$\Rightarrow \quad n$ = impar . impar + impar . impar

$\Rightarrow \quad n$ = impar + impar

$\Rightarrow \quad \boxed{n = \text{par}}$ **RPTA. D**

MISCELANEA

22.- Un factor de : $a(a-1)+a^3-1$ es :

A) $1-a$ *B) $a+1$* *C) $a+2$* *D) $a-2$* *E) a* **UNFV 84**

Resolución.-

Factorizando la diferencia de cubos : $a\overbrace{(a-1)}+\overbrace{(a-1)}\left(a^2+a+1\right)$

Ahora factorizamos lo indicado : $(a-1)\left[a+a^2+a+1\right]$

Efectuando dentro del corchete : $(a-1)\left(a^2+2a+1\right)$

Finalmente queda por factorizar un TCP : $(a-1)(a+1)^2$ **RPTA. B**

23.- Descomponer en factores : x^5+x+1

A) $(x^2+x+1)(x^3-x^2-1)$

B) $(x^2+x-1)(x^3-x^2-1)$

C) $(x^3-x+1)(x^2+1)$

D) $(x^2+x+1)(x^3+x^2+1)$

E) $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

Resolución.-

Sumando y restando x^2 a la expresión original : $\overbrace{x^5-x^2}+x^2+x+1$

Factorizando lo indicado, tendremos : $x^2(x^3-1)+x^2+x+1$

Agrupando y descomponiendo la difererencia de cubos :

$$x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$

Finalmente factorizamos la expresión entre paréntesis :

$$(x^2+x+1)\left[x^3-x^2+1\right]$$ **RPTA. E**

24.- Cuando se factoriza x^9-x hasta donde sea posible en polinomios y monomios con coeficientes enteros, el número de factores primos es :

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) más de 5*

Resolución.-

Procediendo ordenadamente, visualizaremos lo fácil que resulta realizar de esta factorización :

$$\begin{aligned} x^9 - x &= x\left(x^8 - 1\right) \\ &= x\left(x^4 - 1\right)\left(x^4 + 1\right) \\ &= x\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)\left(x^4 + 1\right) \\ &= x\,(x - 1)\,(x + 1)\left(x^2 + 1\right)\left(x^4 + 1\right) \end{aligned}$$

$\therefore$ El número de factores primos es : **5** **RPTA. D**

25.- La expresión $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z$ tiene :

A) Ningún factor lineal con coeficientes enteros y exponentes enteros

B) El factor $-x + y + z$ ***D) El factor $x + y - z + 1$***

C) El factor $x - y - z + 1$ ***E) El factor $x - y + z + 1$***

Resolución.-

Agrupando términos convenientemente : $x^2 - \left(y^2 - 2yz + z^2\right) + x + y - z$

Reconociendo el T.C.P. dentro del paréntesis : $x^2 - \left(y - z\right)^2 + (x + y - z)$

Factorizando la D.D.C. indicada : $(x + y - z)\,(x - y + z) + (x + y - z)$

Factorizando ahora la expresión indicada, nos queda : $\mathbf{(x + y - z)\;(x - y + z + 1)}$ **RPTA. E**

26.- Hallar la suma de los factores primos de : $a\left(a^2 + ab - 1\right) - b\left(b^2 + ab - 1\right)$

A) 3 (a+b) ***B) 3 a+b*** ***C) 3 a-b*** ***D) a + 3b + 1*** ***E) a + 2b + c***

Resolución.-

Efectuando los productos indicados : $a^3 + a^2b - a - b^3 - ab^2 + b$

Ordenando y agrupando convenientemente : $a^3 - b^3 + \left(a^2b - ab^2\right) - (a - b)$

Factorizando la diferencia de cubos, tendremos : $(a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) + ab\,(a - b) - (a - b)$

Si ahora factorizamos lo indicado, nos quedaría : $(a - b)\;\left[a^2 + ab + b^2 + ab - 1\right]$

Reduciendo términos dentro del corchete : $(a-b)\left[a^2+2ab+b^2-1\right]$

Reduciendo el T.C.P. : $(a-b)\left[(a+b)^2-1\right]$

Finalmente descomponemos la D.D.C. del corchete : $(a-b)(a+b+1)(a+b-1)$

$\therefore$ Suma de factores primos : $\boxed{3a+b}$ **RPTA. B**

27.- Factorizar la expresión : x^4+2x^3-2x-1 , e indicar la suma de los factores primos :

A) 2 ***B) 2x*** ***C) - 2*** ***D) - 2x*** ***E) 2 (x - 1)***

Resolución.-

Ordenando convenientemente : $\overbrace{x^4-1}+\overbrace{2x^3-2x}$

Factorizando la D.D.C. y el segundo término indicado : $(x^2+1)\overbrace{(x^2-1)}+2x\overbrace{(x^2-1)}$

Si factorizamos el factor indicado : $(x^2-1)\,.\left[x^2+1+2x\right]$

Reconociendo el T.C.P. dentro del corchete, tendremos : $(x+1)\;(x-1)\,.\,(x+1)^2$

Finalmente multiplicamos los factores comunes : $(x-1)\,(x+1)^3$

De esta última expresión los factores primos son : $(x-1)$ y $(x+1)$

Luego la suma de factores primos es : $x-1+x+1=\boxed{2x}$ **RPTA. B**

28.- Descomponer en dos factores : $x^{10}+2x^6+x^2-1$

A) $(x^5+x+1)(x^5+x+1)$ ***B) $(x^5+x+1)(x^5+x-1)$*** ***C) (x^5+x-1) (2x)***

D) No se puede factorizar ***E) N.A.***

Resolución.-

Podemos reconocer que los tres primeros términos forman un T.C.P. : $(x^5+x)^2-1$

Considerando que : $1=1^2$, factorizamos la D.D.C. mostrada : $\boxed{(x^5+x+1)(x^5+x-1)}$ **RPTA. B**

29.- Factorizar : $x^6+x^5+x^4+x^3+2x^2+2x+1$

e indicar el factor de mayor grado :

A) x^2+x-1 ***B) x^2-x-1*** ***C) x^4-x-1*** ***D) x^4+x+1*** ***E) $x-1$***

Resolución.-

Factorizando x^4 de los tres primeros términos : $x^4\left(x^2+x+1\right)+x^3+\underbrace{2x^2}+\underbrace{2x}+1$

Si descomponemos lo indicado en una suma y ordenamos convenientemente, tendremos : $x^4\left(x^2+x+1\right)+\underbrace{x^3+x^2+x}+x^2+x+1$

Factorizando la expresión indicada : $x^4\left(x^2+x+1\right)+x\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

Finalmente factorizamos la expresión entre paréntesis : $\left(x^2+x+1\right)\left(x^4+x+1\right)$

$\therefore$ El factor de mayor grado es : $\mathbf{x^4+x+1}$ **RPTA. D**

30.- La diferencia de los cuadrados de dos números impares es siempre divisible por 8. Si $a>b$ y $2a+1>2b+1$ son números impares, entonces, para probar la proposición dada, escribimos la diferencia de los cuadrados en la forma :

A) $(2a+1)^2-(2b+1)^2$ *B)* $4a^2-4b^2+4a-4b$ *C)* $4[\,a(a+1)-b(b+1)\,]$

D) $4(a-b)(a+b+1)$ *E)* $4\left(a^2+a-b^2+b\right)$

Resolución.-

Se afirma que los impares son : $2a+1$ y $2b+1$

La diferencia de sus cuadrados se expresará así : $(2a+1)^2-(2b+1)^2$

Desarrollando los T.C.P. : $4a^2+4a+1-4b^2-4b-1$

Reduciendo , agrupando y factorizando : $4\,[\,a\,(a+1)-b\,(b+1)\,]$

Tanto $a\,(a+1)$ como $b\,(b+1)$ son pares, luego su diferencia también será par, entonces se puede asegurar que :

$\mathbf{4\,[a\,(a+1)-b\,(b+1)]}$ es divisible por 8. **RPTA. C**

31.- Reconocer un factor de :

$$P(x;y;z)\equiv y[x^2(y+xz)+yz(z+xy)]+xz\,[z(x+yz)+y(xyz+1)]$$

A) $x+y+z$ *B)* $xy-z$ *C)* xyz *D)* $xy+z$ *E)* $yz-x$

Resolución.-

Efectuando se tendría :

$$\equiv x^2y^2+x^3yz+y^2z^2+xy^3z+x^2z^2+xyz^3+x^2y^2z^2+xyz$$

Factorizando según los pares indicados :

$$\equiv xy(xy+z) + x^2z(xy+z) + y^2z(z+xy) + xyz^2(z+xy)$$

Extrayendo el factor común $(xy+z)$, se tendrá :

$$\equiv (xy+z)\left[\underbrace{xy+x^2z}+\underbrace{y^2z+xyz^2}\right]$$

Factorizando por parejas, según lo indicado dentro del corchete :

$$\equiv (xy+z)\ [x(y+xz)+yz(y+xz)]$$

Extrayendo factor común del corchete se tendría : $P(x;y;z) \equiv (xy+z)(y+xz)(x+yz)$

Haciendo un chequeo de los distractores, reconocemos que entre ellos se anota al factor :

$xy+z$ **RPTA. D**

32.- Cuántos factores primos presenta la expresión :

$$P(x) \equiv (x+1)(2x+1)(3x+1)+(x+1)^2+x+x^2$$

A) 4 ***B) 3*** ***C) 2*** ***D) 1*** ***E) 0***

Resolución.-

Identifiquemos el factor común, agrupando y factorizando para ello a los dos últimos términos :

$$P(x) \equiv (x+1)(2x+1)(3x+1)+(x+1)^2+x(x+1)$$

Extrayendo factor común : $P(x) \equiv (x+1)\ [(2x+1)(3x+1)+(x+1)+x]$

Agrupando los dos últimos términos del corchete : $P(x) \equiv (x+1)\ [(2x+1)(3x+1)+(2x+1)]$

Extrayendo factor común del corchete se tendría : $P(x) \equiv (x+1)(2x+1)(3x+2)$

$\therefore\ \#\,F.P. = 3$ **RPTA. B**

33.- Cuántos factores presenta la expresión :

$$P(w;x;y;z) \equiv (w+z)^4 - 2\left(x^2+y^2\right)(w+z)^2+\left(x^2-y^2\right)^2$$

A) 15 ***B) 4*** ***C) 16*** ***D) 32*** ***E) 31***

Resolución.-

Escribiendo el polinomio así :

$$P(w;x;y;z) \equiv (w+z)^4 - 2\left(x^2+y^2\right)(w+z)^2+(x+y)^2(x-y)^2$$

Por tratarse de un trinomio, aplicaremos el Método del Aspa Simple :

$$P(w\,;x\,;y\,;z) \equiv (w+z)^4 - 2\left(x^2+y^2\right)(w+z)^2 + (x+y)^2(x-y)^2$$

$$\begin{array}{ccc} (w+z)^2 & \quad & -(x+y)^2 \\ (w+z)^2 & \quad & -(x-y)^2 \end{array}$$

$$P(w\,;x\,;y\,;z) \equiv \left[(w+z)^2-(x+y)^2\right]\left[(w+z)^2-(x-y)^2\right]$$

Reacomodando la DDC en cada corchete, tendremos :

$P(w\,;x\,;y\,;z) \equiv (w+z+x+y)\ (w+z-x-y)\ (w+z+x-y)\ (w+z-x+y)$

Finalmente el número de factores de $P(w\,;x\,;y\,;z)$ será :

$$\#\ \text{factores} = (1+1)\ (1+1)\ (1+1)\ (1+1)$$

$\therefore$ # factores = $\boxed{16}$ **RPTA. C**

34.- ¿Cuántos divisores tiene la siguiente expresión : $P(x) \equiv (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

A) 5 B) 16 C) 15 D) 3 E) 2

Resolución.-

Ordenando y agrupando convenientemente los factores del primer término :

$$P(x) \equiv (x+1)\ (x+4)\ (x+2)\ (x+3)+1$$

Efectuando los productos indicados : $P(x) \equiv \left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)+1$

Hagamos ahora un cambio de variables : $x^2+5x+4 = m$

$$\Rightarrow \quad P(x) \equiv m\,(m+2)+1 = m^2+2m+1 = (m+1)^2$$

Ahora sustituyendo la variable original se tendrá :

$$P(x) \equiv \left(x^2+5x+5\right)^2$$

$\therefore$ # Divisores = $\boxed{3}$ **RPTA. D**

35.- Un factor de : $P(x) \equiv x^7+x^5-1$; es :

A) x^2+x+1 B) x^2-x+1 C) x^3+x+1

D) x^3+x^2-1 E) $x^5-x^4+x^3-x+1$

Resolución.-

Hagamos el siguiente artificio : sumemos y restemos "x"

$$P(x) \equiv x^7 - x + \underbrace{x^5 + x - 1}\ \ ......(\alpha)$$

Factoricemos lo indicado; haciendo otro artificio : sumamos y restamos x^2

$$x^5 + x - 1 = \underbrace{x^5 + x^2} - x^2 + x - 1$$

Factorizando lo indicado y agrupando : $x^5 + x - 1 = x^2\left(x^3+1\right) - \left(x^2 - x + 1\right)$

Factoricemos la suma de cubos : $x^5 + x - 1 = x^2\ (x+1)\left(x^2 - x + 1\right) - \left(x^2 - x + 1\right)$

Ahora factorizamos los trinomios : $x^5 + x - 1 = \left(x^2 - x + 1\right)\left[x^2(x+1) - 1\right]$

Y efectuando el producto dentro del corchete : $x^5 + x - 1 = \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^3 + x^2 - 1\right)$ ...... (β)

A continuación reemplazamos (β) en (α) : $P(x) \equiv \underbrace{x^7 - x} + \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^3 + x^2 - 1\right)$

Factorizando lo indicado : $P(x) \equiv x\left(x^6 - 1\right) + \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^3 + x^2 - 1\right)$

Reconociendo la D.D.C., factorizamos así : $P(x) \equiv x\underbrace{\left(x^3+1\right)}\left(x^3 - 1\right) + \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^3 + x^2 - 1\right)$

Factorizando la suma de cubos, obtenemos :

$$P(x) \equiv x\,(x+1)\underbrace{\left(x^2 - x + 1\right)}\left(x^3 - 1\right) + \underbrace{\left(x^2 - x + 1\right)}\left(x^3 + x^2 - 1\right)$$

Factorizando lo indicado :

$$P(x) \equiv \left(x^2 - x + 1\right)\left[x\,(x+1)\,(x^3 - 1) + (x^3 + x^2 - 1)\right]$$

Finalmente efectuamos operaciones dentro del corchete y simplificando, obtenemos :

$$P(x) \equiv \left(x^2 - x + 1\right)\quad\left(x^5 + x^4 + x^3 - x - 1\right)$$ **RPTA. B**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- La expresión : $x(a+b)+y(a+b)$ es equivalente a :

A) $a(x+b)+b(y+a)$ B) $(x+y)(a+b)$

C) $b(x+a)+b(y+a)$ D) $(a+b)(x-y)$

E) N.A.

2.- Señale verdadero o falso :

I. $x^2-36=(x+6)(x-6)$

II. $a^2-a-30=(a-6)(a+5)$

III. $2ax-4ay=2a(x-2+y)$

A) VFF B) FVV C) VVV
D) VVF E) VFV

3.- En la expresión $3a^4b-3a^3b^2+6a^2b^2$ se observa que todos los términos contienen al factor común :

A) a^3b B) a^2b^2 C) a^2+b

D) $3a^2b$ E) $3ab^2$

4.- En la diferencia de dos cubos perfectos se observa que es posible extraer un factor binomio. Así de : $8x^3-27$ el factor binomio es :

A) $8x-3$ B) $2x+3$ C) $2x-9$

D) $2x-3$ E) N. A.

5.- Señale la afirmación Falsa :

A) Uno de los factores de : a^3+b^3 es (a^2-ab+b^2)

B) Uno de los factores de : a^3-b^3 es $(a-b)$

C) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

D) $(a+b)^2+(a-b)^2=a^2+b^2$

E) $(a-b)^2=(b-a)^2$

6.- El método del aspa simple se puede aplicar a la factorización de :

I. $5x^2+7x-6$

II. $4x^2-9y^2$

III. $x^2-3x-10$

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II

D) I y III E) I, II y III

7.- Uno de los factores de : $x^2y-y^3-x^3+xy^2$, es :

A) $x+y$ B) x^2+y C) x^2-y

D) y^2-2x E) $2x+y$

8.- Factorícese : $3x^7-243x^3$

A) $3x^3(x^2+9)(x+3)(x-3)$

B) $3x^3(x+3)^4(x-3)$

C) $3x^3(x+3)^2(x-3)^2$

D) $3x^3(x+3)^2(x-3)$

E) N.A.

9.- La expresión x^3-x-6 se anula cuando $x=2$, por lo tanto $(x-2)$ es un factor y el otro es :

A) x^2+x+3 B) x^2-x+3

C) x^2+2x+3 D) x^2+x-3

E) N.A.

10.- Uno de los factores de : $8(m+1)^3-125$, es :

A) $5m^2+6$ B) $3m-2$

C) $5m+2$ D) $4m^2+18m+39$

E) $4m-25$

NIVEL B

11.- Indique un factor de : $(x-1)^2 - 2(x-1) - 24$

A) $x+1$ B) $x+2$ C) $x+3$

D) $x+4$ E) $x+5$

12.- Indique un factor de : $a^2 + ab + ac + bc$

A) $a+1$ B) $b+1$ C) $c+1$

D) $a+b$ E) $a+bc$

13.- Señale un factor de : $x^{20}y^{40} - x^{22}y^{42}$

A) $1+x^2$ B) $1+xy$ C) $1+y$

D) x^2+y^2 E) $x-1$

14.- Halle un factor de: $x^5 - 2x^4 - x + 2$, señalando el factor de menor término independiente.

A) $x-3$ B) $x-2$ C) $x-1$ D) $x+1$ E) $x+2$

15.- ¿Cuál de los siguientes es un factor de :

$$(x+y)^2 - 18(x+y) + 65$$

A) $x+y+13$ B) $x+y+5$ C) $x-y-13$

D) $x-y-5$ E) $x+y-13$

16.- Con respecto a la expresión :

$$4x^4y - 4x^3y^2 - 24x^2y^3$$

Señale verdadero o falso :

I. Un factor es $(x-3y)$

II. Un factor es $(x+2y)$

III. Tiene más de dos factores primos.

A) VVF B) VFV C) FVF

D) FFV E) VVV

17.- El equivalente de la expresión :

$$1 + x\ (x+1)(x+2)(x+3)\ \ ; \ \text{es :}$$

A) $\left(x^2+2x+2\right)^2$ B) $\left(x^2+3x+1\right)x$

C) $(x+1)^2(x-1)$ D) $\left(x^2+3x+1\right)^2$

E) $(x-1)^2(x+1)$

18.- Encontrar el equivalente de la expresión :

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad + 2bc$$

A) $(b-c-a+d)\ (b+c-a-d)$

B) $(b+c-a-d)\ (b-c+a+d)$

C) $(b+c+a+d)\ (b-c+a-d)$

D) $(b-c+a+d)\ (b-c-a-d)$

E) $(b+c+a-d)\ (b+c-a+d)$

19.- Factorizar : $m^2 - 2mn - 3n^2$, sumando los términos de sus factores primos.

A) $3(m-n)$ B) $3(n-m)$ C) $m+n$

D) $-2(m-n)$ E) $2(m-n)$

20.- Factorizar : $4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4$, e indicar uno de sus factores :

A) $2m^2 + 3m^2n + 3n^2$ B) $2m^2 - 3mn + 3n^2$

C) $2m^2 + 3mn^2 - 3n^2$ D) $2m^2 - 3mn + 3n^2$

E) N. A.

21.- Indicar el factor numérico de :

$$(x-y)^4 - x^4 - y^4 - 2xy^3$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

22.- Descomponer el trinomio : $x^4 + x^2 + 1$, en el producto de dos factores reales.

A) $(x-1)\left(x^3-x^2+x-1\right)$

B) $\left(x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

C) No es posible

D) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

E) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$

23.- ¿Cuál de los siguientes trinomios es factor del polinomio?

$$x^4+2x^3+4x^2+3x-28$$

A) x^2+x-7 D) x^2+x-4

B) x^2+x-14 E) N. A.

C) x^2+x+4

24.- Factorizar : $(a+b)^2\ \left(a^2+b^2\right)+a^2\ b^2$, luego indique el mayor grado de uno de sus factores.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25.- Dar la suma de factores primos de :

$$36x^5+36x^4-25x^3-25x^2+4x+4$$

A) $11x+1$ B) $11x+4$ C) $11x+2$

D) $11x+5$ E) $11x+3$

NIVEL C

26.- Factorizar : $m\,n\left(x^2+a^2\right)\ -x\,a\left(m^2+n^2\right)$

A) $(nx-an)\,(nx-am)$ B) $(ax-nm)\,(ax+nm)$

C) $(mx-an)\,(nx-am)$ D) $(mx-am)\,(mn-nx)$

E) N.A.

27.- Indicar la suma de los factores de :

$$(a-b)^2\ (c-d)^2+2ab\,(c-d)^2+2cd\left(a^2+b^2\right)$$

A) $a^2+b^2+c^2+d^2$ B) $a+2b+c+2d$

C) $a^2-b^2+c^2-d^2$ D) $a+b^2+c+d$

E) N.A.

28.- Factorizar y dar como respuesta la suma de los factores de :

$$9(x-y)^2+12\left(x^2-y^2\right)+4(x+y)^2$$

A) $5x-y$ B) $5x+y$ C) $10x-2y$

D) $10x+2y$ E) N.A.

29.- Factorizar : $(x+1)\,(x+3)\,(x+4)\,(x+6)+8$

A) $(x+9)\,(x+11)\,(x+12)\,(x+14)$

B) $\left(x^2+7x+18\right)\left(x^2+5x+8\right)$

C) $\left(x^2+2x+8\right)\left(x^2+2x+10\right)$

D) $\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+7x+8\right)$

E) N.A.

30.- Luego de factorizar : $x^6-x^5-x^4+x^2+x-1$

I. $(x-1)^3\cdot\left(x^3+1\right)$

II. $\left(x^3-1\right)\left(x^2-1\right)(x-1)$

III. $(x-1)^3\,(x+1)\left(x^2+x+1\right)$

A) II y III son verdaderas

B) I y II son verdaderas

C) I y III son verdaderas

D) Solo I es verdadera

E) N.A.

31.- Factorizar : $a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)+2(ab+bc+ac)-3$, indicando un factor :

A) $a+b+c+1$ B) $a-b+2$ C) $a+b+c+3$

D) $a+c-b$ E) $a+c-2$

32.- Un factor de :

$$\left(x^3-x^2+x-1\right)(x+1)\left(x^4+1\right)+x^4+2\ \text{, es:}$$

A) x^2+x+2 B) x^2+2x-1 C) x^2-3x+1

D) x^2-3x-1 E) x^2+x+1

33.- Hallar la suma de los factores primos de :

$$2x^5+5x^4-26x^3-65x^2+72x+180$$

A) $5x+6$ B) $7x-2$ C) $6x+5$
D) $9x+1$ E) $8x+3$

34.- Hallar la suma de los factores primos de :

$$x^3-13x-12$$

A) $3x-1$ B) $4x+7$ C) $3x-5$ D) $7x+4$ E) $3x$

35.- El factor primo de mayor grado de :

$$2x^4+5x^3-x^2-5x+2\ ;\ \text{es :}$$

A) $2x^2+1$ B) x^2-1 C) x^2+x-1
D) x^2+x+1 E) x^3+4

36.- Un factor de :

$$P(x;y;z)\equiv 4x^2z+4xy^2+4yz^2+2x^2y+2y^2z+2xz^2+9xyz\ ;\ \text{es:}$$

A) $2x+7$ B) $2y+z$ C) $2x+z$
D) $2z+x$ E) x

37.- ¿Cuántos divisores presenta :

$$P(x)\equiv x^5-6x^4+9x^3+8x^2-48x+72\ ?$$

A) 3 B) 4 C) 12 D) 6 E) 13

38.- Luego de factorizar :

$$P(x;y)\equiv 3(x-2y-5)^2-2(x-2y)+5\ ;$$

indicar el cociente de los términos independientes de los factores primos que se obtienen :

A) 20 B) 5 C) 4 D) 8 E) 10

39.- Luego de factorizar :

$$P(x)\equiv x^5-2x^3-x-1\ ,$$

indicar la suma de coeficientes de un factor primo.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) -2

40.- Cuántos factores primos presenta el polinomio:

$$P(x;y;z)\equiv x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

41.- Señale un factor de :

$$P(a;b;c)\equiv a^2b^2c^2+a^3c+b^3a+c^3b-a^2c^3-c^2b^3-abc$$

A) $(a+b)$ B) $b-c$ C) a^2-c
D) b^2-c E) a^2-bc

42.- Los factores primos de :

$$P(a;b;c)\equiv 8a^3-b^3+4a^2b-2ab^2-2a+b\ ;$$

suman :

A) $6a-b$ B) $6a+b$ C) $a+6b$
D) $2a-3b$ E) $5a-2$

43.- ¿Cuántos factores primos admite :

$$P(a;b;c)\equiv \left(a^2-b^2\right)\left(c^3-a^3\right)-\left(c^2-a^2\right)\left(a^3-b^3\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

44.- Reconocer un factor de :

$$P(x;y)\equiv 2x^4+4xy^3-6x^2y^2+x^3y+2y^4-3xy^3$$

A) $x-y$ B) $x+y$ C) x^2+y^2
D) $2x-y$ E) $x-2y$

45.- Indicar un factor de :

$$P(a;b;c)\equiv a^4bc+ab^4c+abc^4-b^3c^3-a^3b^3-a^3c^3$$

A) abc B) $b^2-a^2c^2$ C) a^2-b^2c
D) a^2-bc E) a^2-bc^2

46.- Proporcionar la combinación correcta luego de sentenciar con verdadero (V) o falso (F) cada aseveración siguiente :

I) Si : $2x^2-2x-5$ es un factor del polinomio

$6x^5 - 6x^4 - 13x^3 - 6x^2 + mx - n$ entonces otro de sus factores será : $3x^3 + x - 2$ ..... ( )

II) En $\mathbb{R}$ todo polinomio MONICO de grado mayor o igual que dos se puede descomponer como el producto de otros polinomios mónicos de grado mayor o igual que uno ..... ( )

III) La suma de los factores primos del polinomio : $x^7 + x^4 - x^2 + x + 1$, admite un divisor de la forma :

$$(\alpha_1 x + \alpha_2)^{\alpha_3} \;/\; \{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3\} \subset \mathbb{N} \quad ..... (\ )$$

A) VVV B) FVF C) VFF

D) VFV E) FFF

47.- Mostrar la suma de los 3 factores primos de :

$$P(x) \equiv x^3 - x^2 - 17x + 33$$

A) $3x + 1$ B) $3x + 3$ C) $3x - 1$

D) $3x - 3$ E) $3x - 2$

48.- Sabiendo que el producto del M.C.M. y M.C.D. de dos polinomios es : $x^5 - x^3$, y la suma de ambos polinomios es : $x^3 + x$; proporcionar el M.C.M.

A) $x^4 - x^2$ B) $x^4 + x^2$ C) $x^5 + x$

D) $x^4 - x$ E) $x^2 - x$

49.- Indicar el factor binomio de :

$$P(x ; y ; z) \equiv 3x^4 - 2y^2 - x^2y + 7yz - 7x^2z$$

A) $x^2 + y$ B) $x - y$ C) $x^2 - y$

D) $x - y^2$ E) $x^3 - y$

50.- Hallar la suma de coeficientes de un factor primo del polinomio :

$$P(x) \equiv x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 6x - 1$$

A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 5

51.- La suma de los factores primos del polinomio :

$$P(x) \equiv 6(m^3x^4 - 2m^3x^3 + 1) + mx(x - 2)$$
$$(19mx + 2) - 3x \ ,$$

es independiente de "x"; hallar el valor de "m"

A) -1 B) -1/2 C) - 1/6 D) - 1/2 E) 3/4

52.- Luego de factorizar el polinomio :

$$P(x ; y; z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^3 - 3(xy + xz + yz)^2$$
$$(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + xz + yz)^3 ;$$

indicar el número de factores obtenidos.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

53.- Reconocer un factor del polinomio :

$$P(x ; y; z) \equiv 2[(x + y + z)^3 + xyz]$$
$$+ (x + y)(y + z)(x + z)$$

A) $x + 3y + 2$ D) $x + 7y - z$

B) $x + y + 2z$ E) $x - y + 5z$

C) $x + 4y + z$

54.- Al factorizar :

$$P(x) \equiv x^8 + x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^3 + 1 \ ;$$

indicar la suma de coeficientes de un factor primo más el número de factores del polinomio.

A) 13 B) 15 C) 12 D) 16 E) 19

55.- ¿Cuántos divisores admite el polinomio :

$$P(x ; y) \equiv x^5(x^5 - 2y^5)^3 - y^5(y^5 - 2x^5)^3 \ ?$$

A) 64 B) 65 C) 63 D) 67 E) 68

56.- Indicar la suma de coeficientes de un factor primo de :

$$P(x ; y) \equiv 6x^2 - 7x^2y - 3x^2y^2 + 5xy + 4x - 2$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7 Fracciones Algebraicas

7.1) MAXIMO COMUN DIVISOR (M.C.D.)

El Máximo Común Divisor de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de mayor grado posible contenida como factor, un número entero de veces, en dichas expresiones.

Para calcular el MCD se factorizan estas expresiones y el MCD estará formado por los factores comunes con su menor exponente.

7.2) MINIMO COMUN MULTIPLO (M.C.M.)

El Mínimo Común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es la expresión de menor grado posible que contiene un número entero de veces, como factor a dichas expresiones.

Para calcular el MCM se factorizan estas expresiones y el MCM se formará con los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo.- Determinaremos el MCD y el MCM de : $A = x^2 + xy$; $B = x^2 - y^2$

1°) Factorizamos cada polinomio : $A = x(x + y)$; $B = (x + y)(x - y)$

2°) MCD (A . B) $= x + y$.

3°) MCM (A , B) $= x(x + y)(x - y)$.

Ejemplo.- Hallar el MCD y el MCM de :

$$A = x^2 - 5x + 6 \quad ; \quad B = x^2 - 4 \quad ; \quad C = x^3 - 3x - 2$$

1°) Factorizamos cada polinomio :

$A = (x - 3)(x - 2)$

$B = (x + 2)(x - 2)$

$C = x^3 - x - 2x - 2 = x\left(x^2 - 1\right) - 2(x + 1)$

$= (x + 1)\underbrace{\left[x^2 - x - 2\right]} = (x+1)^2\ (x - 2)$

El único factor común es : $x - 2$

Los factores no comunes son : $(x - 3)$, $(x + 2)$, $(x + 1)$

2°) MCD [A, B, C] $= x - 2$

3°) MCM [A, B, C] $= (x - 2) . (x + 2)(x - 3) . (x+1)^2$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Hallar el grado absoluto del MCM de los polinomios :

$$A = x^5 - xy^4 \quad ; \quad B = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 + y^4\right)$$

A) 5 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) 11*** ***PUCP 95 - I***

Resolución.-

El polinomio A puede factorizarse : $A = x\left(x^4 - y^4\right)$

Factorizando la D.D.C.: $A = x\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)$

Factorizando la última D.D.C. $A = x\left(x^2 + y^2\right)(x + y)(x - y)$

El polinomio B no admite otros factores de los que ya tiene : $B = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 + y^4\right)$

$$\therefore \quad \text{MCM}\,[A\,,B] = x\left(x^2 + y^2\right)(x + y)(x - y)\left(x^4 + y^4\right)$$

El grado absoluto de este MCM será la suma de los grados absolutos de cada factor :

$$\text{G. A.} = 1 + 2 + 1 + 1 + 4 = \mathbf{9}$$ **RPTA. D**

2.- El Máximo Común Divisor de los polinomios :

$$P(x) \equiv a^5 - a^4x - ax^4 + x^5$$

$$Q(x) \equiv a^3x - a^2x^2 - ax^3 + x^4 \quad , \quad es :$$

A) $(x + a)^2\ (x - a)^2$ ***B) $(x + a)^3\ (x - a)$*** ***C) $(x^2 + a^2)\ (x - a)$***

D) $(x - a)^2\ (x + a)$ ***E) N.A.*** ***UNALM 91***

Resolución.-

La teoría nos recomienda factorizar cada polinomio; veamos :

$$P(x) \equiv a\left(a^4 - x^4\right) - x\left(a^4 - x^4\right) \equiv \left(a^4 - x^4\right)(a - x)$$

$$\Rightarrow \quad P(x) \equiv \left(a^2 + x^2\right)\left(a^2 - x^2\right)(a - x) \equiv \left(a^2 + x^2\right)(a + x)(a - x)^2$$

$$Q(x) \equiv ax\left(a^2 - x^2\right) - x^2\left(a^2 - x^2\right) \equiv \left(ax - x^2\right)\left(a^2 - x^2\right)$$

$$\equiv x(a - x)\ (a + x)\ (a - x) \equiv x(a + x)\ (a - x)^2$$

Los factores comunes con su menor exponente son : $(a-x)^2$, y , $(a+x)$

$$\therefore \quad \text{MCD }[P, Q] = (x+a)(a-x)^2 \qquad \textbf{RPTA. D}$$

3.- Sean : $P_1 \equiv Ax^2 + 2x - B$ ***y*** $P_2 \equiv Ax^2 - 4x + B$

Si $x-1$ ***es el M.C.D. de*** P_1 ***y*** P_2 ***, hallar el cociente*** $\frac{B}{A}$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5*** ***UNI 93***

Resolución.-

Como $(x-1)$ es M.C.D. de P_1 y P_2 , ambos polinomios son divisibles por $x-1$.- Luego aplicando el Teorema del Resto en cada polinomio, tendremos :

$$P_1(1) = 0 \Rightarrow A + 2 - B = 0 \Rightarrow A - B = -2 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$P_2(1) = 0 \Rightarrow A - 4 + B = 0 \Rightarrow A + B = 4 \qquad \ldots\ldots (2)$$

Resolviendo, (1) y (2) tendremos : $A = 1$, y , $B = 3$.

Luego : $\frac{B}{A} = \mathbf{3}$ **RPTA. C**

4.- Hallar el MCD de : $5x^3 - 5x^2 + 2x - 2$; $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$; $x^4 + x^3 - x^2 - x$

A) $x^2 - 1$ ***B)*** $x - 2$ ***C)*** $x - 3$ ***D)*** $x - 1$ ***E)*** $x^2 + 1$ ***UNI 88***

Resolución.-

Factorizando cada polinomio :

$$P = 5x^3 - 5x^2 + 2x - 2 = 5x^2(x-1) + 2(x-1)$$

$$= (x-1)(5x^2+2)$$

$$Q = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = 2x^2(x+1) - 2(x+1)$$

$$= 2(x+1)(x^2-1) = 2(x+1)^2(x-1)$$

$$R = x^4 + x^3 - x^2 - x = x^3(x+1) - x(x+1)$$

$$= x(x+1)(x^2-1) = x(x+1)^2(x-1)$$

Se observa que el único factor que se repite en todos los polinomios es $(x-1)$, luego el MCD es :

$$\boldsymbol{x - 1} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

5.- Si : $Q(x) \equiv x^3 - x^2 - 9x + 9$, es el M.C.M de los polinomios.

$P'(x) = x^2 + 2x - 3 \;\wedge\; P''(x) = x^2 + \alpha x + 3$, el cuadrado de su MCD es :

A) $x^2 - 2x - 1$ ***B) $x^2 + 2x + 1$*** ***C) $x^2 - 2x + 1$***

D) $(x+2)^2$ ***E) $(x+3)^2$***

Resolución.-

Desde que Q (x) es M.C.M. de P' (x) y P"(x), estos deben dividir exactamente a Q (x), luego :

$$Q(x) \div P''(x) \quad \rightarrow \quad R(x) \equiv 0$$

Efectuando la división por el método del Horner :

1	1	-1	-9	9
$-\alpha$		$-\alpha$	-3	$3(1+\alpha)$
-3			$\alpha(1+\alpha)$	
	1	$-(1+\alpha)$	0	0

* En la columna del residuo.

$$9 + 3(1 + \alpha) = 0$$

Luego : $\alpha = -4$

De este modo los polinomios son : $P'(x) \equiv x^2 + 2x - 3 \equiv (x - 1)(x + 3)$

$$\Rightarrow \quad P''(x) \equiv x^2 - 4x + 3 \equiv (x - 1)(x - 3)$$

$\therefore$ Finalmente el M.C.D. , es : **$(x - 1)$** **RPTA. C**

7.3) FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción algebraica es el cociente de dos expresiones algebraicas en las que la expresión que sirve de divisor es diferente de cero.

Ejemplos : $\dfrac{14a^2bc^2}{7abcx}$; $\dfrac{ax^3 - a^4}{2mx+3an}$; $\dfrac{a^3+b^4}{(a-b)^2+abx^2}$

A la expresión situada encima de la línea se le llamará *numerador* y a la que está por debajo se le llamará *denominador*.

CLASES DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

a) Fracción propia.- Una fracción algebraica es propia cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Ejemplos : $\dfrac{x+3}{x^2+2}$; $\dfrac{x^3+2x+5}{x^4-x^2+7}$

b) Fracción impropia.- Cuando el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador.

Ejemplos : $\dfrac{x^2-6x-1}{x-3}$; $\dfrac{4x}{x+1}$

c) Fracciones homogéneas.- Cuando tienen el mismo denominador.

Ejemplos : $\dfrac{2}{x+3}$; $\dfrac{x-1}{x+3}$; $\dfrac{x^2+2}{x+3}$

b) Fracciones heterogéneas.- Dos o más fracciones algebraicas son heterogéneas si tienen distinto denominador.

Ejemplos : $\dfrac{x+2}{x-1}$; $\dfrac{x^2+3}{x+2}$; $\dfrac{x}{x^2-1}$

e) Fracciones equivalentes.- Dos fracciones son equivalentes si toman los mismos valores numéricos para todos los valores admisibles de sus variables.

Ejemplos : $\dfrac{x+1}{x-1}$, y , $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$; son fracciones equivalentes.

Estas fracciones toman los mismos valores para los valores reales de x, excepto ± 1.

7.4) OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para operar con fracciones algebraicas es necesario tener en cuenta el siguiente principio fundamental : "*Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por una misma cantidad o expresión distinta de cero, la fracción resultante es equivalente a la fracción dada*".

El uso del principio fundamental se conoce como la operación de simplificar la misma a su mínima expresión.

Ejm : $\dfrac{x-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$; $x \neq 3$

$\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3} = \dfrac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{\cancel{(x+3)}(x+1)} = \dfrac{x+2}{x+1}$; $x \neq -3$

7.4A MINIMO COMUN DENOMINADOR

El mínimo común denominador de dos o más fracciones es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejm : Dados : $\dfrac{3}{x+1}$ y $\dfrac{4x+1}{x^2-x+1}$

$(x+1)\ (x^2-x+1)$ es el mínimo común denominador de dichas fracciones.

7.4B ADICION Y SUSTRACCION

Para la adición o sustracción de fracciones, se recomienda el siguiente procedimiento :

1ro) Se simplifican las fracciones, siempre que sea posible.

2do) Se les hace homogéneas, dando común denominador.

3ro) Se efectúa las operaciones que tengan lugar.

4to) Se simplifica la fracción resultante.

Ejm : $\dfrac{2x-3a}{x-2a} - \dfrac{2x-a}{x-a}$

El mínimo común denominador es : $(x-2a)\ (x-a)$

Utilizando el Principio Fundamental de operaciones con fracciones, tendremos :

$$\frac{(2x-3a)(x-a)}{(x-2a)(x-a)} - \frac{(2x-a)(x-2a)}{(x-a)(x-2a)}$$

Efectuando operaciones : $\dfrac{2x^2-5ax+3a^2 - (2x^2-5ax+2a^2)}{(x-2a)(x-a)}$

Esto se reduce a : $\dfrac{a^2}{(x-2a)(x-a)}$

7.4C MULTIPLICACION Y DIVISION

Se rige por el siguiente procedimiento :

1ro) Se descomponen en factores todos los posibles términos de las fracciones que se van a operar.

2do) Se simplifican, suprimiendo factores comunes del numerador y denominador.

3[ro]) Se multiplican numeradores y denominadores entre sí.

4[to]) Para la división en general, se cumple que :

$$\frac{A}{B} \div \left(\frac{C}{D}\right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Ejemplo : $\dfrac{x^2-9}{x+2} \cdot \dfrac{x-2}{x+3} \cdot \dfrac{x^3+8}{x^2-5x+6}$

$$\frac{\cancel{(x+3)}\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{x+2}} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x+3}} \cdot \frac{\cancel{(x+2)}\,(x^2-2x+4)}{\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x-2)}}$$

Luego de simplificar, queda : $x^2 - 2x + 4$

7.4D SIMPLIFICACION DE FRACCIONES COMPLEJAS

Se aplican las reglas anteriores hasta que al final se multipliquen los extremos para obtener un nuevo numerador y los medios para un nuevo denominador.

Ejemplo.- Las siguientes son algunas de las más conocidas fracciones complejas:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} \; ; \; \frac{\frac{a}{b}}{x} \; ; \; \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

extremos medios $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a.d}{b.c}$

Ejemplo .- Simplificar : $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}}$

Reduciendo el numerador : $\dfrac{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)\,(a^2+b^2)} = \dfrac{4\,a^2\,b^2}{(a^2-b^2)\,(a^2+b^2)}$

Reduciendo el denominador : $\dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)\,(a+b)} = \dfrac{4\,ab}{(a+b)\,(a-b)}$

Finalmente : $\dfrac{4\,a^2\,b^2}{(a^2-b^2)\,(a^2+b^2)} \cdot \dfrac{(a+b)\,(a-b)}{4\,ab} = \dfrac{ab}{a^2+b^2}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

6.- La forma más simple de la siguiente expresión : $\dfrac{a^{10}+a^8+a^6+a^4+a^2+1}{a^4+a^2+1}$ ***, es :***

A) a^4+a^2+1 ***B)*** a^3+1 ***C)*** a^6+1 ***D)*** a^6-1 ***E)*** a^2+a+1

UNFV 93

Resolución.-

El presente ejercicio nos sugiere efectuar una simplificación entre el numerador y denominador. Por ello factorizamos el numerador.

Agrupando términos : $=\left(a^{10}+a^8+a^6\right)+a^4+a^2+1$

Factorizando en el primer paréntesis : $=a^6\left(a^4+a^2+1\right)+\left(a^4+a^2+1\right)$

Finalmente factorizamos el trinomio : $=\left(a^4+a^2+1\right)\left(a^6+1\right)$

Reemplazando en la fracción, tendremos : $=\dfrac{\cancel{(a^4+a^2+1)}(a^6+1)}{\cancel{a^4+a^2+1}}$

$=\boxed{a^6+1}$ **RPTA. C**

7.- La expresión simplificada de : $\dfrac{p^3q+3p^2q+9pq}{p^3-27}$ ***, es :***

A) $\dfrac{pq}{p-3}$ ***B)*** $\dfrac{pq}{p+3}$ ***C)*** $\dfrac{pq}{p^2+9}$ ***D)*** $\dfrac{pq}{p^2-9}$ ***E)*** $\dfrac{pq}{3-p}$ ***UNMSM 84***

Resolución.-

Factorizando pq en el numerador y la diferencia de cubos en el denominador, tendremos : $=\dfrac{pq\,(p^2+3p+9)}{(p-3)\,(p^2+3p+9)}$

Donde luego de simplificar nos queda : $=\boxed{\dfrac{pq}{p-3}}$ **RPTA. A**

8.- Efectuar y simplificar : $\left(\dfrac{1}{a^2+3a+2}+\dfrac{2a}{a^2+4a+3}+\dfrac{1}{a^2+5a+6}\right)\cdot\dfrac{(a-3)^2+12a}{2}$

A) 1 ***B)*** $a+3$ ***C)*** $\dfrac{a+3}{a+2}$ ***D)*** $\dfrac{1}{a}$ ***E)*** $\dfrac{1}{a+1}$

Resolución.-

Operando en la expresión mayor ubicada entre paréntesis :

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{2a}{(a+1)(a+3)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}=\frac{a+3+2a(a+2)+a+1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

Efectuando en el numerador y factorizando, tendremos :

$$=\frac{2a^2+6a+4}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{2(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

Simplificando ahora los términos comunes del numerador y denominador, nos queda : $=\dfrac{2}{a+3}$

Reemplazando en la expresión original : $=\dfrac{2}{a+3}\cdot\dfrac{(a-3)^2+12a}{2}$

Y factorizando el numerador : $=\dfrac{2}{a+3}\cdot\dfrac{(a+3)^2}{2}$

Finalmente, luego de simplificar : $= a+3$ **RPTA. B**

9.- Simplificar la expresión : $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

A) abc *B)* $a^2+b^2+c^2$ *C)* $a+b+c$ *D)* $\dfrac{1}{abc}$ *E)* 1

Resolución.-

Dando el común denominador y efectuando, tendremos : $=\dfrac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

Efectuando los productos indicados y factorizando en el numerador : $=\dfrac{ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

Dividiendo por $a-b$, nos queda : $=\dfrac{ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)+c^3}{(a-c)(b-c)}$

Efectuamos los productos, agrupamos y factorizamos nuevamente, obteniéndose : $=\dfrac{a^2(b-c)+ab(b-c)-c(b^2-c^2)}{(a-c)(b-c)}$

Dividiendo por $(b-c)$: $=\dfrac{a^2+ab-c(b+c)}{a-c}$

Desarrollando el producto y agrupando, factorizamos lo que queda del numerador : $= \dfrac{a^2 - c^2 + b\,(a - c)}{a - c}$

Y dividiendo por $(a - c)$, nos queda : $= \mathbf{a + b + c}$ **RPTA. C**

10.- Reducir a su forma más simple : $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}}$

A) 3x *B) 6x* *C)* $\dfrac{2x}{3}$ *D) x* *E) 1*

Resolución.-

Efectuando operaciones desde la parte inferior : $E = 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}} = 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{x-1}}$

Reduciendo aún más : $E = 1 - \dfrac{1}{\dfrac{x - 1 - x}{x - 1}} = 1 - \dfrac{x - 1}{-1}$

Finalmente nos queda : $E = 1 + x - 1 =$ $\mathbf{x}$ **RPTA. D**

11.- Operar y simplificar : $\left(\dfrac{2x}{y} - \dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{x+y}{x-y}\right) \cdot \dfrac{\left(x^2 - y^2\right) y}{x}$

A) $\dfrac{x+y}{xy}$ *B) xy* *C) x + y* *D)* $2\left(x^2 + y^2\right)$ *E) 2 xy*

Resolución.-

Efectuando operaciones dentro del paréntesis : $\dfrac{2x(x+y)\,(x-y) - y(x-y)^2 + y(x+y)^2}{y(x+y)\,(x-y)}$

Desarrollando los cuadrados de los binomios y reduciendo nos queda : $\dfrac{2x(x^2 - y^2) + 4xy^2}{y\,(x^2 - y^2)}$

Reemplazando en la expresión original, tendriamos : $\dfrac{2x(x^2 - y^2) + 4xy^2}{y\,(x^2 - y^2)} \cdot \dfrac{(x^2 - y^2)\,y}{x}$

Simplificadno la expresión queda así : $2\,(x^2 - y^2) + 4\,y^2$

Finalmente efectuamos y factorizamos : $\mathbf{2\,(x^2 + y^2)}$ **RPTA. D**

7.5) FRACCIONES PARCIALES

Algunas veces es necesario expresar una sola expresión racional como la suma de dos o más cocientes más simples denominados fracciones parciales.

Se supondrá que $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción propia. Si no fuera así, se divide el numerador entre el denominador hasta obtener una fracción propia. Por ejemplo :

$$\frac{x^4-10x^2+3x+1}{x^2-4} = x^2-6+\frac{3x-23}{x^2-4}$$

En general se tratará de un método para descomponer una fracción propia $P(x)/Q(x)$ en dos o más fracciones parciales. Los denominadores de las fracciones parciales se obtienen mediante factorización de $Q(x)$ en un producto de factores lineales y cuadráticos. Después de esto, el método depende de la naturaleza de los factores, considerándose diversos casos por separado.

Caso 1.- Los factores del denominador $Q(x)$ son todos lineales y ninguno se repite.

$$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{B_2}{a_2x+b_2}$$

Ejemplo : $$\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$$

La última igualdad es una identidad para todos los valores admisibles de x, donde A y B son valores numéricos que debemos encontrar luego de dar común denominador, se tiene :

$$7x-1 \equiv A(x-3)+B(x+2) \quad \ldots (1)$$

Haciendo $x=3$ en (1) : $20 = 5B \Rightarrow B=4$

Haciendo $x=-2$ en (1) : $-15=-5A \Rightarrow A=3$

Entonces : $$\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}$$

Caso 2.- Los factores de $Q(x)$ son todos lineales y algunos se repiten.

$$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)^2(a_2x+b_2)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\frac{B_1}{a_2x+b_2}$$

Ejemplo : $$\frac{x^2+1}{(2x-5)^2(x+1)} = \frac{A}{2x-5}+\frac{B}{(2x-5)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Luego de dar común denominador, tendremos :

$$\Rightarrow x^2+1 \equiv A(x+1)(2x-5)+B(x+1)+C(2x-5)^2$$

Asignando valores apropiados a x :

$$x = -1 \Rightarrow 2 = C\,(-7)^2 \Rightarrow C = 2/49$$

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = B\left(\frac{5}{2}+1\right) \Rightarrow B = \frac{29}{14}$$

Luego se escoge $x = 0$ y se sustituye B y C.

$$1 = A\,(0+1)\,(0-5) + \frac{29}{14}\,(0+1) + \frac{2}{49}\,(-5)^2$$

Despejando : $A = \dfrac{41}{98}$

Finalmente : $$\frac{x^2+1}{(2x-5)^2\,(x+1)} = \frac{41/98}{2x-5} + \frac{29/14}{(2x-5)^2} + \frac{2/49}{x+1}$$

Caso 3.- Los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos y no se repite ninguno de los factores cuadráticos.

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)\,(a_1x+b_1)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{C}{a_1x+b_1}$$

Ejemplo : $$\frac{x^2-x-5}{(x-1)\,(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1}$$

Luego de dar común denominador, se tendrá :

$$\Rightarrow \quad x^2-x-5 \equiv (Ax+B)\,(x-1) + C\,(x^2+2x+2) \qquad \ldots(*)$$

Si : $x = 1 \Rightarrow -5 = 5C \Rightarrow C = -1$

Reemplazando en (*) y efectuando, se obtiene :

$$x^2-x-5 = Ax\,(x-1) + B\,(x-1) - x^2 - 2x - 2$$

Ordenando el segundo miembro para identificar coeficientes :

$$x^2-x-5 \equiv (A-1)\,x^2 + (B-A-2)\,x + (-B-2)$$

Por ser polinomios idénticos, se establecerá que :

$$A - 1 = 1 \Rightarrow A = 2$$

$$B - A - 2 = -1 \Rightarrow B = 3$$

Entonces : $$\frac{x^2-x-5}{(x-1)\,(x^2+2x+2)} = \frac{2x+3}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x-1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

12.- Si : $\dfrac{2x^2-3x+7}{x(x-3)(x-4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{x-4}$

Entonces el valor de $2(A+B+C)$, es :

A) 4 B) 2 C) 6 D) 8 E) N.A. UNFV 90

Resolución.-

Resulta evidente que el ejercicio está referido a una descomposición en fracciones parciales :

$$\frac{2x^2-3x+7}{x(x-3)(x-4)} = \frac{A(x-3)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-4)}$$

Igualando numeradores y dando valores apropiados :

$x=0 \Rightarrow 7=12A \Rightarrow A=7/12$

$x=3 \Rightarrow 16=-3B \Rightarrow B=-16/3$

$x=4 \Rightarrow 27=4C \Rightarrow C=27/4$

$$\therefore \quad 2(A+B+C) = 2\left(\frac{7}{12}-\frac{16}{3}+\frac{27}{4}\right) = \boxed{4}$$ **RPTA. A**

13.- Si : $\dfrac{1}{x^2-1} <> \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\theta}{x-1}$,

calcular : $\alpha \, . \, \theta$

A) 0,25 B) - 0,25 C) 0,5 D) - 0,5 E) 0,125

Resolución.-

Efectuando operaciones en el 2do mienbro del dato, tendremos :

$$\frac{1}{x^2-1} <> \frac{\alpha(x-1)+\theta(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

De esta equivalencia se debe cumplir que : $1 \equiv \alpha(x-1)+\theta(x+1)$ ...(*)

Hagamos : $x=1$, en (*) : $1=2\theta \Rightarrow \theta \equiv 1/2$

Si ahora hacemos : $x=-1$ en (*) se obtiene : $1=-2\alpha \Rightarrow \alpha=-1/2$

$$\therefore \quad \alpha \, . \, \theta = \boxed{-0{,}25}$$ **RPTA. B**

14.- Si : $\dfrac{3x^3+12x^2+15x-2}{x^3+5x^2+9x+5} = \dfrac{Ax-1}{x+1} + \dfrac{x+B}{x^2+4x+5}$; ***hallar A + B.***

A) 4 ***B) - 4*** ***C) 0*** ***D) 6*** ***E) - 6*** ***UNI 89***

Resolución.-

Reconociendo que la fracción es impropia ($N^o \geq D^o$) , dividiremos Numerador entre Denominador, obteniendose :

$$3 + \frac{-3x^2-12x-17}{x^3+5x^2+9x+5} = 3 + \frac{-3x^2-12x-13}{(x+1)(x^2+4x+5)} \quad ... (1)$$

Ahora aplicamos el método de descomposición en fracciones parciales a la parte fraccionaria de (1) :

$$\frac{-3x^2-12x-17}{(x+1)(x^2+4x+5)} = \frac{M}{x+1} + \frac{Nx+P}{x^2+4x+5} \quad ... (2)$$

Luego de dar común denominador al 2do miembro, igualamos los numeradores :

$$-3x^2-12x-17 \equiv M(x^2+4x+5) + (Nx+P)(x+1)$$

A continuación encontraremos los valores de M y P, para lo cual diremos que :

Si $x = -1 \Rightarrow -8 = 2M \Rightarrow M = -4$

Si $x = 0 \Rightarrow -17 = -4(5) + P \Rightarrow P = 3$

Si $x = 1 \Rightarrow -32 = -4(10) + (N+3) . 2 \Rightarrow N = 1$

Los valores hallados, los reemplazamos en (2) y la expresión obtenida en (1) :

$$3 - \frac{4}{x+1} + \frac{x+3}{x^2+4x+5} = \frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+3}{x^2+4x+5}$$

Comparando esta última fracción con las fracciones propuestas, concluímos que :

$$Ax - 1 = 3x - 1 \Rightarrow A = 3$$

$$x + B = x + 3 \Rightarrow B = 3$$

RPTA. D

MISCELANEA

15.- Si en la expresión $\dfrac{x+2}{x-2}$; cada x se reemplaza por $\dfrac{x+2}{x-2}$; el valor que resulta al sustituirse después x por $\dfrac{1}{3}$ es :

A) - 13/11 B) 17/3 C) -17/3 D) 3/17 E) - 3/17 UNMSM 88

Resolución.-

En $\dfrac{x+2}{x-2}$ sustituimos x por $\dfrac{x+2}{x-2}$ y se obtiene :

$$\frac{\dfrac{x+2}{x-2}+2}{\dfrac{x+2}{x-2}-2} = \frac{\dfrac{x+2+2(x-2)}{x-2}}{\dfrac{x+2-2(x-2)}{x-2}} = \frac{3x-2}{6-x}$$

Ahora hacemos $x = \dfrac{1}{3}$: $\quad \dfrac{3\left(\dfrac{1}{3}\right)-2}{6-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1-2}{\dfrac{17}{3}} = -\dfrac{3}{17}$ **RPTA. E**

16.- El equivalente de la expresión : $\dfrac{a^2\sqrt{2}b^2}{2b^2-a^2+\sqrt{2}\,(a^2-b^2)}$ ***; es :***

A) a($\sqrt{2}$ +b) B) $\sqrt{2}$ + 1 C) 1 D) b($\sqrt{2}$ + a) E) ab$\sqrt{2}$

Resolución.-

Llamando "T" a la expresión y efectuando en su denominador con la finalidad de agrupar convenientemente se tendrá :

$$T = \frac{a^2+\sqrt{2}b^2}{2b^2+\sqrt{2}a^2-a^2-\sqrt{2}b^2} = \frac{a^2+\sqrt{2}b^2}{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}b^2+a^2)-\underbrace{(a^2+\sqrt{2}b^2)}}$$

Factorizando lo indicado : $\quad T = \dfrac{a^2+\sqrt{2}b^2}{\left(\sqrt{2}b^2+a^2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}$

Simplificando y racionalizando : $\quad T = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}$

Finalmente el equivalente será : $\quad \mathbf{T = \sqrt{2}+1}$ **RPTA. B**

17.- Reducir : $\dfrac{a^{-2}.(a-1).a^{a+1}}{1-a^{-1}}$

A) a^2 *B)* a^{-1} *C)* a^a *D)* a^3 *E) N.A.* **PUCP 96-I**

<u>Resolución</u>.-

Aplicando los teoremas y definiciones de exponentes, tendremos :

Ordenando factores en el numerador : $\dfrac{(a-1).a^{-2}a^{a+1}}{1-a^{-1}}$

Efectuando el producto de bases iguales : $\dfrac{(a-1).a^{a-1}}{1-\dfrac{1}{a}}$

Luego de efectuar operaciones en el denominador : $\dfrac{(a-1).a^{a}.a^{-1}}{(a-1).a^{-1}}$

Simplificando, nos queda : a^a **RPTA. C**

18.- La expresión : $\dfrac{2x^2-x}{(x+1)(x-2)}-\dfrac{4+x}{(x+1)(x-2)}$

no se puede evaluar para $x=-1$ ó $x=2$ porque la división por cero no está definida para estos valores de x :

A) La expresión tiene valores diferentes .

B) La expresión tiene solo el valor 2.

C) La expresión tiene solamente el valor 1.

D) La expresión siempre tiene un valor entre -1 y 2.

E) La expresión tiene un valor mayor que 2 ó menor que - 1.

<u>Resolución</u>.-

Luego de reducir las fracciones homogéneas, se obtiene : $\dfrac{2x^2-x-4-x}{(x+1)(x-2)}$

Factorizando el numerador : $\dfrac{2(x-2)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=2$

Este valor se obtiene para : $x\neq-1$ y $x\neq2$ **RPTA. B**

19.- Un equivalente de la expresión : $\dfrac{x^2+1}{x}\cdot\dfrac{y^2+1}{y}+\dfrac{x^2-1}{y}\cdot\dfrac{y^2-1}{x}$; $xy\neq0$, ***es :***

A) 1 *B)* $2xy$ *C)* $2x^2y^2+2$ *D)* $2xy+\dfrac{2}{xy}$ *E)* $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}$

Resolución.-

Procediendo a realizar las divisiones indicadas, la expresión se transforma en :

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right) + \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)$$

A continuación efectuamos los productos indicados :

$$= xy + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{1}{xy} + xy - \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{1}{xy}$$

Y luego de reducir términos semejantes, tendremos :

$$= \boxed{2\,xy + \frac{2}{xy}}$$ **RPTA. D**

20.- Luego de efectuar y reducir; para $x \neq \pm 2$

$$\frac{x-1-12(x-2)^{-1}}{x+6+16(x-2)^{-1}} \quad ; \text{ se obtiene :}$$

A) $\frac{x-3}{x+4}$ *B)* $\frac{x-5}{x+2}$ *C)* $\frac{x-1}{x+1}$ *D)* $\frac{x-4}{x+2}$ *E)* $\frac{x}{x+2}$

Resolución.-

Nuestras estrategia consistirá en efectuar operaciones tanto en el numerador como en el denominador.

Aplicando la definición de exponente negativo : $= \dfrac{x-1-\dfrac{12}{x-2}}{x+6+\dfrac{16}{x-2}}$

Efectuando operaciones : $= \dfrac{\dfrac{(x-1)(x-2)-12}{x-2}}{\dfrac{(x+6)(x-2)+16}{x-2}}$

Simplificando y efectuando el producto de medios y extremos : $= \dfrac{x^2-3x-10}{x^2+4x+4}$

Factoriando arriba y abajo, obtenemos : $= \dfrac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x+2)}$

Simplificando $(x + 2)$, nos queda : $= \boxed{\dfrac{x-5}{x+2}}$ **RPTA. B**

21.- La expresión : $\dfrac{\dfrac{a}{a+y}+\dfrac{y}{a-y}}{\dfrac{y}{a+y}-\dfrac{a}{a-y}}$ **; cuando a es real y diferente de cero, tienen el valor -1, para :**

A) Todos los valores reales de y, excepto 2 de ellos.

B) Solo dos valores reales de y

C) Todos los valores reales de y

D) Solo un valor real de y

E) Ningún valor real de y

Resolución.-

Excluyendo $y = a$; $y = -a$ podemos simplificar la fracción : $= \dfrac{\dfrac{a(a-y)\ +\ y(a+y)}{\cancel{(a+y)(a-y)}}}{\dfrac{y(a-y)\ -\ a(a+y)}{\cancel{(a+y)(a-y)}}}$

Luego de simplificar y efectuar los productos indicados : $= \dfrac{a^2+y^2}{-(a^2+y^2)} = -1$ **RPTA. A**

22.- Simplificar : $\dfrac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)\ -\ (x^2+7x+11)^2}{(x+2)(x+4)(x+5)(x+7)\ -\ (x^2+9x+17)^2}$

A) $\frac{1}{9}$ *B)* $\frac{-1}{3}$ *C)* $\frac{2}{5}$ *D)* $\frac{4}{3}$ *E) 0*

Resolución.-

Efectuando factorizaciones en el numerador (N) y denominador (D) por separado, tendremos :

1ro) $N = \overbrace{(x+2)(x+5)}\ .\ \overbrace{(x+3)(x+4)} - (x^2+7x+11)^2$

$= (x^2+7x+10)\ (x^2+7x+12) - (x^2+7x+11)^2$

$= \left[(x^2+7x+11)-1\right]\left[(x^2+7x+11)+1\right] - (x^2+7x+11)^2$

$\Rightarrow\ N = (x^2+7x+11)^2 - 1^2 - (x^2+7x+11)^2 = -1$

2do) $D = \underbrace{(x+2)(x+7)}\ .\ \underbrace{(x+4)(x+5)} - (x^2+9x+17)^2$

$= (x^2+9x+14)\ .\ (x^2+9x+20)\ -\ (x^2+9x+17)^2$

$= \left[(x^2+9x+17)-3\right]\ \left[(x^2+9x+17)+3\right] - (x^2+9x+17)^2$

$$= (x^2 + 9x + 17)^2 - 3^2 + (x^2 + 9x + 17) = -9$$

$$\therefore \quad \frac{N}{D} = \frac{-1}{-9} = \boxed{\frac{1}{9}}$$ **RPTA. A**

23.- Efectuar y simplificar : $\dfrac{x}{ax - 2a^2} - \dfrac{2}{x^2 + x - 2ax - 2a} \cdot \left(1 + \dfrac{3x + x^2}{3 + x}\right)$

A) $x + a$ ***B)*** $x - a$ ***C)*** $a + 1$ ***D)*** a ***E)*** $\dfrac{1}{a}$

Resolución.-

Factorizando el denominador de la segunda expresión :

$$\underline{x^2 + x} - \underline{2ax - 2a} = x\,\overline{(x+1)} - 2a\,\overline{(x+1)} = (x+1)(x-2a)$$

Además la expresión entre paréntesis es : $1 + \dfrac{x(3+x)}{3+x} = 1 + x$

Reemplazando en la expresión original tendremos : $\dfrac{x}{a(x-2a)} - \dfrac{2}{\cancel{(x+1)}(x-2a)} \cdot \cancel{(1+x)}$

Luego de simplificar obtenemos : $\dfrac{x}{a(x-2a)} - \dfrac{2}{x-2a}$

Efectuando ahora la última factorización nos queda : $\dfrac{1}{x-2a} \cdot \left(\dfrac{x}{a} - 2\right)$

Finalmente todo se reduce a : $\boxed{\dfrac{1}{a}}$ **RPTA. E**

24.- La expresión : $E = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{m}}}$ ***; equivale a :***

A) $\dfrac{m+2}{m+1}$ ***B)*** $\dfrac{m+1}{m+2}$ ***C)*** $\dfrac{3m+1}{m+2}$ ***D)*** $\dfrac{2m+1}{3m+2}$ ***E)*** $\dfrac{3m+2}{2m+1}$

Resolución.-

Efectuando operaciones desde la parte inferior :

$$E = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{m}{m+1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2m+1}{m+1}} = 1 + \frac{m+1}{2m+1}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{3m+2}{2m+1}}$$ **RPTA. E**

25.- Halle el valor de "α" de modo que la expresión : $x - \alpha + \dfrac{1}{x+1}$ sea equivalente a : $\dfrac{x^2}{x+1}$

A) 0 *B) 1* *C) - 1* *D) 1/2* *E) - 2*

Resolución.-

Por condición se plantea : $x - \alpha + \dfrac{1}{x+1} <> \dfrac{x^2}{x+1}$

$\dfrac{(x-\alpha)(x+1)+1}{x+1} <> \dfrac{x^2}{x+1}$, como son fracciones equivalentes se cumple :

$[(x - \alpha)(x + 1) + 1](x + 1) <> (x + 1)x^2$

En esta equivalencia hagamos : $x = 0$

$[(-\alpha)(1) + 1](1) = 0 \Rightarrow -\alpha + 1 = 0$

Finalmente : $\alpha = 1$ **RPTA. B**

26.- El producto de 2 polinomios es : $\left(x^6+1\right)^2 - 4x^6$ y el cociente del MCM entre el MCD de ambos es : $\left(x^2+1\right)^2 - 4x^2$. El MCD es :

A) $(x + 1)(x^3 - 1)$ *B) $(x - 1)(x^3 + 1)$* *C) $(x^2 + x + 1)(x + 1)$*

D) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ *E) $(x^2 + x + 1)(x^2 - 1)$*

Resolución.-

Es importante recordar que el producto del MCM y el MCD de dos polinomios es igual al producto de dichos polinomios.

Por dato : $[M.C.M.] \cdot [M.C.D.] \equiv (x^6+1)^2 - 4x^6$

Es decir : $[M.C.M.] \cdot [M.C.D.] \equiv (x^6+1)^2 - (2x^3)^2$

Por diferencia de cuadrados : $[M.C.M.]\ [M.C.D.] \equiv (x^6+2x^3+1)(x^6-2x^3+1)$ ... (α)

Por condición del problema, debe cumplirse que : $\dfrac{M.C.M.}{M.C.D.} \equiv (x^2+1)^2 - 4x^2$

Y transformando, tendremos : $\dfrac{M.C.M.}{M.C.D.} \equiv (x^2+1)^2 - (2x)^2$

Por diferencia de cuadrados : $\dfrac{M.C.M.}{M.C.D.} \equiv (x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$ ... (θ)

Finalmente dividiendo (α) por (θ) se tendría :

$$\underbrace{\frac{[\cancel{M.C.M.}].[M.C.D.]}{\cancel{M.C.M.}}}_{M.C.D.} \equiv \frac{(x^6+2x^3+1)\,(x^6-2x^3+1)}{(x^2+2x+1)\,(x^2-2x+1)}$$

Simplificando y factorizando, se obtiene : $[M.C.D.]^2 \equiv \dfrac{(x^3+1)^2\,(x^3-1)^2}{(x+1)^2\,(x-1)^2}$

Extrayendo signo radical de índice dos (2) se tendrá : $M.C.D. \equiv \dfrac{(x^3+1)\,(x^3-1)}{(x+1)\,(x-1)}$

Luego de simplificar se tendría : $\mathbf{M.C.D. \equiv (x^2-x+1)\,(x^2+x+1)}$ **RPTA. D**

27.- Si la fracción : $\dfrac{(m-2)x+(2m+3n-1)y+3n}{8x-4y+7}$

toma un valor constante para todos los valores reales de "x" $\wedge$ "y" , entonces este valor constante es :

A) - 1/9 ***B) - 1/8*** ***C) 1/8*** ***D) 1/9*** ***E) 8/9***

Resolución.-

Por dato la fracción es de valor constante, luego debe cumplirse que :

$$\text{Valor CTE.} = \underbrace{\overbrace{\frac{m-2}{8} = \frac{2m+3n-1}{-4}}^{(I)} = \frac{3n}{7}}_{(II)} \qquad \text{.........(*)}$$

De (I) : $(m-2) = -2\,(2m+3n-1)$ $\Rightarrow$ $5m+6n=4$ .... (α)

De (II) : $7\,(m-2) = 8\,(3n)$ $\Rightarrow$ $7m-24n=14$ .... (θ)

Resolviendo (α) y (θ), obtenemos : $m = 10/9$

Finalmente reemplazando en (*) : Valor CTE. $= \dfrac{\frac{10}{9}-2}{8}$

$\therefore$ Valor CTE. $=$ **- 1/9** **RPTA. A**

28.- Al reducir : $E = \dfrac{1}{c(c-a)\,(c-b)} + \dfrac{1}{a(a-b)\,(a-c)} + \dfrac{1}{b(b-c)\,(b-a)}$ ***; se obtiene :***

A) abc ***B)*** $\dfrac{1}{a}$ ***C)*** $\dfrac{1}{b}$ ***D) ab + bc + ac*** ***E)*** $\dfrac{1}{abc}$

Resolución.-

Escribiendo asi la expresión :

$$E = \frac{1}{c(a-c)(b-c)} + \frac{1}{a(a-b)(a-c)} - \frac{1}{b(b-c)(a-b)}$$

Efectuando se tendría :

$$E = \frac{ab(a-b) + bc(b-c) - ac(a-c)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$$

Agrupando en el numerador : $E = \dfrac{(a^2b - ab^2) + (ac^2 - bc^2) - (a^2c - b^2c)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$

Factorizando en cada agrupación : $E = \dfrac{ab(a-b) + c^2(a-b) - c(a+b)(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(a-c)}$

Extrayendo factor común y simplificando : $E = \dfrac{ab + c^2 - c(a+b)}{abc(b-c)(a-c)} = \dfrac{ab + c^2 - ac - bc}{abc(b-c)(a-c)}$

Agrupando : $E = \dfrac{(ab - ac) + (c^2 - bc)}{abc(b-c)(a-c)}$

Factorizando : $E = \dfrac{a(b-c) - c(b-c)}{abc(b-c)(a-c)} = \dfrac{(b-c)(a-c)}{abc(b-c)(a-c)}$

Simplificando se obtiene : $E = \dfrac{1}{abc}$ **RPTA. E**

29.- Si : $x \neq y$; $x \neq z$; $y \neq z$

Además : $\dfrac{yz - x^2}{y+z} = \dfrac{zx - y^2}{z+x}$ ***, entonces cada expresión también es igual a :***

A) $x - y + z$ ***B)*** $x - y - z$ ***C)*** $-x - y - z$ ***D)*** 0 ***E)*** $x + y + z$

Resolución.-

Escribiendo así : $\dfrac{yz - x^2}{y+z} = \dfrac{zx - y^2}{z+x} = k$ ...(α)

En nuestro problema se pide calcular "k".

En(α)aplicaremos la propiedad de serie de razones iguales : $\dfrac{(yz - x^2) - (zx - y^2)}{(y+z) - (z+x)} = k$

Sacando los paréntesis y efectuando : $\dfrac{yz - x^2 - zx + y^2}{y - x} = k$

Agrupando en el numerador : $\dfrac{(yz-zx)+(y^2-x^2)}{y-x} = k$

Factorizando en el numerador : $\dfrac{z(y-x)+(x+y)(y-x)}{y-x} = k$

Finalmente, luego de simplificar se tendrá : $\boxed{k = x+y+z}$ **RPTA. E**

30.- El equivalente de : $T = \left[a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ddots}}}\right] \div \left[b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ddots}}}\right]$ ***; es :***

A) ab ***B) a/b*** ***C) b/a*** ***D)*** $\dfrac{1}{ab}$ ***E) N.A.***

Resolución.-

Designemos con N y con D respectivamente a las expresiones entre corchetes. A continuación y haciendo una inspección de dichas expresiones, arribamos a las siguientes conclusiones :

Del 1er corchete: Observamos que en la fracción y debajo del uno (1), existe una expresión idéntica a D , lo cual nos permite establecer que :

$$N = a + \frac{1}{D} \quad \Rightarrow \quad N.D = aD + 1 \quad ...(1)$$

Del 2do corchete: Analogamente al paso anterior, reconocemos que aquí, debajo del uno (1), existe una expresión idéntica a N. Luego diremos que :

$$D = b + \frac{1}{N} \quad \Rightarrow \quad N.D = bN + 1 \quad ...(2)$$

Igualando (1) y (2) se tendrá : $aD + 1 = bN + 1 \quad \Rightarrow \quad aD = bN$

Luego : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{N}{D}$ $\quad \therefore \quad$ $\boxed{T = \dfrac{a}{b}}$ **RPTA. B**

31.- Si : 3 xyz = 4(x + y + z) = 24 ; proporcionar el equivalente de :

$$E = \frac{2}{x}\left[\frac{64-x^2}{yz-1}\right] + \frac{2}{y}\left[\frac{64-y^2}{zx-1}\right] + \frac{2}{z}\left[\frac{64-z^2}{xy-1}\right]$$

A) 48 ***B) 28*** ***C) 74*** ***D) 60*** ***E) 54***

Resolución.-

Por condición se sabe que : $xyz = 8 \;\wedge\; x+y+z = 6$

Ahora efectuando operaciones en los denominadores de E, tendremos : $E = \dfrac{2(64-x^2)}{xyz-x} + \dfrac{2(64-y^2)}{xyz-y} + \dfrac{2(64-z^2)}{xyz-z}$

Como : $xyz = 8$,. se tendría : $\quad E = \dfrac{2(8^2 - x^2)}{8 - x} + \dfrac{2(8^2 - y^2)}{8 - y} + \dfrac{2(8^2 - z^2)}{8 - z}$

Sabiendo que cada expresión entre paréntesis es una D.D.C, simplificamos y obtenemos :

$$E = 2\,(8 + x) + 2\,(8 + y) + 2\,(8 + z) \quad \Rightarrow \quad E = 2\,(24 + x + y + z)$$

Pero : $x + y + z = 6$, luego : $E = 2\,(24 + 6)$ $\quad \therefore \quad$ $\mathbf{E = 60}$ **RPTA. D**

32.- Si en el numerador y el denominador de la fracción reductible : $\dfrac{3x^3 - 2x^2 - (a+2)x - 6}{3x^3 - 5x^2 - (a-1)x + b}$;

admite un divisor común de la forma : $(x^2 + mx - 6)$. Indicar su equivalente irreductible.

A) $\dfrac{3x+1}{3x-2}$ ***B)*** $\dfrac{2x+3}{2x-1}$ ***C)*** $\dfrac{6x+2}{6x-1}$ ***D)*** $\dfrac{3x-2}{3x-1}$ ***E) N.A.***

Resolución.-

Como : $°[N] = °[D]$, siendo numerador y denominador polinomios con el mismo coeficiente principal. El divisor común de : "N" y "D" se encuentra contenido en : "N - D" luego :

$$N - D \equiv \left[3x^3 - 2x^2 - (a+2)x - 6\right] - \left[3x^3 - 5x^2 - (a-1)x + b\right]$$

$$N - D \equiv 3x^2 - 3x - (b + 6) \equiv 3\left(x^2 - x - \frac{b+6}{3}\right)$$

Por condición : $\quad x^2 - x - \dfrac{b+6}{3} \equiv x^2 + mx - 6$

Por tratarse de polinomios idénticos, debemos observar que : $m = -1 \ \wedge \ b = 12$

Como el divisor común de "N" $\wedge$ "D" es : $(\,x^2 - x - 6\,)$, se cumplirá que :

$$N \div \left(x^2 - x - 6\right) \ \rightarrow \ R(x) \equiv 0$$

$$D \div \left(x^2 - x - 6\right) \ \rightarrow \ R(x) \equiv 0$$

Ahora efectuemos ambas divisiones por el método de Homer :

$N \div \left(x^2 - x - 6\right)$, donde : $N \equiv 3x^3 - 2x^2 - (a + 2)\,x - 6$

1	3	-2	$-(a+2)$	-6
1		3	18	6
6			1	
	3	1	0	0

Luego : $N \equiv \left(x^2 - x - 6\right)\cdot(3x + 1)$

A continuación efectuaremos una 2[da] división :

$D \div \left(x^2 - x - 6\right)$ donde : $D \equiv 3x^3 - 5x^2 - (a-1)x + b$

Por Horner :

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & -5 & -(a-1) & b \\ \hline 1 & & 3 & 18 & -12 \\ 6 & & & -2 & \\ \hline & 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

Luego : $D \equiv \left(x^2 - x - 6\right)(3x-2)$

No olvidar que la fracción dada inicialmente es : $F = \dfrac{N}{D} = \dfrac{(x^2 - x - 6)(3x+1)}{(x^2 - x - 6)(3x-2)}$

Simplificando : $\boxed{F = \dfrac{3x+1}{3x-2}}$ **RPTA. A**

33.- El equivalente de : $E = \cfrac{p}{p+1-\cfrac{p}{p+1-\cfrac{p}{p+1-\cfrac{p}{\vdots}}}}$, ***es :***

"n" veces

A) $\dfrac{p(p^n+1)}{p^{n-1}+1}$ *B)* $\dfrac{p^{n+1}-1}{p^n+1}$ *C)* $\dfrac{p^n-1}{p^{n-1}-1}$ *D)* $\dfrac{p(p^n-1)}{p^{n+1}-1}$ *E) N.A.*

Resolución.-

Analizando cuidadosamente, tendremos :

* Si : $n = 1 \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{p}{p+1} = \dfrac{p\,(p^1-1)}{p^2-1}$

* Si : $n = 2 \quad \Rightarrow \quad E = \cfrac{p}{p+1-\cfrac{p}{p+1}} = \dfrac{p\,(p+1)}{p^2+p+1} = \dfrac{p\,(p+1)(p-1)}{(p^2+p+1)(p-1)} = \dfrac{p\,(p^2-1)}{p^3-1}$

* Si : $n = 3 \quad \Rightarrow \quad E = \cfrac{p}{p+1-\underbrace{\cfrac{p}{p+1-\cfrac{p}{p+1}}}_{\text{caso anterior}}} = \cfrac{p}{p+1-\cfrac{p^2+p}{p^2+p+1}}$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{p\,(p^2+p+1)}{p^3+p^2+p+1} = \frac{p\,(p^2+p+1)(p-1)}{(p^3+p^2+p+1)(p-1)} = \frac{p\,(p^3-1)}{p^4-1}$$

Por inducción se concluye que para los "n" términos la expresión equivalente es :

$$E = \frac{p\,(p^n - 1)}{p^{n+1} - 1}$$ **RPTA. D**

34.- El valor de : $T = \dfrac{ab+a+n}{b+1} + \dfrac{bc+b+n}{c+1} + \dfrac{ac+c+n}{a+1}$

cumpliéndose que : $\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1} = \dfrac{a+b+c}{n}$ *, es :*

A) n *B) 2n* *C) 3n* *D)* $\dfrac{n}{3}$ *E) 6n*

Resolución.-

Efectuando operaciones y factorizando los numeradores de todas las fracciones en T, tendremos :

$$T = \frac{a(b+1)+n}{b+1} + \frac{b(c+1)+n}{c+1} + \frac{c(a+1)+n}{a+1}$$

Descomponiendo las fracciones :

$$T = \frac{a(b+1)}{b+1} + \frac{n}{b+1} + \frac{b(c+1)}{c+1} + \frac{n}{c+1} + \frac{c(a+1)}{a+1} + \frac{n}{a+1}$$

Simplificando y agrupando : $T = a + b + c + n\,.\left(\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1}\right)$

Factorizando "n" : $T = n\left[\dfrac{a+b+c}{n} + \overbrace{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1}}\right]$

Pero por dato se sabe que : $\dfrac{a+b+c}{n} = \dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1}$

Reemplazando y agrupando en el corchete de la expresión "T", se tendría :

$$T = n\left[\frac{a+1}{a+1} + \frac{b+1}{b+1} + \frac{c+1}{c+1}\right] = n\,(1 + 1 + 1)$$

$\therefore$ $T = 3n$ **RPTA. C**

35.- Conociendo que : $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} + \dfrac{y^2+z^2}{y+z} + \dfrac{z^2+x^2}{z+x} = xyz$

Determinar el valor numérico de : $T = \dfrac{y}{xz\,(x+y)} + \dfrac{z}{xy\,(y+z)} + \dfrac{x}{yz\,(z+x)}$

A) 1 *B) 3* *C) 1/3* *D) 6* *E) 1/2*

Resolución.-

Multiplicando T por "$2xyz$" , la expresión queda así :

$$2xyz\ T = \frac{2y^2}{x+y} + \frac{2z^2}{y+z} + \frac{2x^2}{z+x} \qquad \dots (\alpha)$$

Por condición del problema se sabe que :

$$xyz = \frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x} \qquad \dots (\theta)$$

Restando miembro a miembros : $(\theta - \alpha)$

$$xyz - 2xyz\ T = \frac{x^2-y^2}{x+y} + \frac{y^2-z^2}{y+z} + \frac{z^2-x^2}{z+x}$$

$$\Rightarrow \quad xyz\,(1-2T) = (x-y) + (y-z) + (z-x)$$

Reduciendo el segundo miembro, obtendremos :

$$xyz\ (1-2T) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2T = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{T = 1/2}$$

RPTA. E

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- El MCD de : $10y^3z^6x^{19}$; $20y^7x^7z^{16}$ y $35x^{10}y^{64}z^9$ es :

A) $10y^3z^6x^7$ B) $5yz^6x^7$

C) $5y^3z^6x^7$ D) $x^6y^5z^4$

E) N. A.

2.- El M.C.M. de $a^2 - b^2$ y $a^3 + b^3$ es :

A) $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

B) $(a+b)(a-b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

C) $(a-b)\left(a^2-2ab+b^2\right)$

D) $(a+b)^2(a-b)^3$

E) N.A.

3.- Para sumar o restar fracciones algebraicas, primero deben expresarse en fracciones equivalentes con un : ....común y entonces se suman (o restan) los numeradores mientras se conserva el ....

A) numerador - denominador

B) denominador - numerador

C) denominador - denominador

D) factor - numerador

E) factor - factor

4.- Para efectuar : $\frac{1}{x} - \frac{2}{2x-1} + \frac{4}{4x^2-1}$

el denominador común es :

A) $4x^2 - 1$ B) $(2x-1)x$ C) $x(2x+1)$

D) $x\left(4x^2-1\right)$ E) N. A.

5.- Señalar la afirmación FALSA :

A) $\frac{x^3+3x-8}{x^5+2x^2+6}$ es una fracción propia

B) $\frac{3x^2+x+1}{x^2+2x-1}$ es una fracción inpropia

C) $\frac{x^4+3x+6}{x^2-3x+1}$ es una fracción impropia

D) $\frac{3x^4-2x^3+5}{2x^4+3x}$ es una fracción propia

E) N. A.

6.- Simplificar : $\frac{a^2(a-b)+ab(a-b)}{a^2\left(a^2-b^2\right)}$

A) a B) $\frac{1}{a}$ C) $a+1$ D) $\frac{1}{a-b}$ E) $\frac{1}{ab}$

7.- Simplificar : $\frac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}$

A) $\frac{3x+5}{x}$ B) $\frac{x-2}{3x-5}$ C) $\frac{3x+5}{x-2}$

D) $\frac{3x-5}{x+2}$ E) N.A.

8.- El equivalente de : $\frac{a^{-1}b^{-2}+a^{-2}b^{-1}}{b^{-2}-a^{-2}}$, es :

A) $\frac{1}{a+b}$ B) $\frac{1}{a-b}$ C) $a-b$

D) $a+b$ E) 1

9.- Una expresión equivalente a : $\frac{3x-6}{6-2x}$

A) $\frac{3x-6}{2x-6}$ B) $\frac{6-3x}{2x-6}$ C) $\frac{6-3x}{6-2x}$

D) $\frac{3x+6}{6+2x}$ E) $\frac{-3x+6}{6-2x}$

10.- Efectuar : $\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right) \div \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

A) $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-2x+3}$ B) $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-2x-3}$

C) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2x-3}$ D) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+2x+3}$ E) N.A.

NIVEL B

11.- La forma simplificada de :

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2-4} \quad \text{es :}$$

A) 1 B) -1 C) x^2-1 D) $\dfrac{x-1}{x+1}$ E) x

12.- ¿Cuál es la forma simplificada de :

$$\frac{\dfrac{m+n}{m-1}+n}{\dfrac{m+n}{m-1}-1}$$

A) $\dfrac{m+n}{m-1}$ B) 1 C) m D) -1 E) m^2-n^2

13.- Para qué valores de m, la expresión mostrada NO está definida en el conjunto de los números reales.

$$\frac{\dfrac{1}{m^2-m-2}}{m^2-4}$$

A) {-2 ; -1} B) {-1 ; 2 ; -2} C) {2 ; -2}

D) {-1 ; 2} E) {1 : -1 ; 2 ; -2}

14.- Escriba con exponente positivos la fracción:

$$\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$$

A) $\dfrac{b-a}{ab}$ B) $\dfrac{b+a}{ab}$ C) $\dfrac{ab}{b+a}$

D) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ E) $a-b$

15.- Simplificar : $\dfrac{2-\dfrac{1-2x}{x-2}}{\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}}$

A) $\dfrac{2x+1}{x+2}$ B) $\dfrac{4x-3}{x+2}$ C) $-\dfrac{5}{x+2}$

D) $\dfrac{(x-2)(4x-5)}{x+2}$ E) $\dfrac{4x-5}{x+2}$

16.- Hallar "a" si :

$$\frac{1}{(x+2)(x-5)} <> \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-5}$$

A) -3 B) -10 C) $-\dfrac{1}{7}$ D) $\dfrac{2}{7}$ E) 10

17.- Reducir a su mínima expresión :

$$\frac{2x^3+8x^2y+6xy^2}{x^2y+3xy^2+2y^3}$$

A) $\dfrac{x+3y}{x+4y}$ B) $\dfrac{x(x+3y)}{y^2(x+2y)}$

C) $\dfrac{2x(x+3y)}{y(x+2y)}$ D) $\dfrac{2x^2+3y}{xy+2y}$

E) $\dfrac{x^2+xy}{xy+1}$

18.- ¿Cuál es el M.C.D. de P(x) ; Q(x) y R(x) ?

$P(x)=6x^2\,(x+1)^3\,(x-1)^3$

$Q(x)=8x\,(x+1)^2\,(x+2)$

$R(x)=12x^2\,(x+1)^2\,(x+3)^2$

A) x^2+x+1 B) $(x-1)(x^2+1)$

C) $(x+1)(x^2-1)$ D) $x(x^2-1)$

E) $2x(x+1)^2$

19.- El grado del M.C.M. de los polinomios :

$P(x) = x^4 + x^2a^2 + a^4$

$Q(x) = x^4 - ax^3 - a^3x + a^4$, es :

A) 5 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

20.- Efectuar :

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{2}{2x-1} + \frac{4}{4x^2-1}\right] \cdot \frac{2x+1}{x}$$

A) $\frac{1}{x}$ B) 1 C) $\frac{x+1}{x}$ D) $\frac{1}{x^2}$ E) $x - 1$

21.- Si el M.C.D. de :

$48a^{n+1} \cdot b^{m-2} \cdot c^n$; $30a^{n-1}\, b^{m-2}$;

$72a^{m-1} \cdot b^{m-1} \cdot c^{n-2}$

Es $6ab^2$: el M.C.M. de dichas expresiones es :

A) $720\,a^3b^3c^2$ B) $720\,a^3b^3c^3$

C) $720\,a^3b^2c^2$ D) $360\,a^3b^3c^2$

E) $360\,a^3b^3c^3$

22.- El producto de dos polinomios es $x^4 - 18x^2 + 81$ y el cociente de su M.C.M y su M.C.D. es $x^2 - 6x + 9$. Determinar el M.C.D. de dichos polinomios.

A) $x^2 - 9$ B) $x + 1$ C) $x - 1$

D) $(x+1)\ (x+3)$ E) $x + 3$

23.- Luego de reducir :

$$\frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{\frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}}}$$; el denominador es :

A) $x^4 + 1$ B) $x^2 + 1$ C) x^4

D) x^2 E) $x - 1$

24.- Efectuar :

$$\frac{x}{x^2+5x+6} + \frac{5}{x^2+9x+14} - \frac{12}{x^2+10x+21}$$

A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{x+2}{x+3}$ C) $\frac{1}{x+2}$

D) $\frac{x+1}{x+2}$ E) $\frac{x-1}{x+2}$

25.- Si $b \neq d$; las fracciones $\frac{ax+b}{cx+d}$ y $\frac{b}{d}$ son desiguales si :

A) $a = c = 1$ y $x \neq 0$ B) $a = b = 0$

C) $a = c = 0$ D) $x = 0$

E) $ad = bc$

NIVEL C

26.- La fracción $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$ se obtuvo sumando las fracciones $\frac{A}{x+2}$ y $\frac{B}{2x-3}$. Los valores de A y B deben ser :

A) $5x$; -11 B) -11 ; $5x$ C) -1 ; 3

D) 3 ; -1 E) 5 ; 11

27.- La fracción $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$, con ciertas restricciones para los valores de a, b y c es :

A) irreducible

B) reducible a : -1

C) reducible a : Un trinomio

D) reducible a : $\frac{a-b+c}{a+b-c}$

E) reducible a : $\frac{a+b-c}{a-b+c}$

28.- La expresión simplificada de :

$$2-\cfrac{2}{1-\cfrac{2}{2-\cfrac{2}{x^2}}} \quad ; \text{ es :}$$

A) 1 B) $2x^2$ C) 0 D) $2x$ E) x^2

29.- Sabiendo que :

$$\frac{35x-29}{x^2-3x+2} <> \frac{N_1}{x-1} + \frac{N_2}{x\ 2} \quad ;$$

es una identidad, el valor numérico de $N_1\ N_2$ es :

A) - 246 B) - 210 C) - 29

D) 210 E) 246

30.- La expresión : $\dfrac{x^2-3x+6}{x^2-5x+6} \div \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}$

cuando se simplifica, es igual a :

A) $\dfrac{(x-1)(x-6)}{(x-3)(x-4)}$ B) $\dfrac{x+2}{x-3}$

C) $\dfrac{x+1}{x-1}$ D) 1 E) 2

31.- Calcular A + B si :

$$A = \left[\frac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+1}{x-1}}\right] \cdot \left[\frac{x^2+1}{2a^2-2b}\right] \div \frac{2x}{a^2-b}$$

$$B = \cfrac{x-1}{x+2-\cfrac{x^2+2}{x-\cfrac{x-2}{x+1}}}$$

A) $x-\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{x-1}{2}$ C) $x+\dfrac{1}{2}$

D) $x+1$ E) $x-1$

32.- Si $a+b+c=0$; donde $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$, hallar el valor de :

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)$$

A) - 1 B) 3 C) 9 D) 8 E) 0

33.- Sabiendo que : $ax+by+cz=0$, simplificar la expresión :

$$\frac{bc(y-z)^2+ac(x-z)^2+ab(x-y)^2}{ax^2+by^2+cz^2}$$

A) abc B) $a+b+c$ C) $x+y+z$

D) xyz E) 1

34.- Para que se verifique la equivalencia :

$$\frac{3x^3+12x^2+15x-2}{x^3+5x^2+9x} <> \frac{Ax-1}{x+1} + \frac{x+B}{x^2+4x+5}$$

los valores de A y B , deben ser tales que A + B sea igual a :

A) 4 B) - 4 C) 0 D) 6 E) - 6

35.- Cuando x toma valores mayores que - 4 y menores que 1 , la expresión :

$$\frac{x^2-2x+2}{2x-2} \quad ; \text{ tiene :}$$

A) no tiene un valor máximo o mínimo

B) un valor mínimo igual a 1

C) un valor máximo igual a 1

D) un valor mínimo igual a -1

E) un valor máximo igual a -1

36.- Si :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} <> \frac{5x^2-3}{(x^2-1)(x+2)}$$

Calcular : "$a+b+c$"

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

37.- Si : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Reducir : $\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d}$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) -2

38.- Halle el grado del M.C.M. de los siguientes polinomios :

$P(x) \equiv 1 + x + ... + x^5$

$Q(x) \equiv 1 + x + ... + x^7$

$R(x) \equiv 1 + x + ... + x^{11}$

A) 26 B) 18 C) 25 D) 15 E) 13

39.- Luego de simplificar :

$$\frac{(x^8-1)(x^3-7x+6)}{(x^2-4x+4)(x^3+x^2-5x+3)}$$

Indicar el denominador resultante.

A) $x - 2$ B) $x + 2$ C) $x - 1$

D) $x - 3$ E) $x^2 + 1$

40.- ¿Cuál debe ser el valor de "n" para que la fracción :

$$\frac{x^3 - nx^2 + 19x - n - 4}{x^3 - (n+1)x^2 + 23x - n - 7}$$

admita simplificación?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 15 E) 8

41.- Dados :

$A \equiv a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2 b^2 c^2$

$B \equiv a^2 (a^2 + b^2) + (ab + c^2)(ab - c^2) + b^4$

$C = a^4 (b^2 + c^2) + b^4 (a^2 + c^2) + c^4 (a^2 + b^2)$

$+ 3 a^2 b^2 c^2$

Dar el equivalente de :

$$[MCD. (B;C)]^2 - \frac{A+2C}{MCD\ (A;B)}$$

A) $\frac{C}{MCD\ (A;C)}$ D) $\frac{C}{MCM\ (A;C)}$

B) $\frac{A}{MCD\ (A;B)}$ E) $\frac{B}{MCM\ (B;C)}$

C) $\frac{A}{MCM\ (A;B)}$

42.- Reducir :

$$\frac{1}{(a+b)^3}\left[\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right] + \frac{3}{(a+b)^4}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right] + \frac{6}{(a+b)^4 ab}$$

A) $\frac{1}{(a+b)^3}$ B) $\frac{1}{(a+b)ab}$ C) 1

D) $\frac{1}{a^3b^3}$ E) $\frac{1}{(a+b)^3a^2b^2}$

43.- La suma de todos los valores de "n" que hacen que la fracción $\frac{x^5+2x-1}{x^n + x^{n-3}}$ no sea propia es :

A) 7 B) 12 C) 5 D) 16 E) N.A.

44.- Si :

$A \equiv x^5 - x^2$

$B \equiv x^4 + x^3 - x - 1$

$C \equiv x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

La simplificación de: $\frac{MCM\ (A;C)}{MCD\ (B;C)}$, posee :

A) 6 divisores D) 12 divisores

B) 5 divisores E) 18 divisores

C) 3 divisores

8 Radicación y Racionalización

8.1) DEFINICIÓN

La raíz enésima de una expresión algebraica P(x) se denota por : $\sqrt[n]{P(x)}$ y se define así :

$$\sqrt[n]{P(x)} = Q(x) \quad \textbf{si y solo si} \quad Q^n(x) = P(x)$$

Esto será así cuando la raíz sea exacta ; en caso contrario la raíz Q(x) es inexacta y se cumplirá que :

$$P(x) = Q^n(x) + R(x) \quad ; \quad R(x) = \text{residuo.}$$

Observaciones.-

1) El término n es el índice de la raíz.

2) Si P(x) es de grado m, el grado de la raíz es : m/n

3) El máximo grado del residuo es : $m - (k+1)$, donde : $k = \dfrac{m}{n}$.

Ejemplo.- *Hallar la raíz cuadrada de :* $9x^4 - 30x^3 + 31x^2 - 10x + 1$, *sabiendo que es exacta.*

Solución.- El grado de la raíz debe ser 2, es decir, es un trinomio de la forma :

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad \text{tal que :} \quad Q^2(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow \quad (ax^2 + bx + c)^2 = 9x^4 - 30x^3 + 31x^2 - 10x + 1$$

$$\Rightarrow \quad (ax^2)^2 = 9x^4 \quad \Rightarrow \quad a = 3 \quad , \text{ y } , \quad c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad (3x^2 + bx - 1)^2 = 9x^4 - 30x^3 + 31x^2 - 10x + 1$$

Luego de desrrollar el primer miembro, se deduce que $b = -5$, entonces :

$$\sqrt{9x^4 - 30x^3 + 31x^2 - 10x + 1} = 3x^2 - 5x - 1$$

8.2) RADICALES

Llamaremos radical simple a la expresión $\sqrt[n]{a}$, cumpliéndose que :

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Rightarrow \quad b^n = a$$

Las cantidades a y b serán positivas siempre que n sea un número par.

Elementos :

índice signo radical

$$\sqrt[n]{a} = b$$

sub-radical raíz enésima

8.2A RADICALES SEMEJANTES

Estos tienen la misma expresión sub-radical y el mismo índice .

Ejms : $2\sqrt{5x}$; $3\sqrt{5x}$; $-5\sqrt{5x}$ son semejantes.

8.2B RADICALES HOMOGENEOS

Estos se caracterizan por tener el mismo índice .

Ejms : $\sqrt{5}$; $2\sqrt{b}$; $\sqrt{a}$ son homogéneos, de índice 2 .

$\sqrt[3]{4}$; $2\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[3]{a}$ son homogéneos, de índice 3

8.2C HOMOGENIZACION DE RADICALES

Es la operación que consiste en transformar radicales con diferente índice, en radicales con igual índice. Para tal fin se aplican los teoremas de exponentes y radicales los mismos que se vieron en el Cap. 1, asimismo se recomienda tener en cuenta las siguientes reglas :

1ro) Se halla el MCM de los índices de los radicales, que será el índice común.

2do) Se divide el MCM encontrado entre el índice original de cada radical y cada cociente se multiplica por el exponente también original de la cantidad subradical.

Ejms : Dados : $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{z^3}$, $\sqrt[5]{w^2}$; expresarlos como homogéneos :

En primer lugar se debe reconocer que el MCM de 3 ; 4 y 5 es 60 . Luego trataremos que todos los índices de radical tengan el mismo valor 60 :

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[60]{x^{20}} \qquad (60 \div 3 = 20)$$

$$\sqrt[4]{z^3} = \sqrt[60]{z^{45}}$$

$$\sqrt[5]{w^2} = \sqrt[60]{w^{24}}$$

8.2D SIMPLIFICACION DE RADICALES

Simplificar un radical es transformarlo en otro equivalente utilizando los teoremas ya mencionados :

Ejm : $\sqrt[3]{16a^7} = \sqrt[3]{2^3.2.a^6.a}$

$$= \sqrt[3]{2^3.a^6} \,.\, \sqrt[3]{2a}$$

$$= 2a^2\sqrt[3]{2a}$$

8.2E INTRODUCCION DE EXPRESIONES BAJO EL SIGNO RADICAL

Se eleva la expresión que esta afuera del radical, a una potencia igual al índice del radical.

Ejm : $2x\sqrt{yz} = \sqrt{(2x)^2yz} = \sqrt{4x^2yz}$

$$x^2\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} = \sqrt[3]{(x^2)^3.\frac{y}{x^2}} = \sqrt[3]{x^4y}$$

8.2F REDUCCION DE RADICALES SEMEJANTES

Los radicales semejantes, se reducen como si fueran términos semejantes.

Ejms :

1) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = (5-2+7)\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

2) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (3+4-5)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

8.2G MULTIPLICACION Y DIVISION DE RADICALES

Para efectuar estas operaciones los radicales deben ser homogéneos o en caso contrario, reducirlos a homogéneos.

$$\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \quad ;$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- ¿Cuál de las raíces es menor : $\sqrt{5}$ ó $\sqrt[3]{11}$ ó $\sqrt[4]{36}$

A) $\sqrt{5}$ *B)* $\sqrt[4]{36}$ *C)* $\sqrt[3]{11}$ *D) son iguales* *E) N.A.*

UNFV 1991

Resolución.-

La forma menos laboriosa de comparar raices no es precisamente efectuando la radicación misma, si no más bien, comparando los radicales luego de haber sido homogenizados. Para ello utilizaremos las recomendaciones del item 8.2C, indicándose además que es preferible reducir hasta donde sea posible los índices de radical con los exponentes de la cantidad sub-radical. Veamos :

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt{6}$$

Seguidamente reconocemos que los índices de : $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{11}$ y $\sqrt{6}$, tienen como M.C.M. a 6. Luego de efectuar las transformaciones correspondientes, tendremos :

$$\sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{121}$$

$$\sqrt[2]{6} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216}$$

Ahora fijandonos solo en las cantidades sub-radicales concluímos que :

$$\sqrt[6]{121} < \sqrt[6]{125} < \sqrt[6]{216} .$$

$\therefore$ La raíz menor es : $\sqrt[6]{121} = \sqrt[3]{11}$ **RPTA. C**

2.- Simplificar : $\dfrac{3\sqrt{27} + 6\sqrt{12}}{\sqrt{108}}$

A) $7\sqrt{3}$ *B)* $\frac{7}{2}$ *C)* $2 + 9\sqrt{3}$ *D)* $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ *E) N.A.*

PUCP 96-II

Resolución.-

Expresando cada radical en su forma más reducida , obtendremos :

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 . 3} = 3\sqrt{3} \;;\; \sqrt{12} = \sqrt{4 . 3} = 2\sqrt{3} \;;\; \sqrt{108} = \sqrt{36 . 3} = 6\sqrt{3}$$

Reemplazando ahora en la expresión original, se tendrá :

$$\frac{3\,.\,3\sqrt{3}+6\,.\,2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{(9+12)\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$ **RPTA. B**

3.- Para que se cumpla la igualdad :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{x}$$

El valor de x debe ser :

A) 3 *B) 6* *C) $\sqrt{6}$* *D) 5* *E) 4*

Resolución.-

Multiplicando en aspa, podemos igualar productos :

$$\sqrt{2}\,.\,x=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{6}+\sqrt{15}\right)$$

Si ahora efectuamos el desarrollo de la multiplicación de trinomios , tendremos :

$$\sqrt{2}\,.\,x=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{30}+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}+3\sqrt{5}-3\sqrt{5}-\sqrt{30}-5\sqrt{3}$$

Luego de reducir y simplificar términos semejantes, obtenemos :

$$\sqrt{2}\,x=6\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad x=6$$ **RPTA. B**

4.- La cuarta potencia de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ es :

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *B) $\frac{1}{2}\left(7+3\sqrt{5}\right)$* *C) $1+2\sqrt{3}$*

D) $3+2\sqrt{2}$ *E) 3*

Resolución.-

Primero trataremos de reducir hasta donde sea posible a la expresión dada, a continuación, lo obtenido lo elevaremos a la *segunda potencia* y luego el resultado, de nuevo a la *segunda potencia*, obteniéndose así la cuarta potencia.

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+1}}=\sqrt{1+\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad x^2=1+\sqrt{2}$$

$$\left(x^2\right)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$$

$$x^4=3+2\sqrt{2}$$ **RPTA. D**

5.- Obtener una expresión equivalente a :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

A) $2-\sqrt{3}$ *B)* $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ *C)* $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ *D)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *E)* 1

Resolución.-

En la expresión hay cuatro factores, que multiplicaremos en un orden determinado. El producto de los factores *tercero* y *cuarto* origina una diferencia de cuadrados :

$$A=\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}=\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Ahora, el resultado obtenido (A) se multiplica por el *segundo* factor :

$$B=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Finalmente este resultado (B) se multiplica por el *primer* factor :

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\;\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=\sqrt{4-3}=\boxed{1}$$

RPTA. E

8.3) RACIONALIZACIÓN

Es la operación mediante la cual, se transforma una expresión cuyo denominador es *irracional*, en otra equivalente, pero con denominador *racional*. Para esto se multiplican ambos términos de la fracción por una expresión llamada *factor racionalizante*.

8.3A FACTOR RACIONALIZANTE (F.R.)

Es la expresión irracional, que multiplicada por el denominador irracional, lo convierte en una expresión racional.

8.3B DENOMINADORES MONOMIOS

Si el denominador es de la forma. $\sqrt[m]{b^n}$, el factor racionalizante es $\sqrt[m]{b^{m-n}}$. En estos casos el factor racionalizante es conocido también como el *conjugado del denominador*. Veamos el siguiente ejemplo :

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} \cdot \frac{\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^{m-n}}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{b}$$

8.4) RACIONALIZACION DE DENOMINADORES BINOMIOS

Cuando una fracción presenta un denominador binomio, el factor racionalizante es en general un polinomio cuya forma dependerá del binomio original.

8.4A DENOMINADOR BINOMIO DE LA FORMA : $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Denominador : $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\Rightarrow$ F.R. : $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Denominador : $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ $\Rightarrow$ F.R. : $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Basta multiplicar los dos términos por la cantidad conjugada del denominador.

Ejemplo.- $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$

Ejemplo.- $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{b-c}$

8.4B DENOMINADOR BINOMIO DE LA FORMA : $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$

Cuando los denominadores son *binomios* cuyas raíces resultan ser de *índice tres*, los factores racionalizantes se obtienen así :

Denominador: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \Rightarrow$ F.R. $= \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

Denominador: $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \Rightarrow$ F.R. $= \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

Ejemplo.- $$\frac{2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}\right)}{\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}\right)}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}\right)}{\sqrt[3]{4}^3+\sqrt[3]{5}^3} = \frac{2\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}\right)}{9}$$

8.4C DENOMINADOR BINOMIO DE LA FORMA : $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

En general, para denominadores cuyos radicales son de orden mayor que 3, se utilizarán criterios de cocientes notables.

Denominador : $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} \Rightarrow$ **F.R.** $= \sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{x^{n-2}\,.\,y} + \ldots\ldots + \sqrt[n]{y^{n-1}}$; $\forall$ n impar

Denominador : $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} \Rightarrow$ **F.R.** $= \sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{x^{n-2}\,.\,y} + \ldots\ldots - \sqrt[n]{y^{n-1}}$; $\forall$ n par

Denominador : $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \Rightarrow$ **F.R.** $= \sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}\,.\,y} + \ldots\ldots + \sqrt[n]{y^{n-1}}$; $\forall$ n

Ejemplo.- $$\frac{1}{\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}}{a-b}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

6.- Racionalizar : $\dfrac{3}{\sqrt[9]{x^5y^2}}$

A) $\dfrac{3\sqrt[9]{xy^2}}{xy}$ B) $\dfrac{6\sqrt{x^3y^2}}{xy}$ C) $\dfrac{3\sqrt[9]{x^4y^7}}{xy}$ D) $\dfrac{6\sqrt[3]{x^4y}}{xy}$ E) $\dfrac{3\sqrt[3]{xy}}{xy}$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 8.3B, reconocemos que por tratarse de un monomio, el factor racionalizante de $\sqrt[9]{x^5y^2}$ es :

$$\text{F.R.} = \sqrt[9]{x^{9-5}\,y^{9-2}} = \sqrt[9]{x^4y^7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt[9]{x^5y^2}}\cdot\frac{\sqrt[9]{x^4y^7}}{\sqrt[9]{x^4y^7}} = \frac{3\sqrt[9]{x^4y^7}}{\sqrt[9]{x^9y^9}} = \boxed{\frac{3\sqrt[9]{x^4y^7}}{xy}}$$

RPTA. C

7.- El valor racionalizado de $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$ **es :**

A) $2-\sqrt{2}$ B) $4+2\sqrt{2}$ C) $2+\sqrt{2}$ D) $4-2\sqrt{2}$ E) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ *UNALM 89*

Resolución.-

Reconociendo que se trata de un denominador binomio, nuestra racionalización consistirá en multiplicar los dos términos de la fracción dada por el conjugado del denominador. Veamos :

$$\frac{2}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2} = \boxed{2+\sqrt{2}}$$

RPTA. C

8.- Racionalizar : $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

A) $\dfrac{\sqrt{17}-\sqrt{5}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{5}$ E) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}$ *UNI 89*

Resolución.-

Dado que los denominadores son trinomios, se agrupan con el fin de aplicar el método de racionalización para denominadores binomios. Observa :

Agrupando arriba y abajo, multiplicamos por la conjugada del denominador:

$$= \frac{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}+(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{5}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

Efectuando los productos indicados, reconocemos una DDC en el denominador:

$$= \frac{\sqrt{5}^2-\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-1}{\sqrt{5}^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$$

Realizando las simplificaciones correspondientes, nos queda: $= \dfrac{4-2\sqrt{10}}{-2\sqrt{6}}$

Luego de reducir, racionalizamos por última vez: $= \dfrac{-2+\sqrt{10}}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{15}-2\sqrt{6}}{2\,.\,3}$

Finalmente, todo se ha redicido a: $= \boxed{\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}}$ **RPTA. E**

9.- La siguiente expresión: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 4\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

A) Es un número entre 3 y 4 ***B) Es un número entre 4 y 5*** ***C) Es igual a 5***

D) Es un número entre 2 y 3 ***E) Es igual a 4*** ***PUCP 93-II***

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en reducir cada término de la expresión a su forma más simple de modo que sea fácil reconocer su valor o una aproximación de él. Esto lo lograremos racionalizando ambos términos, tal como a continuación se detalla:

1ro) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+2\sqrt{6}$

2do) $4\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$

La expresión equivale a: $5+2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \boxed{5}$ **RPTA. C**

10.- Expresar con denominador racional la expresión mostrada: $\dfrac{\sqrt[6]{27}}{3-\sqrt[6]{9}}$

A) $\left(3^{2/9}+3^{5/6}+3^{1/6}\right)/8$ ***B)*** $\left(3^{2/9}+3^{1/9}+3^{1/6}\right)/8$ ***C)*** $\left(3^{3/2}+3^{2/3}+3^{1/6}\right)/8$

D) $\left(3^{3/2}+3^{5/6}+3^{1/6}\right)/8$ ***E)*** $\left(3^{4/3}+3^{5/6}+3^{1/6}\right)/8$ ***UNI 88***

Resolución.-

Simplificando radicales, se obtiene : $\dfrac{\sqrt[6]{3^3}}{3-\sqrt[6]{3^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt[3]{3}}$

Dado que el denominador es de una forma equivalente a $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$,expuesta en el item 8.3C, reconocemos que su factor racionalizante es : $a^2 + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$. Luego :

Multiplicamos por el F.R. : $= \dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt[3]{3}} \cdot \dfrac{3^2+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}}{3^2+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}}$

Transformamos algunos radicales : $= \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3^2 + 3^{1+\frac{1}{3}} + 3^{2/3}\right)}{3^3 - \sqrt[3]{3^3}}$

Efectuamos el producto indicado : $= \dfrac{3^{2+\frac{1}{2}} + 3^{1+\frac{5}{6}} + 3^{1+\frac{1}{6}}}{24} = \dfrac{3^{1+\frac{1}{2}} + 3^{\frac{5}{6}} + 3^{\frac{1}{6}}}{8}$

Simplificando nos queda : $= \left(3^{3/2} + 3^{5/6} + 3^{1/6}\right)/8$ **RPTA. D**

11.- Racionalizar : $\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}}$

A) $\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ *B)* $\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ *C)* $\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

D) $\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ ***E) Ninguna anterior***

Resolución.-

Identificando al F.R. del denominador, tendremos : $E = \dfrac{3}{\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)} \cdot \dfrac{\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)}{\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)}$

Efectuando la D.D.C. en el denominador : $E = \dfrac{3\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$

Identificando un nuevo F.R., se tendrá : $E = \dfrac{3\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}$

Luego de efectuar y simplificar nos queda : $E = \left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ **RPTA. D**

8.5) TRANSFORMACION DE RADICALES DOBLES A RADICALES SIMPLES

8.5A RADICALES DE LA FORMA : $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Los radicales de la forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ donde A y B son números racionales positivos, se pueden transformar a la forma $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$. Asi toda la transformación consiste en hallar x e y en función de A y B, para lo cual se plantean las siguientes ecuaciones :

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad .... (1)$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad .... (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2) y elevando al cuadrado después, podemos encontrar que :

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad 2A + 2\sqrt{A^2 - B} = 4x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{A + \sqrt{A^2 - \sqrt{B}}}{2}}$$

Procediendo de una manera análoga, al restar (1) y (2) y elevar al cuadrado después, se obtiene :

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \quad 2A - 2\sqrt{A^2 - B} = 4y \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{A - \sqrt{A^2 - \sqrt{B}}}{2}}$$

Nota.- Cuando la cantidad subradical $A^2 - B$; es un cuadrado perfecto, dará una raíz exacta que llamaremos C, de forma que $\sqrt{A^2 - B} = C$, con lo cual las expresiones para x e y en (1) y (2) quedarían de esta manera :

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}}$$

Ejemplo.- Para : $\sqrt{5+\sqrt{24}}$, tenemos :

Reconociendo términos : $A = 5 \quad \wedge \quad B = 24$

Calculando C, tenemos : $C = \sqrt{5^2 - 24} \quad \Rightarrow \quad C = 1$

Finalmente se plantea : $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}}$

$$\therefore \quad \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

8.5B RADICALES DE LA FORMA : $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$

Cuando un radical doble es de la forma $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$, se pueden determinar dos núneros x e y que cumplan con las siguientes relaciones :

$$x + y = A \quad ; \quad x \,.\, y = B$$

Así, se verificará que : $\sqrt{(x+y) + 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

ó $\sqrt{(x+y) - 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

Ejemplo.- Para : $\sqrt{11-2\sqrt{30}}$, tenemos :

De acuerdo con el criterio expuesto se debe buscar dos números que multiplicados sean igual a 30 y sumados reproduzcan 11. Veamos :

$$\sqrt{11-2\sqrt{30}} = \sqrt{(6+5)-2\sqrt{6\cdot 5}}$$

$$6 \quad 5$$

Finalmente la expresión transformada queda así : $\sqrt{11-2\sqrt{30}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

8.5C RADICALES DE LA FORMA : $\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}$

Los radicales de la forma $\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}$, donde A, B, C y D son racionales positivos se puede transformar a la forma $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, para encontrar $x, y \wedge z$ en función de A, B, C $\wedge$ D, se plantea la siguiente igualdad :

$$\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Donde elevando al cuadrado y comparando términos se consigue :

$$x + y + z = A \quad \text{...........} \ (I)$$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{B} \quad \text{...........} \ (II)$$

$$2\sqrt{xz} = \sqrt{C} \quad \text{...........} \ (III)$$

$$2\sqrt{yz} = \sqrt{D} \quad \text{...........} \ (IV)$$

Un sistema de 4 ecuaciones con 3 incognitas, resolviendo el sistema conformado por las ecuaciones (II), (III) y (IV) se obtiene : $x, y \wedge z$, la ecuación (I) es la ecuación de comprobación de los valores obtenidos.

8.5D RADICALES DE LA FORMA : $\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}$

Esta transformación es similar al caso anterior solo que aqui uno de los radicales simples debe llevar signo negativo. Veamos :

$$\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado y compcomparando términos se consigue :

$$x + y + z = A \quad .... (I)$$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{B} \quad .... (II)$$

$$2\sqrt{xz} = \sqrt{C} \quad .... (III)$$

$$2\sqrt{yz} = \sqrt{D} \quad .... (IV)$$

Sistema que será resuelto igual que en el caso anterior.

Ejemplo.- Para : $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$, tenemos :

De acuerdo con el criterio expuesto debemos plantear :

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Luego el sistema será :

$$x + y + z = 10 \quad .... (I)$$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{24} \quad .... (II)$$

$$2\sqrt{xz} = \sqrt{40} \quad .... (III)$$

$$2\sqrt{yz} = \sqrt{60} \quad .... (IV)$$

De (II) se tiene : $\sqrt{xy} = \sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 3}$

De (III) se tiene : $\sqrt{xz} = \sqrt{10} = \sqrt{2\cdot 5}$

De (IV) se tiene : $\sqrt{yz} = \sqrt{15} = \sqrt{3\cdot 5}$

Si observamos atentamente cada ecuación obtenida se podrá establecer que :

$$x = 2 \quad ; \quad y = 3 \quad \wedge \quad z = 5$$

Comprobando los valores obtenidos para x ; y $\wedge$ z en la ecuación (I) se concluye que efectivamente :

$$x = 2 \quad ; \quad y = 3 \quad \wedge \quad z = 5$$

Finalmente la transformación queda establecida así :

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

12.- Descomponer $\sqrt{30+\sqrt{704}}$ ***en suma de radicales sencillos***

A) $\sqrt{22}+\sqrt{8}$ *B)* $\sqrt{14}+\sqrt{5}$ *C)* $\sqrt{8}+\sqrt{21}$ *D)* $\sqrt{10}+\sqrt{20}$ *E)* $\sqrt{11}+\sqrt{19}$

Resolución.-

Dado que se trata de un radical doble, resulta necesario reconocer a sus elementos :

$A = 30$ y $B = 704$. Ahora calculemos : $C = \sqrt{A^2-B} = \sqrt{900-704} = 14$

Puesto que el resultado es un número entero,aplicaremos las relaciones de transformación de radicales dobles a radicales simples, vistas en el item 8.4C :

Se sabe que : $\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} + \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

Reemplazando : $\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{30+14}{2}} + \sqrt{\dfrac{30-14}{2}}$

$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{22}+\sqrt{8}$ **RPTA. A**

13.- Hallar el valor de : $\sqrt{12+\sqrt{140}} - \sqrt{8+\sqrt{28}} + \sqrt{11-2\sqrt{30}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$

A) 1 *B) 0* *C) 2* *D)* $\sqrt{3}+2$ *E)* $1+\sqrt{2}$

Resolución.-

Haciendo una inspección de los valores de los radicales interiores, comprobamos que estos pueden expresarse en radicales dobles de la forma $\sqrt{A+2\sqrt{B}}$:

$$\sqrt{12+2\sqrt{35}} - \sqrt{8+2\sqrt{7}} + \sqrt{11-2\sqrt{30}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

Ahora es conveniente transformar las cantidades sub-radicales así :

$$\sqrt{(7+5)+2\sqrt{7.5}} - \sqrt{(7+1)+2\sqrt{7.1}} + \sqrt{(6+5)-2\sqrt{6.5}} - \sqrt{(6+1)-2\sqrt{6.1}}$$

Empleando en la resolución las relaciones expuestas en el item 8.5B, tendremos :

$$(\sqrt{7}+\sqrt{5}) - (\sqrt{7}+1) + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) - (\sqrt{6}-1)$$

Se observa que todos estos radicales se anulan, obteniéndose 0 (cero). **RPTA. B**

14.- Calcular la solución de la ecuación : $\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{x}}} = \dfrac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} + \dfrac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$

A) 30 *B) 5* *C) 20* *D) 13* *E) 10* ***UNI 96-II***

Resolución.-

Dado que los radicales son de la forma $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$, utilizaremos las relaciones vistas en el item 8.4C, de este modo se tendrá :

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)-2\sqrt{5.2}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{(6+2)+2\sqrt{6.2}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

Pues bien lo que haremos a continuación será reemplazar lo obtenido en la igualdad dada, y luego de racionalizar, trataremos de obtener en el 2do miembro una fracción similar a la existente en el 1er miembro. Veamos :

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{x}}} = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \underbrace{\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}_{3} + \underbrace{\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}_{4}$$

$$= \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2} = \sqrt{6}+\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{x}}} = \overbrace{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Entonces, comparando : $\sqrt{11-2\sqrt{x}} = \sqrt{6}-\sqrt{5}$;

Luego $x = 6.5 = \boxed{30}$ **RPTA. A**

15.- Al reducir : $\sqrt{7+4\sqrt{5+2\sqrt{9+2\sqrt{7-2\sqrt{6}}}}}$ ***; se obtiene una expresión de la forma :*** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ***, a > b , entonces a + b es igual a :***

A) 12 ***B) 14*** ***C) 9*** ***D) 11*** ***E) 15***

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en aplicar las mismas relaciones del item 8.4B, para lo cual se requiere que hasta aquí hayas desarrollado una rapidez adecuada para identificar a la pareja de valores que hace posible la transformación de radicales. Procediendo desde los radicales interiores hacia afuera, tendremos :

$$E = \sqrt{7+4\sqrt{5+2\sqrt{9+2\sqrt{7-2\sqrt{6}}}}}$$

$$E = \sqrt{7+4\sqrt{5+2\sqrt{9+2\left(\sqrt{6}-1\right)}}}$$

$$E = \sqrt{7+4\sqrt{5+2\sqrt{7+2\sqrt{6}}}}$$

$$E = \sqrt{7+4\sqrt{5+2(\sqrt{6}+1)}}$$

$$E = \sqrt{7+4\sqrt{7+2\sqrt{6}}}$$

$$E = \sqrt{7+4(\sqrt{6}+1)} = \sqrt{11+2\sqrt{24}} \quad ....(4\sqrt{6} = 2.2\sqrt{6} = 2.\sqrt{4}.\sqrt{6} = 2\sqrt{24})$$

$$E = \sqrt{8} + \sqrt{3} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Entonces $a = 8$; $b = 3$ y $\boldsymbol{a + b = 11}$ **RPTA. D**

16.- $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}}$; es equivalente a :

A) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ***B)*** $3 - \sqrt{2}$ ***C)*** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ***D)*** $2\sqrt{2} - 1$ ***E)*** $\sqrt{2} + 1$

Resolución.-

Observamos que : $E = \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{17 + 2\sqrt{72}}}$ ... (*)

Y de lo visto en el iltem 8.5B, reconocemos que : $17 = 9 + 8$; $72 = 9 . 8$.

Luego en (*), se tendrá : $E = \sqrt{\sqrt{9} + \sqrt{8}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ ... (**)

Asimismo se puede notar que : $3 = 2 + 1$; y ; $2 = 2 . 1$

Finalmente en (**), tendremos : $\mathbf{E = \sqrt{2} + 1}$ **RPTA. E**

17.- Expresar como un radical doble : $2\sqrt{x+2+\sqrt{8x}} - \sqrt{4x+3+\sqrt{48x}}$

A) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$ ***B)*** $\sqrt{11-4\sqrt{6}}$ ***C)*** $\sqrt{7-3\sqrt{2}}$ ***D)*** $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ***E)*** $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Resolución.-

El primer radical se transforma así :

$$\sqrt{x+2+\sqrt{8x}} = \sqrt{x+2+2\sqrt{2x}} = \sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{x} + \sqrt{2} \quad .....(*)$$

Analogamente el segundo radical se transformará en : :

$$\sqrt{4x+3+\sqrt{48x}} = \sqrt{(2\sqrt{x}+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{x} + \sqrt{3} \quad ....(**)$$

Reemplazando (*) y (**)en la expresión original, se tendrá :

$$2(\sqrt{x}+\sqrt{2}) - (2\sqrt{x}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Luego elevamos al cuadrado y extraemos raíz cuadrada :

$$\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{8-4\sqrt{6}+3} = \mathbf{\sqrt{11-4\sqrt{6}}}$$ **RPTA. B**

MISCELANEA

18.- Racionalizar : $\dfrac{12}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}$

A) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{45}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2}\right)}{3}$ B) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{9}\right)}{3}$ C) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}$

D) $\dfrac{12\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)}{7}$ E) Ninguna anterior.

Resolución.-

Dado que el denominador es un binomio con radicales de índice 3 , de acuerdo el item 8.3C, diremos que su factor racionalizante es : $\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{2^2}$

$$\frac{12}{\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{12\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)}{\sqrt[3]{7}^3+\sqrt[3]{2}^3}$$

Finalmente, luego de operar y simplificar se tendrá : $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}$ **RPTA. C**

19.- El factor racionalizante para hacer racional el denominador de : $\dfrac{a}{\sqrt[15]{x}+\sqrt[15]{y}}$ **; es :**

A) $\sqrt[15]{x^{14}}+\sqrt[15]{x^{13}y}+\sqrt[15]{x^{12}y^2}+\ldots\ldots+\sqrt[15]{y^{14}}$

B) $\sqrt[15]{x}-\sqrt[15]{y}$

C) $\sqrt[15]{x}-\sqrt[15]{xy}+\sqrt[15]{y}$

D) $\sqrt[15]{x^{14}}-\sqrt[15]{x^{13}y}+\sqrt[15]{x^{12}y^2}-\ldots\ldots+\sqrt[15]{y^{14}}$

E) $\sqrt[15]{x}+\sqrt[15]{y}$

Resolución.-

El F.R. se obtiene con un cociente notable, porque tenemos $\sqrt[15]{x}+\sqrt[15]{y}$ y queremos $x+y$, luego según las relaciones vistas en el item 8.5B, tendremos :

$$F.R. = \frac{x+y}{\sqrt[15]{x}+\sqrt[15]{y}} = \frac{a^{15}+b^{15}}{a+b} = a^{14} - a^{13}\,b + \ldots + b^{14}$$

$$= \sqrt[15]{x^{14}} - \sqrt[15]{x^{13}y} + \ldots\ldots + \sqrt[15]{y^{14}}$$ **RPTA. D**

20.- Dado que $\sqrt{5}$ = 2,23607, hallar el valor de : $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$

A) 4,46301 ***B) 0,69897*** ***C) 0,14772*** ***D) 1,11803*** ***E) 0,44721***

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en tratar de poner toda la expresión en términos de $\sqrt{5}$ puesto que según los datos solo conocemos el valor de este radical. Para ello multiplicaremos numerador y denominador por $\sqrt{2}$; de ese modo la expresión dada se convierte en :

$$\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{2+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2+3-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2,23607}{5} = 0,44721$$ **RPTA. E**

21.- Reducir : $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{x}+\sqrt{\sqrt{x}-1}} + \sqrt{\sqrt[4]{x}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{x}-1}}$

A) $\sqrt{2}$ ***B) 2*** ***C) 1*** ***D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$*** ***E) N.A.***

Resolución.-

Elevando al cuadrado toda la expresión y simplificando :

$$E^2 = \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{\sqrt{x}-1} + \sqrt[4]{x}-\sqrt{\sqrt{x}-1} + 2\sqrt{\sqrt{x}-(\sqrt{x}-1)}}{\sqrt[4]{x}+1}$$

$$E^2 = \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}+2\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}}{\sqrt[4]{x}+1}$$

$$E^2 = \frac{2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{1}}{\sqrt[4]{x} + 1} = \frac{2(\sqrt[4]{x} + 1)}{\sqrt[4]{x} + 1} = 2$$

Entonces la expresión original es : $\boxed{E = \sqrt{2}}$ **RPTA.**

22.- Racionalizar : $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2}}$

A) $\dfrac{\sqrt[4]{75} + \sqrt[4]{50}}{3}$ *B)* $\dfrac{\sqrt[4]{125} + \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{20} + \sqrt[4]{8}}{3}$ *C)* $\dfrac{\sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{20} + \sqrt[4]{2}}{6}$

D) $\dfrac{\sqrt[4]{125} - \sqrt[4]{20} + \sqrt[4]{8}}{6}$ *E) N.A.*

Resolucion.-

Por lo expuesto en el item 8.4C , sabemos que una expresión como $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$ tendrá un factor racionalizante igual a :

$$F.R. = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}$$

En este problema, se tiene que : $x = 5$, y , $y = 2$, luego el F.R. , tendremos :

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{125} + \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{20} + \sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{125} + \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{20} + \sqrt[4]{8}} = \frac{FR}{\sqrt[4]{5}^4 - \sqrt[4]{2}^4}$$

$$= \frac{FR}{5 - 2} = \frac{FR}{3} = \boxed{\frac{\sqrt[4]{125} + \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{20} + \sqrt[4]{8}}{3}}$$ **RPTA. B**

23.- Evaluar la expresión : $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$; *para* $a = (2+\sqrt{3})^{-1}$ *y* $b = (2-\sqrt{3})^{-1}$

A) $\dfrac{1}{2}$ *B)* 1 *C)* $\sqrt{2} + 1$ *D)* $\sqrt{3} + 1$ *E)* $\sqrt{3} - 1$

Resolución.-

La expresión dada es de la forma : $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1}$ ....(*)

Donde : $a = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$, y , $b = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

A continuación calcularemos cada elemento de (*) :

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{1}{b+1} = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = \quad 1$$

RPTA. B

24.- Hallar la forma racionalizada de : $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}}$

A) $\left(1-\sqrt[4]{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$ *B)* $\left(1-\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$ *C)* $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$

D) $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$ *E)* $-\left(1+\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$

Resolución.-

Efectuando una primera racionalización : $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}} = \dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}} \cdot \dfrac{1+\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt[4]{2}} = \dfrac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}$

Racionalizando ahora el binomio $\left(1-\sqrt{2}\right)$: $\dfrac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -\left(1+\sqrt[4]{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$ **RPTA. E**

25.- La suma $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ ***; es igual a :***

A) $\dfrac{3}{2}$ *B)* $\dfrac{\sqrt[3]{65}}{4}$ *C)* $\dfrac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$ *D)* $\sqrt[3]{2}$ *E) 1*

Resolución.-

Hagamos un cambo de variable : $a = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$; $b = \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$

Así nuestra incógnita es : $x = a + b$

Elevamos al exponente 3 : $x^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$

Reemplazando valores : $x^3 = 5 + 5 + 3\sqrt[3]{25-52}\ .\ x$

Se forma la ecuación : $x^3 + 9x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)\left(x^2+x+10\right) = 0$

Cuya única solución real es : $x = 1$ **RPTA. E**

26.- Hallar el resto que resulta de extraer la raíz cuadrada de : $x^4 - 5 + 6x^2 + 4x^3 - 12x$

A) - 13x + 12 *B) - 6x - 16* *C) 13x - 12*

D) - 16x - 6 *E) 5x*

Resolución.-

El proceso para encontrar la raíz cuadrada de una expresión algebraica es análogo al proceso de extraer la raíz cuadrada aritmética, de este modo se tendrán los siguientes pasos :

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 12x - 5} & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4} & (2x^2 + 2x)\,2x \\ \cline{2-2}
\quad 4x^3 + 6x^2 & (2x^2 + 4x + 1)\,1 \\
\quad \underline{-4x^3 - 4x^2} & \\
\qquad 2x^2 - 12x - 5 & \\
\qquad \underline{-2x^2 - 4x - 1} & \\
\qquad -16x - 6 &
\end{array}$$

El resto obtenido es : **$-16x - 6$**

RPTA. D

27.- Efectuar : $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}}\right]^{-1}$

A) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *B)* $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *C)* $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *D)* $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *E) N.A.*

Resolución.-

En primer lugar trataremos de reducir el denominador del corchete :

$$\sqrt{3}-\frac{1}{\dfrac{3-1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A continuación reemplazamos este resultado en la expresión original :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left[\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})} = \frac{1}{1-\sqrt{3}}$$

Finalmente racionalizamos : $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{-2} = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **RPTA. A**

28.- Hallar la raíz cúbica de : $72 - 32\sqrt{5}$

A) $5-\sqrt{3}$ *B)* $3-\sqrt{5}$ *C)* $2+\sqrt{5}$ *D)* $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ *E)* $\sqrt{5}-1$

Resolución.-

Es bastante conocido que extaer raíz cúbica de números racionales es muy tedioso, esto se vuelve aún más complicado si se trata de números irracionales como es elcaso que pretendemos resolver; por ello resolveremos nuestro problema recurriendo a todo lo aprendido sobre radicación hasta aqui. Veamos :

De acuerdo con los distractores, debemos encontrar una expresión así : $\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}} = x - \sqrt{y}$ ...... (*)

Esta igualdad se puede transformar en : $\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}} = x + \sqrt{y}$ ...... (**)

Ahora, multiplicando miembro a miembro : $\sqrt[3]{5184-1024(5)} = x^2 - y$

Efectuando operaciones,encontramos : $x^2 - y = 4$ ..... (1)

Por otro lado encontramos $(*)^3$: $72 - 32\sqrt{5} = x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3xy - y\sqrt{y}$

Igualando términos, obtenemos : $72 = x^3 + 3xy$ ..... (2)

De (1) y (2) : $72 = x^3 + 3x(x^2-4) \Rightarrow x^3 - 3x = 18 = 3^3 - 3 \cdot 3$

Es decir ; $x = 3$ y entonces $y = 5$ y la raíz cúbica es : $\mathbf{3 - \sqrt{5}}$ **RPTA. B**

29.- Efectuar : $\dfrac{4}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}} - \dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}} + \dfrac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$

A) 0 *B) 1* *C) $\sqrt{15}$* *D) $2\sqrt{3}$* *E) $\sqrt{6}$*

Resolución.-

Transformemos los radicales dobles a una pareja de radicales simples, para lo cual es necesario reconocer que estos son de la forma analizada en el item 8.5B, veamos :

$$\sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{11-2\sqrt{30}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

Reemplazando en la expresión original, racionalizaremos los nuevos denominadores :

$$= \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{2} - (\sqrt{6}+\sqrt{5}) + \sqrt{5} + \sqrt{2} = \mathbf{0}$$ **RPTA. A**

30.- Racionalizar : $\dfrac{4}{\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}$

A) 4 *B) 2* *C)* $\sqrt{2}+1$ *D) 1* *E)* $\sqrt{5}-1$

Resolución.-

El denominador es de la forma $x = a + b$, por tal razón trabajaremos con el denominador de la fracción y la elevaremos al cubo :

$$x^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\ .\ (a+b)$$

$$x^3 = 40 + 3\sqrt[3]{(20^2 - 14^2 . 2)}\ .\ (x)$$

Efectuando y reduciendo términos, tendremos : $x^3 = 40 + 3\ .\ 2.\ x$

Transponiendo términos y factorizando, nos queda : $(x-4)\left(x^2+4x+10\right)=0$

Resolviendo deducimos que : $x = 4$; así la expresión original es equivalente a : $\dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{4} = 1$ **RPTA. D**

31.- Después de racionalizar : $\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ***; el denominador de la fracción resultante es :***

A) 9 *B) 7* *C) 11* *D) 13* *E) 17*

Resolución.-

Agrupando convenientemente al denominador, reconocemos el F.R.adecuado :

$$\frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}}\cdot\frac{\mathbf{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}}{\mathbf{(2+\sqrt{3})+\sqrt{5}}} = \frac{(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{(2+\sqrt{3})^2-\sqrt{5}^2} = \frac{(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{2(2\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{2(2\sqrt{3}+1)}\cdot\frac{\mathbf{2\sqrt{3}-1}}{\mathbf{2\sqrt{3}-1}} = \frac{6+10\sqrt{3}+4\sqrt{5}+3\sqrt{15}}{11}$$

De donde reconocemos que el denominador es : **11** **RPTA. C**

32.- Al transformar : $\sqrt{3x-1+\sqrt{8x^2+4x-24}}$ ***, en dos radicales simples, uno de ellos es :***

A) $\sqrt{2x-1}$ *B)* $\sqrt{x+2}$ *C)* $\sqrt{2x+3}$ *D)* $\sqrt{x-1}$ *E)* $\sqrt{x+3}$

Resolución.-

Según condición del problema : $\sqrt{3x-1+2\sqrt{2x^2+x-6}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$

Por tratarse de radicales de la forma $\sqrt{A-2\sqrt{B}}$, deberá cumplirse que : $m + n = 3x - 1$

Factorizando el 2do miembro : $mn = 2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2)$

Se comprueba que éstos factores verifican : $m + n = (2x-3) + (x+2) = 3x - 1$

Luego, el resultado es : $\sqrt{3x-1+\sqrt{8x^2+4x-24}} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{x+2}$ **RPTA. B**

33.- Obtener una expresión equivalente a : $\sqrt{\dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{27}-\sqrt{125}}{\sqrt{12}+\sqrt{108}-\sqrt{180}} + \dfrac{10+3\sqrt{15}}{6}}$

A) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$ *B)* $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{3}}{6}$ *C)* $\dfrac{3\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{6}$ *D)* $\dfrac{\sqrt{15}-2}{3}$ *E)* $\dfrac{2\sqrt{10}-\sqrt{3}}{3}$

Resolución.-

Transformando la 1ra fracción dentro del radical, para luego racionalizarla, tendremos : $\dfrac{7\sqrt{3}-5\sqrt{5}}{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}} \cdot \dfrac{8\sqrt{3}+6\sqrt{5}}{8\sqrt{3}+6\sqrt{5}} = \dfrac{9+\sqrt{15}}{6}$

Reemplazando en la expresión original : $\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{15}}{6}+\dfrac{10+3\sqrt{15}}{6}} = \sqrt{\dfrac{19+4\sqrt{15}}{6}} = \dfrac{\sqrt{15}+2}{\sqrt{6}}$

Racionalizando, el último resultado equivale a : $\dfrac{\sqrt{90}+2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{3\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{6}$ **RPTA. C**

34.- Transformar a radicales simples : $\sqrt{14+2\sqrt{10}-2\sqrt{14}-2\sqrt{35}}$

A) $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ *B)* $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$ *C)* $\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$

D) $\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{7}$ *E)* $\sqrt{7}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 8.5D, se debe plantear :

$$\sqrt{14+2\sqrt{10}-2\sqrt{14}-2\sqrt{35}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Consiguiéndose luego el sistema : $x + y + z = 24$ .... (I)

$\sqrt{xy} = \sqrt{10}$ .... (II)

$\sqrt{xz} = \sqrt{14}$ .... (III)

$\sqrt{yz} = \sqrt{35}$ .... (IV)

El cual al resolverlo nos genera : $x = 2$; $y = 5$ $\wedge$ $z = 7$

$$\therefore \quad \sqrt{14+2\sqrt{10}-2\sqrt{14}-2\sqrt{35}} = \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$$ **RPTA. B**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Señale la afirmación FALSA :

A) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$; $n \in \mathbb{N}$; $a,b \in \mathbb{R}^+$

B) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $\forall\, b \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $a,b \in \mathbb{R}^+$

C) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

D) $\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$

E) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $m, n \in \mathbb{N}$

2.- Señale la afirmación FALSA

A) $\sqrt[par]{-} = -$

B) $\sqrt[par]{-}$ = cantidad imaginaria

C) $\sqrt[impar]{+} = +$

D) $\sqrt[impar]{-} = -$

E) $\sqrt[par]{+} = +$

3.- Son radicales semejantes, excepto :

A) $5\sqrt{3x}$ B) $-8\sqrt{3x}$ C) $3.2\sqrt{3x}$

D) $6\sqrt{3x^2}$ E) $12\sqrt{3x}$

4.- Son radicales homogéneos, excepto:

A) $2\sqrt[3]{8x^2}$ B) $7\sqrt[3]{5z}$ C) $3\sqrt{8y}$

D) $-9\sqrt[3]{4w}$ E) $7\sqrt[3]{3n}$

5.- El factor racionalmente de : $\sqrt[5]{2^2}$ es :

A) $\sqrt{2^3}$ B) $\sqrt[5]{2}$ C) $\sqrt[5]{2^3}$

D) $\sqrt[3]{5^3}$ E) $\sqrt[3]{5^2}$

6.- El factor racionalizante de : $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}$ es:

A) $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{14} - \sqrt[3]{4}$

C) $\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{14}$

E) N. A.

7.- La conjugada de : $\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$ es :

A) $-\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ B) $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$

C) $\sqrt{3} - \sqrt{10}$ D) $-\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{5}$

E) N. A.

8.- ¿Qué denominador se obtiene al racionalizar :

$$\frac{1}{x^{3/4} - y^{1/2}}\ ?$$

A) $x^4 - y^2$ B) $x^2 - y$ C) $x^3 - y^2$

D) $x^3 - y$ E) $x - y^3$

9.- Efectuar : $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{64}$

A) $3\sqrt[3]{2} + 4$ B) $2\sqrt[3]{2} - 2$ C) $4 - 2\sqrt[3]{2}$

D) $3\sqrt[3]{2} - 4$ E) $3\sqrt[3]{2} - 2$

10.- La raíz cuadrada de : $13 - \sqrt{160}$, es :

A) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ B) $\sqrt{10} - \sqrt{13}$ C) $\sqrt{8} - \sqrt{5}$

D) $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ E) $\sqrt{3} - \sqrt{7}$

NIVEL B

11.- Al simplificar :

$$\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20} - \sqrt{5} + \sqrt{12}$$

se obtiene :

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $-\sqrt{5}$ E) 0

12.- Luego de simplificar :

$$3\sqrt[3]{2a^3} - b\sqrt[3]{128} + 4b\sqrt[3]{2} - a\sqrt[3]{54}$$

se obtiene :

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $a\sqrt{2}$ D) 0 E) $-b\sqrt{2}$

13.- Racionalizar : $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

A) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{3}$ E) $\dfrac{2\sqrt[3]{6}}{3}$

14.- Al simplificar : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{8}}$

se obtiene :

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{18}{99}$

15.- Racionalizar : $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

A) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}+3}{5}$ E) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{10}$

16.- Racionalizar : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$

A) $-\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}\right)$ B) $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}{7}$

C) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2}}{7}$ D) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{8}}{12}$

E) N.A.

17.- Halle la raíz cuadrada de : $16+2\sqrt{55}$

A) $\sqrt{5}+\sqrt{10}$ B) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ C) $\sqrt{8}+\sqrt{7}$

D) $\sqrt{11}+\sqrt{6}$ E) $\sqrt{11}+\sqrt{5}$

18.- Efectuar : $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \div \dfrac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

A) $2+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

D) $2-\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}-1$

19.- Dado $\sqrt{5}=2{,}236\,07$, el valor de $\dfrac{87}{7-2\sqrt{5}}$ es :

A) 31,640 8 B) 32,460 8 C) 34, 416 4

D) 29.408 6 E) 36,504 6

20.- La expresión $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}$ es equivalente a :

A) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ D) $\sqrt{ab}+a$

B) $\sqrt{a^2+b^2}+b$ E) $\sqrt{a^2+b^2}-a$

C) $b-\sqrt{a^2-b^2}$

21.- Hallar un equivalente a : $ab^2\sqrt{a^{-1}b^{-2}\sqrt{a^{-1}b}}$

A) $a\,b^2\sqrt{a^{-3}b^{-1}}$ B) ab C) $\sqrt[3]{ab^2}$

D) $b\sqrt[4]{ab}$ E) $ab\sqrt{ab^2}$

22.- Transformar la expresión :

$\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}$; $x>0$, en otra que sólo contenga 2 radicales simples :

A) $\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{2}}-\sqrt{x}$

B) $\sqrt{\dfrac{x^2+4x+2}{2}}-\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

C) $\sqrt{\dfrac{2x^2+x+2}{2}}-\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

D) $\sqrt{\dfrac{x^2+2x+2}{2}}-\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

E) N.A.

23.- Racionalizar :

$$\frac{(a\sqrt{5}-2b)(\sqrt{5}-3)(\sqrt{45}+9)}{(5a-2b\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

A) $\frac{4}{5}(5+\sqrt{10})$ B) $\sqrt{5}+9$

C) $\frac{3}{5}(\sqrt{10}-5)$ D) $\sqrt{5}+\sqrt{10}$

E) N.A.

24.- Calcular el valor de esta suma :

$$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$$

A) $\sqrt[3]{4}+2$ B) 4 C) $\sqrt[3]{12}$

D) $2+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}+1$

25.- La raíz cúbica de : $9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$; es igual a :

A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

NIVEL C

26.- Racionalizar : $\dfrac{3}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

A) $\dfrac{3(1+\sqrt{2}+\sqrt{6})}{5}$ B) $\frac{3}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

C) $\frac{3}{4}(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})$ D) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{4}$

E) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

27.- Racionalizar : $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

A) $\sqrt{x^2-1}+1$ B) $\sqrt{x^2+1}-x$

C) $\sqrt{x^2-1}+x$ D) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

E) $\sqrt{x^2-1}-x$

28.- $\sqrt{20-\sqrt{6}+49}+\sqrt[4]{441+180\sqrt{6}}$; es equivalente a :

A) $\dfrac{8-3\sqrt{6}}{4}$ B) $8+3\sqrt{6}$ C) $2+\sqrt{6}$

D) $\dfrac{6-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$ E) $8+2\sqrt{6}$

29.- Simplificar :

$$\frac{1}{\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}}$$

A) 2 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 4

30.- Racionalizar : $\dfrac{A}{2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$

A) $\dfrac{A\left(2+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)}{6}$ D) $\dfrac{A\left(2+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{4}\right)}{6}$

B) $\dfrac{A\left(2+2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)}{6}$ E) $\dfrac{A\left(2+\sqrt[4]{8}\right)}{3}$

C) $\dfrac{A\left(2+2\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)}{6}$

31.- Hallar la raíz cuadrada de :

$$21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$$

A) $2+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ B) $2+\sqrt{5}-\sqrt{3}$

C) $2+2\sqrt{3}$ D) $1+\sqrt{5}-\sqrt{3}$

E) $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$

32.- Racionalizar : $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$

A) $\sqrt[3]{3}+1$ B) $\sqrt[3]{6}+2$ C) $\sqrt[3]{3}+3$

D) $2\sqrt[3]{3}+1$ E) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$

33.- Simplificar :

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $2+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}+1$

34.- La raíz cuadrada de :

$$\left(x^2-xy-xz+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}+\frac{yz}{2}\right)\left(x^2+xy+\frac{y^2}{4}\right)$$

es de la forma : $ax^2+by^2+cxz+dyz$. entonces el valor de : $a+b+c+d$, es :

A) 1 B) 2/3 C) 3/4 D) 1/2 E) 0

35.- Efectuar y reducir la expresión :

$$\frac{\sqrt{26+\sqrt{675}}-\sqrt{26-\sqrt{675}}}{\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}+\sqrt[3]{26-\sqrt{675}}}$$

A) $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{50}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{50}}{16}$

D) $\sqrt{40}$ E) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

36.- Efectuar :

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-4\sqrt[3]{\frac{9}{4}}+6\sqrt[3]{\frac{16}{81}}+8\sqrt[3]{\frac{1}{12}}-\sqrt[3]{18}$$

A) 1 B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{3}$ D) 0 E) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$

37.- Halle la raíz cuadrada de :

$$P(x)\equiv x^6-6x^4+2x^3+9x^2-5x+2$$

A) $x+1$ B) $x-1$

C) x^2-3x+1 D) x^3-3x+1

E) No tiene raíz cuadrada exacta

38.- Calcular "$a+b$" si el polinomio :

$$P(x)\equiv ax^4+bx^3+11x^2+2x+1\ ;$$

tiene raíz cuadrada exacta.

A) 30 B) - 30 C) 35 D) -35 E) 1

39.- Halle el equivalente de :

$$\frac{3\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$$

A) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{4}$

B) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$

C) $\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}$

40.- Racionalizar : $\dfrac{2\left(\sqrt{15}-\sqrt{7}\right)}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

A) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-1$

B) $5+\sqrt{7}-\sqrt{3}-1$

C) $1+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

D) $\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-1$

E) $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-1$

41.- Luego de racionalizar : $\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{x\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}+1}$,

indicar el denominador :

A) x B) $x+1$ C) $x-1$

D) 1 E) N.A.

42.- Racionalizar : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}-6}$

A) $\dfrac{-\left(\sqrt[3]{49}+3\sqrt[3]{7}+9\right)\left(\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+4\right)}{300}$

B) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{49}+3\sqrt[3]{7}+9\right)\left(\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+4\right)}{300}$

C) $\dfrac{-\left(\sqrt[3]{49}+3\sqrt[3]{7}+9\right)\left(\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{7}+4\right)}{300}$

D) $\dfrac{-\left(\sqrt[3]{49}+3\sqrt[3]{7}+9\right)\left(\sqrt[3]{49}-2\sqrt[3]{7}+4\right)}{300}$

E) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{49}+3\sqrt[3]{7}+9\right)\left(\sqrt[3]{49}-2\sqrt[3]{7}+4\right)}{300}$

43.- Halle el equivalente de :

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}}+\frac{1-\sqrt{4-\sqrt{15}}}{\sqrt{6}}$$

A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B) $5+\sqrt{3}$

C) $\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ E) 1

44.- ¿Cuál es el denominador racional de :

$$\frac{1}{1+\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{4}}\ ?$$

A) 243 B) 245 C) 247

D) 249 E) 261

45.- El equivalente de :

$$\sqrt{5x-2+2\sqrt{6x^2-7x-3}}$$

es : $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx-a}$

Siendo a, $b \wedge c$ tres números naturales, calcular: $a+b+c$

A) 3 B) 6 C) 12 D) 8 E) N.A.

46.- Si : $\{x\,;y\,;z\}\subset \mathbb{Q}^+$ proporcionar el valor de : $x+y+z$, sabiendo que :

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} <> \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$$

A) 1/9 B) 2/9 C) 4/9 D) 7/9 E) N.A.

47.- Simplifica : $\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[2n]{5-2\sqrt{6}}$

A) 1 B) $\sqrt[n]{\sqrt{3}+1}$ C) $\sqrt{3}-1$

D) 2 E) N.A.

48.- Efectuar :

$$\sqrt[12]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

9 Factorial de un número

9.1) FACTORIAL DE UN NUMERO

Si n es un entero positivo, la notación $n!$ se lee : "n factorial" ó "factorial de n", la cual se define como la multiplicación del número n y todos los enteros positivos menores que él, así :

$$n! = n(n-1)(n-2)(..)...(..).3.2.1 \qquad ..... (9.1)$$

(*) En los libros antiguos, el factorial de n, se denotaba así : $\underline{|n}$

Ejemplo.- $1! = 1$; $2! = 2.1 = 2$; $3! = 3.2.1 = 6$; $4! = 4.3.2.1. = 24$

PROPIEDAD.- El factorial de n es igual a la multiplicación de n por el factorial del entero inmediato anterior a él. Así :

$$n! = n.(n-1)! \qquad ..... (9.2)$$

Por definición : $n! = n.(n-1)(n-2)........3.2.1$

Asimismo : $(n-1)! = (n-1)(n-2)........3.2.1$

Reemplazando la $2^{\underline{da}}$ igualdad en la $1^{\underline{ra}}$ se deduce que : $n! = n.(n-1)!$

lqqd

Ejemplo.- Entonces : $5! = 5.4!$; $26! = 26.25!$

Es mucho más sencillo expresar factoriales grandes con ayuda del signo factorial, que escribiendo el número completo, así :

$8! = 8.7.6!$

$10! = 10.9.8.7!$

$100! = 100.99!$

9.2) FACTORIAL DE CERO

DEFINICION.- Si se sustituye n por 1 en la relación, se obtiene que :

$$1! = 1.(1-1)!$$

O lo que es lo mismo : $1! = 1.0!$

Por lo tanto, se define : $\boxed{0! = 1! = 1}$

Ejemplo.- Simplificar : $\dfrac{10!}{7!}$

Utilizando la relación (1.2) tendremos :

1ro Se escribe : $10! = 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7!$

2do Se reemplaza : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7!}{7!} = 10 \,.\, 9 \,.\, 8 = 720$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Simplificar : $\dfrac{83!}{81! + 82!} \cdot \dfrac{40! + 41!}{42!}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en desarrollar parcialmente a algunos factoriales aprovechando para ello la propiedad del factorial vista en el item 9.1, de modo que puedan surgir términos que se repitan tanto en el numerador como en el denominador:

$$\frac{83.82.81!}{81! + 82.81!} \cdot \frac{40! + 41.40!}{42.41.40!}$$

Efectuando la simplificación de 81! y 40! en cada fracción respectivamente, queda :

$$\frac{83.82}{1+82} \cdot \frac{1+41}{42.41} = 82 \cdot \frac{1}{41} = \mathbf{2}$$ RPTA. B

2.- $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$ ***; es equivalente a :***

A) $\dfrac{1}{(n+1)!}$ *B)* $\dfrac{n}{n+1}$ *C)* $\dfrac{1}{n!}$ *D)* $\dfrac{n}{n!}$ *E)* $\dfrac{n}{(n+1)!}$

Resolución.-

Reconociendo que : $(n+1)! = (n+1).n!$, trataremos de homogenizar los denominadores para efectuar la sustracción de fracciones. Veamos :

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

Observando los denominadores, concluímos que estos son iguales, luego:

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$ RPTA. E

3.- Para qué valor de n se cumple : $12\,n! + 5\,(n+1)! = (n+2)!$

***A)* 1** ***B)* 2** ***C)* 3** ***D)* 4** ***E)* 5**

Resolución.-

Expandiendo parcialmente el 2[do] miembro, tendremos : $12\,n! + 5\,(n+1)\,n! = (n+2)\,(n+1)\,n!$

Eliminando $n!$ de ambos miembros, nos queda : $12 + 5\,(n+1) = n^2 + 3n + 2$

Efectuando y simplificando deducimos la siguiente ecuación :

$$n^2 - 2n - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad (n+3)\,(n-5) = 0$$

La solución que se admite es : $\boldsymbol{n = 5}$ **RPTA. E**

Observación.- El símbolo ! está definido solo para enteros positivos.

4.- Luego de efectuar : S = 1! + 2! + 3! + ... + 99! ; la cifra de las unidades en el valor de S es :

***A)* 9** ***B)* 8** ***C)* 5** ***D)* 3** ***E)* 0**

Resolución.-

Cuando se ha tenido la curiosidad de averiguar los valores de los factoriales de los 10 primeros números naturales, se puede concluir que a partir del 5! , es decir: 5!, 6! , ..., 99!,..etc, todos ellos terminan en cero (0). Esto es así por que en cada uno de dichos factoriales existen los factores 2 y 5 ; de este modo podemos afirmar que la suma de estos también termina en cero .

De acuerdo con estas observaciones estamos en la capacidad de asegurar que la cifra de unidades de S estará determinada por el resultado de la siguiente suma :

$$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33 = ...3$$

Entonces, la cifra de unidades de S es : **3** **RPTA. D**

5.- Efectuar : $\dfrac{(n-2)!(n-1)!}{(n+1)!(n-3)!}$

A) $\dfrac{n+1}{n-2}$ ***B)*** $\dfrac{n-2}{n(n+1)}$ ***C)*** $\dfrac{n-2}{n+1}$ ***D)*** $\dfrac{n}{n-2}$ ***E)*** $\dfrac{n(n-1)}{n+1}$

Resolución.-

Aprovechando racionalmente las propiedades del factorial, podemos efectuar simplificaciones importantes, para ello desarrollaremos parcialmente : $(n\text{-}2)!$ y $(n+1)!$; veamos :

$$(n-2)! = (n-2).\,(n-3)! \quad \text{y} \quad (n+1)! = (n+1).n\,.\,(n-1)!$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-2)\,(n-3)!\,(n-1)!}{(n+1)\,n\,(n-1)!\,(n-3)!} = \frac{n-2}{(n+1)\,n}$$ **RPTA. B**

6.- La siguiente expresión : $\dfrac{(h-1)!}{(h-k-1)!\,k!}+\dfrac{(h-1)!}{(h-k)!\,(k-1)!}$ ***; es equivalente a :***

A) $2\dbinom{h+1}{k}$ *B)* $\dbinom{h+1}{k}$ *C)* $2\dbinom{h}{k}$ *D)* $\dbinom{h}{k}$ *E) N.A.*

Resolución.-

Analizando los denominadores podemos reconocer que los términos $(h$-k-1)! y $(k$-1)!, están contenidos respectivamente en los factoriales $(h$-$k)$! y k!. De este modo el común denominador de las fracciones dadas es : $(h-k)!.\,k!$

$$=\frac{(h-k)\,(h-1)!+k\,(h-1)!}{(h-k)!\,k!}=\frac{(h-1)!\,h}{(h-k)!\,k!}$$

$$=\frac{h!}{(h-k)!\,k!}=\binom{h}{k}$$ **RPTA. D**

7.- Sabiendo que : $\dfrac{(x+7)!\,(x+5)!}{(x+6)!+(x+5)!}=15!$ ***; el valor de x es :***

A) 7 *B) 9* *C) 11* *D) 13* *E) 15*

Resolución.-

Haciendo una inspección de los terminos factoriales, notamos que es posible efectuar una simplificación del factorial $(x$+5)! , para lo cual será necesario aplicar la propiedad del factorial en $(x$+6)! , veamos :

$$\frac{\overbrace{(x+7)!}\,(x+5)!}{(x+6)(x+5)!+(x+5)!}=15!$$

A continuación descomponemos lo indicado y factorizamos el denominador :

$$\frac{(x+7)\cdot(x+6)!\,\cancel{(x+5)!}}{\cancel{(x+5)!}\,(x+7)}=15!$$

Simplificando los términos $(x+5)!\ \wedge\ (x+7)$, nos queda : $(x+6)!=15!$

Finalmente al comparar deducimos que : $x+6=15$

Despejando concluímos que : $\mathbf{x=9}$ **RPTA. B**

8.- Si (x + 1) ! - x ! = 18 ; el valor de (x + 1) ! + x ! , es :

A) 24 *B) 36* *C) 30* *D) 54* *E) 60*

Resolución.-

Desarrollando parcialmente al factorial del primer término, tendremos : $(x+1)\,x!-x!=18$

Extrayendo factor común x !: $x!\,(x+1-1)=18$

Reduciéndo, nos queda : $x!.\,x=18$

La última igualdad se cumple si : $x=3$

Finalmente : $(x+1)!+x!=4!+3!=$ **30** **RPTA. C**

9.3) COEFICIENTE BINOMIAL

Esta importante notación conocida como coeficiente binomial, se define de la siguiente manera :

Si n es un número real y r un número natural, la notación *coeficiente binomial* $\binom{n}{r}$ se lee : "coeficiente n , r " y está definida por :

$$\binom{n}{r} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,......\,(n-r+1)}{r\,!}$$

Puede comprobarse que el número de factores que hay en el numerador de esta relación, coincide con r. Asimismo se establece que "n" es el *índice superior y r el índice inferior* .

$$\binom{n}{r} \quad \begin{array}{l} n: \text{Indice Superior} \\ r: \text{Indice Inferior} \end{array}$$

Ejemplo.-

a) $\binom{7}{3} = \frac{\overbrace{7.\,(7-1)\;(7-2)}^{3\text{ factores}}}{3!} \quad \Rightarrow \quad \binom{7}{3} = \frac{7\,.\,6\,.\,5}{6} = 35$

Propiedad.- $\binom{n}{n} = 1$

Definición.- Se define que : $\binom{n}{0} = 1$

9.4) TEOREMA DEL COEFICIENTE BINOMIAL

El siguiente teorema, permite evaluar $\binom{n}{r}$ de otra manera: Si n es un entero positivo, r es un entero no negativo y $r \leq n$, se verifica que :

$$\binom{n}{r} = \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)!}$$

La expresión propuesta es semejante al cálculo del número de combinaciones de n objetos tomados de r en r, que se estudiará más adelante, en el capítulo de *Combinatoria*, por lo que a este coeficiente binomial n, r también se le llama NUMERO COMBINATORIO n , r. Una notación equivalente a la ya establecida es : C_r^n , donde n recibe el nombre de base y r el de orden.

$$\binom{n}{r} = C_r^n \quad \begin{array}{l} n: \text{Base} \\ r: \text{Orden} \end{array}$$

Demostración del Teorema .-

Por definición se sabe que : $\binom{n}{r} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\,......\,(n-r+1)}^{r\text{ factores}}}{r\,!}$

Multiplicando al numerador y al denominador por $(n - r)!$, se tendrá :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

Por propiedad se verifica que el numerador es igual al factorial de n, entonces :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad \textbf{\textit{lqqd.}}$$

Ejemplo.-

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,.\,4!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4!}{2\,.\,1\,.\,4!} = 15$$

9.5) PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS

1$^{\underline{ra}}$) Los *números combinatorios complementarios*, son aquellos que tienen igual base y la suma de los órdenes coincide con dicha base. Se verifica que los números combinatorios complementarios son iguales.

$$C_n^m = C_{m-n}^m$$

Ejm : $\quad C_{98}^{100} = C_2^{100} = \dfrac{100\,.\,99}{1\,.\,2} = 449\,500$

2$^{\underline{da}}$) La suma de dos números combinatorios de igual base, cuyos órdenes difieren en una unidad, es igual a otro número combinatorio cuya base se aumenta en una unidad a la base de uno de los sumandos y cuyo orden es el mayor de los órdenes :

$$C_{n-1}^m + C_n^m = C_n^{m+1}$$

Ejm : Para calcular $C_3^5 + C_2^5$; aumentamos en una unidad a la base y anotamos el orden mayor, es decir se obtiene C_3^6 ; entonces :

$$C_3^5 + C_2^5 = C_3^6 = \frac{6\,.\,5\,.\,4}{3\,.\,2\,.\,1} = 20$$

3$^{\underline{ra}}$) La suma de todos los números combinatorios de igual índice, cuyos órdenes varían desde cero hasta la propia base vale 2 elevado a dicha base :

$$C_0^m + C_1^m + \ldots\ldots + C_m^m = 2^m$$

Ejm : $\quad C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 2^4 = 16$

En efecto : $\quad 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

9.- Ordenar, de menor a mayor : C_4^{18} ; C_3^{17} ; C_8^{20}

y calcular la diferencia entre el mayor y la suma de los 2 menores.

A) 3 600 B) 10 240 C) 122 230 D) 1 080 E) 96 080

Resolución.-

Empleando la definición de Número Combinatorio, tendremos :

$$C_4^{18} = \frac{18!}{14!\,.\,4!} = \frac{18.17.16.15}{1.2.3.4} = 3\,060$$

$$C_3^{17} = \frac{17!}{3!\,14!} = \frac{17.16.15}{1.2.3} = 680$$

$$C_8^{20} = \frac{20!}{8!\,12!} = 125\,970$$

$\therefore$ 125 970 - (3 060 + 680) = **122 230** **RPTA. C**

10.- Reducir a una sola expresión : $C_r^n + C_{r-1}^n$

A) C_{r+1}^n ***B)*** C_r^{n+1} ***C)*** C_r^{n-1} ***D)*** C_r^n ***E) N.A.***

Resolución.-

Por definición se sabe que : $C_r^n + C_{r-1}^n = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} + \dfrac{n!}{(r-1)!\,[n-(r-1)]!}$

Multiplicando y dividiendo cada término de un modo conveniente, tendremos :

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{n-r+1}{n-r+1} + \frac{n!}{(r-1)!\,[n-(r-1)]!}\cdot\frac{r}{r}$$

Utilizando la propiedad del factorial, los denominadores se logran transformar así:

$$= \frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!} + \frac{r.n!}{r!(n-r+1)!}$$

Procediendo a sumar las fracciones dadas, se tendrá :

$$= \frac{n!\,[(n-r+1)+r]}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)\,n!}{r!(n+1-r)!}$$

Utilizando otra vez la propiedad del factorial en el numerador, obtendremos :

$$= \frac{(n+1)\,!}{r!(n+1-r)!}$$

De acuerdo con el teorema del número combinatorio, reconocemos que la expresión (*), coincide con la expresión : C_r^{n+1}

En general : $C_r^n + C_{r-1}^n = C_r^{n+1}$ **RPTA. B**

11.- Reducir a una expresión que solo tenga un símbolo combinatorio.

$$\binom{33}{7} + \binom{35}{10} + \binom{33}{8} - \binom{34}{10}$$

A) $\binom{35}{8}$ *B)* $\binom{36}{9}$ *C)* $\binom{36}{10}$ *D)* $\binom{72}{8}$ *E)* $\binom{35}{9}$

Resolución.-

Para este ejercicio será necesario recordar la propiedad para Coeficientes Binomiales el cual establece que : $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

Aplicando esta regla al 1ro y al 3ro : $\binom{33}{7} + \binom{33}{8} = \binom{34}{8}$

Y ahora con el 2do y el 4to : $\binom{35}{10} - \binom{34}{10} = \binom{34}{9}$

Sustituyendo estos resultados en la expresión original : $\binom{34}{8} + \binom{34}{9} = \binom{35}{9}$ **RPTA. E**

12.- Simplificar : $\dfrac{2\,C_6^{15} + 8\,C_9^{15}}{5\,C_6^{15}}$

A) $\frac{9}{4}$ *B) 1* *C) 2* *D)3* *E)* $\frac{1}{2}$

Resolución.-

Por propieadad de Números Combinatorios sabemos : $C_n^m = C_{m-n}^m$; cuando $m \geq n$

Por esta razón diremos que : $C_6^{15} = C_9^{15} = k$

De este modo la expresión se reduce a : $\dfrac{2k+8k}{5k} = \dfrac{10k}{5k} = 2$ **RPTA. C**

13.- ¿Cuál es la relación entre : C_k^n ***y*** C_{k-1}^{n-1} ***?***

A) $\frac{n}{k}$ *B)* $\frac{k}{n}$ *C)* $1 + \frac{k}{n}$ *D)* $1 - \frac{n}{k}$ *E) N.A.*

Resolución.-

Por definición de Número Combinatorio, sabemos que :

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n.(n-1)!}{k.(k-1)!\,(n-k)!}$$

Agrupando términos convenientemente, la expresión queda así :

$$C_k^n = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Reconocemos que la 2[da] fracción es el desarrollo del número combinatorio C_{k-1}^{n-1} :

$$\Rightarrow \quad C_k^n = \frac{n}{k}\ C_{k-1}^{n-1} \qquad \text{¡ Propiedad !}$$

Y finalmente : $\frac{n}{k}\ .\ C_{k-1}^{n-1} = C_k^n \qquad \therefore \qquad \frac{C_k^n}{C_{k-1}^{n-1}} = \frac{n}{k}$ **RPTA. A**

14.- Resolver : $C_3^{2x} = 2\ C_3^{2x-1}$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Recordando que : $C_b^a = \frac{a!}{(a-b)!\ b!}$, entonces; la ecuación dada equivale a :

$$\frac{2x!}{(2x-3)!.3!} = 2\ .\ \frac{(2x-1)!}{(2x-4)!.3!}$$

Desarrollando parcialmente los factoriales, tendremos :

$$\frac{2x\,(2x-1)\,(2x-2).(2x-3)!}{(2x-3)!.3!} = 2\ .\ \frac{(2x-1)\,(2x-2)\,(2x-3).\,(2x-4)!}{(2x-4)!.3!}$$

Simplificando los factoriales comunes de cada miembro, se tendrá :

$$\frac{2x\,(2x-1)\,(2x-2)}{3!} = 2\ .\ \frac{(2x-1)\,(2x-2)\,(2x-3)}{3!}$$

Volviendo a simplificar , nuestra ecuación se reduce a :

$$x = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 3}$$ **RPTA. C**

15.- Hallar m, sabiendo que : $C_4^m = 20\ C_2^m$

A) 16 ***B) 18*** ***C) 12*** ***D) 10*** ***E) 6***

Resolución.-

A partir de la definición del Coeficiente Binomial, los Números Combinatorios pueden quedar expresados así :

$$C_4^m = 20\ .\ C_2^m$$

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.2.3.4} = 20\ .\ \frac{m\ .\ (m-1)}{1.2}$$

Simplificando : $(m-2)\ (m-3)=240$

Efectuando : $m^2-5m-234=0$

La solución positiva de esta última ecuación es : $m = 18$ **RPTA. B**

16.- La suma de n y el menor valor de k que satisfacen las siguientes condiciones :

$$n! = 720 \quad , \ y \ , \quad \binom{n+2}{k} = 56 \quad ; \ es:$$

A) 8 *B) 6* *C) 11* *D) 9* *E) 7* ***UNMSM 96***

<u>**Resolución**</u>.-

Descomponiendo en sus factores primos a 720 , tendremos : $720 = 6.5.4.3.2.1$

Vemos que el 2^do^ miembro es el desarrollo de 6 !, luego : $720 = 6!$

Esta igualdad nos conduce a afirmar que : $n! = 6! \Rightarrow n = 6$

Reemplazando este valor en la segunda condición : $\binom{6+2}{k} = 56$

De acuerdo con el teorema del número combinatorio : $\dfrac{8!}{k!(8-k)!} = 56$

Desarrollando parcialmente el numerador : $\dfrac{8.7.6!}{k!(8-k)!} = 56$

Simplificando de ambos miembros, tendremos : $k!(8-k)! = 6! = 6.5!$

Reconociendo que 6 = 3 ! , se establecerá que : $k!(8-k)! = 3!\,5!$

Por comparación podemos decir que : $k = 3$, ó , $k = 5$, así el menor valor de k es 3.

Luego : $n + k = 6 + 3 =$ **9** **RPTA. D**

MISCELANEA

17.- Sabiendo que : $A = \dfrac{(n-3)!}{(n+1)!}$, $B = \dfrac{n!}{(n-2)!} \cdot \dbinom{n}{3}$; $C = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

Entonces A. B. C es igual a :

A) $\dfrac{n(n-1)}{3!}$ **B)** $\dfrac{n(n+1)}{3}$ **C)** $\dfrac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3!}$ **D)** $\dfrac{n-1}{2}$ **E) N.A.**

Resolución.-

Empleando las propiedades del factorial, tendremos que :

$$A = \frac{(n-3)!}{(n+1)\,(n)\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)!} = \frac{1}{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}$$

Recordando la definición del Número Combinatorio, se dirá que :

$$B = \frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{(n-1)\,n\,(n-2)\,(n-1)n}{3!}$$

Análogamente : $C = \dfrac{(n+1)\,n!}{n!} = n + 1$

$$\therefore \qquad ABC = \frac{n\,(n-1)}{3!}$$

RPTA. A

18.- Para qué valor de n, se cumple : $\dfrac{(n+6)!\ \ (n+4)!}{(n+5)! + (n+4)!} = 12\,!$

A) 5 **B) 7** **C) 9** **D) 13** **E) 6**

Resolución.-

$$\frac{(n+6)!\ \ (n+4)!}{(n+5)\,(n+4)! + (n+4)!} = 12\,!$$

$$\frac{(n+6)!}{n+5+1} = 12\,! \quad \Rightarrow \quad (n+5)\,! = 12\,!$$

$$n = 7$$

RPTA. B

19.- Resolver : $2\dbinom{2x}{x} = 7\dbinom{2x-2}{x-1}$; $x \in \mathbb{N}$

A) 2 **B) 4** **C) 6** **D) 8** **E) 10**

Resolución.-

Utilizando la definición del Número Combinatorio, procederemos de manera similar a como lo hicimos en el ejercicio anterior. Veamos :

$$2\,.\,\frac{(2x)!}{x!\;x!}=7\,.\,\frac{(2x-2)!}{(x-1)!\,(x-1)!}$$

$$\frac{2\,.\,(2x)\,(2x-1)\,(2x-2)!}{x\,(x-1)!\,x\,(x-1)!}=7\,.\,\frac{(2x-2)!}{(x-1)!\,(x-1)!}$$

$$\frac{4\,(2x-1)}{x}=7\;\Rightarrow\;8x-4=7x\;\Rightarrow\;x=4$$ **RPTA. B**

20.- Se define $A_r^n=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ ***; entonces de acuerdo a esto, resolver :*** $3\,A_4^x=A_5^{x-1}$

A) 4 *B) 4* *C) 8* *D) 10* *E) 12*

Resolución.-

Utilizando directamente la definición dada, tendremos :

$$3\,\frac{x!}{(x-4)!}=\frac{(x-1)!}{(x-6)!}$$

$$3\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3).(x-4)!}{(x-4)!}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5).(x-6)!}{(x-6)!}$$

$$3x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)=(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)\,(x-5)$$

Teniendo en cuenta que : $x\neq 1;\,2;\,3$, eliminamos factores comunes, obteniéndose :

$$3x=(x-4)\,(x-5)$$

$$\Rightarrow\quad x^2-12x+20=0\quad\Rightarrow\quad(x-10)\,(x-2)=0$$

Resolviendo se obtiene : $x=10$; $x=2$; pero descartamos $x=2$ ....$(x\geq 6)$

Entonces, solo cumple : $x=10$ **RPTA. D**

21.- Para qué valor de n, se cumple que : $C_1^n+C_3^n=2\,C_2^n$

A) 7 *B) 5* *C) 9* *D) 6* *E) 8*

Resolución.-

Sustituyendo cada número combinatorio : $n+\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}=2\,.\,\dfrac{n\,(n-1)}{2}$

Efectuando y simplificando,se obtiene : $n^2-9n+14=0$

Factorizando se consigue que : $(n-7)\,(n-2)=0$

De donde : $n = 7$ ó $n = 2$

Pero según la teoría solo cumple : $\mathbf{n = 7}$ **RPTA. A**

22.- Reducir : $\dfrac{0!}{2!} + \dfrac{1!}{3!} + \dfrac{2!}{4!} + \ldots\ldots$ ***40 sumandos :***

A) 40 *B) 1 640* *C) 1 599* *D)* $\dfrac{41}{40}$ *E)* $\dfrac{40}{41}$

Resolución.-

La suma se reduce a : $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{40.41}$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{40}-\frac{1}{41}\right)$$

Eliminando los paréntesis, queda : $1 - \dfrac{1}{41} = \mathbf{\dfrac{40}{41}}$ **RPTA. E**

23.- El valor simple de : $E = \dfrac{4!\,25! - ((4!)!)!\,5!}{5!\,(4!)! - 4!\,(24!)!}$ ***; es :***

A) 5! *B) 1* *C) 3!* *D) 5* *E) 20!*

Resolución.-

Descomponiendo convenientemente : $25! = 25\,.\,24! = 25\,(4!)!$

Reemplazando en "E" : $E = \dfrac{4!.25.(4!)! - ((4!)!)!\,(5.4!)}{\underline{5!}\,(4!)! - 4!\,((4!)!)!}$

Ahora factorizamos en el numerador : $E = \dfrac{5[5.4!(4!)! - ((4!)!)!\,4!]}{5.4!\,(4!)! - 4!\,((4!)!)!}$

Finalmente simplificando se obtiene : $\mathbf{E = 5}$ **RPTA. D**

24.- ¿Qué valor natural de "n" verifica : $\dfrac{(n+1)!.n!}{(n+1)! - n!} = 99.\,(n-2)!$

A) 3 *B)5* *C) 8* *D) 10* *E) 13*

Resolución.-

Desarrollando parcialmente $(n+1)$: $\dfrac{(n+1)\,.\,n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)!\,.\,n!}{(n+1)\,.\,n! - n!} = 99\,.\,(n-2)!$

Simplificando se tendría : $\dfrac{(n+1)\,n\,(n-1)}{(n+1)-1} = 99$

Efectuando se obtiene : $n^2 - 1 = 99$

$\therefore$ $\mathbf{n = 10}$ **RPTA. D**

25.- Resolver : $3\,C_3^{2n} = 44\,C_2^{n}$

A) 4 ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 7*** ***E) 8***

Resolución.-

Desarrollando cada Número Combinatorio, tendremos : $3 \cdot \dfrac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = 44\,\dfrac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$

Simplificando la igualdad teniendo en cuenta que : $n \neq 0 \quad \wedge \quad n \neq 1$

$$(2n-1)\;2\,(n-1) = 22\,(n-1) \quad \Rightarrow \quad 2n-1 = 11$$

$$\therefore \qquad n = 6$$

RPTA. C

26.- Indicar el valor de "m + n" luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} C_{n-1}^{m} = C_{n}^{m} \;\;..........\;(I) \\ 4\,C_{n}^{m} = 5\,C_{n-2}^{m} \;\;........\;(II) \end{cases}$$

A) 22 ***B) 23*** ***C) 24*** ***D) 25*** ***E) 26***

Resolución.-

Degradando en (I) : $C_{n-1}^{m} = \left(\dfrac{m-n+1}{n}\right) C_{n-1}^{m}$

Simplificando : $1 = \dfrac{m-n+1}{n}$

Es decir : $m = 2n-1 \;\;......\;(\alpha)$

En (II) degradamos sucesivamente dos veces el índice inferior de : C_n^m , así :

$$4\left(\frac{m-n+1}{n}\right)\left(\frac{m-n+2}{n-1}\right) C_{n-2}^{m} = 5\,C_{n-2}^{m}$$

Simplificando : $\dfrac{4\,(m-n+1)\,(m-n+2)}{n\,(n-1)} = 5 \;\;......\;(\theta)$

Pero de (α): $m = 2n-1$

Reemplazando en (θ) : $\dfrac{4\,(n+1)\,n}{n\,(n-1)} = 5$

Simplificando y efectuando : $4\,(n+1) = 5\,(n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 9$

Finalmente en (α) se obtiene : $m = 17$

$$\therefore \qquad m + n = 26$$

RPTA. E

27.- ¿Qué valor de "n" verifica : $\dfrac{[2(n-3)]!}{(n-3)!\,.\,[1.3.5.7........(2n-7)]} = 4096$

A) 11 **B) 13** **C) 15** **D) 12** **E) N.A.**

<u>**Resolución**</u>.-

Desarrollemos el numerador y formemos un factorial en el denominador :

$$\frac{2.4.6.8.10..........(2n-6)\,.\,(2n-6)!}{(n-3)!.[1.2.3.4.5.6.7.8......(2n-7)\,(2n-6)]} = 4\,096$$

Luego de formar el factorial del denominador, agrupamos términos en el numerador :

$$\frac{\overbrace{(2.1)\,(2.2.)\,(2.3)\,(2.4)..........(2\,[n-3])}^{(n-3)\text{ factores}}\,.\,(2n-6)!}{(n-3)!\,.\,(2n-6)!} = 4\,096$$

Simplificando y reagrupando términos, se obtiene :

$$\frac{\overbrace{1.2.3.4.......[n-3]}^{(n-3)!}\,.\,\overbrace{2.2.2.2..................2}^{(n-3)\,factores}}{(n-3)!} = 4\,096$$

Lo cual equivale a : $\dfrac{(n-3)!\,.\,2^{n-3}}{(n-3)!} = 4\,096 = 2^{12}$

Simplificando nuevamente, se obtiene : $2^{n-3} = 2^{12}$

Por comparación, tendremos: $n - 3 = 12$ $\therefore$ $\mathbf{n = 15}$ **RPTA. C**

28.- Reducir : $T = \dbinom{-20}{1} + \dbinom{-19}{2} + \dbinom{-18}{3} + ... + \dbinom{-1}{20}$

A) -1 **B) 0** **C) 1** **D) 2** **E) -2**

<u>**Resolución**</u>.-

Recordando que el Coeficiente Binomial, $\dbinom{m}{n}$, se define para $m \in \Re$ y ,$n \in$ N , tal que :

* Si : $m \in$ Z : $\dbinom{m}{n} + \dbinom{m}{n+1} = \dbinom{m+1}{n+1}$

* Si : $m \in$ N / $m<n$: $\dbinom{m}{n} = 0$

Ahora en la expresión "T" : $\quad T = \binom{-20}{1} + \binom{-19}{2} + \binom{-18}{3} + \ldots\ldots + \binom{-1}{20}$

Sumando a ambos miembros : $\binom{20}{0} = 1$

$$1 + T = \underbrace{\binom{-20}{0} + \binom{-20}{1}} + \binom{-19}{2} + \binom{-18}{3} + \ldots + \binom{-1}{20}$$

$$\binom{-19}{1}$$

$$\binom{-18}{2}$$

$$\binom{-17}{3} \quad \ddots$$

$$\binom{0}{20}$$

Finalmente se tendría : $\quad 1 + T = \binom{0}{20}$

$$1 + T = 0 \qquad \therefore \quad \mathbf{T = -1} \qquad \textbf{RPTA. A}$$

29.- ¿Qué valor de "n" verifica : $\left[C^{54}_{n-5} + C^{54}_{n-7}\right]^2 + \left[C^{54}_{59-n} - C^{54}_{61-n}\right]^2 = 4\,C^{54}_{59-n}\;C^{54}_{n-7}$

A) 29 ***B) 30*** ***C) 31*** ***D) 32*** ***E) 33***

Resolución.-

Recordando que : $C^n_k = C^n_{n-k}$, la expresión original queda así :

$$\left[C^{54}_{n-5} + C^{54}_{n-7}\right]^2 + \left[C^{54}_{n-5} - C^{54}_{n-7}\right]^2 = 4\,C^{54}_{n-5}\;C^{54}_{n-7}$$

Aplicando la equivalencia de Legendre en el primer miembro :

$$2\left[C^{54}_{n-5}\right]^2 + 2\left[C^{54}_{n-7}\right]^2 = 4\,C^{54}_{n-5}\;C^{54}_{n-7}$$

Simplificando y escribiendo todo en el primer miembro se tendría : $\left[C^{54}_{n-5} - C^{54}_{n-7}\right]^2 = 0$

De esta igualdad se desprende que : $C^{54}_{n-5} = C^{54}_{n-7}$

De donde se cumple : $(n-5)+(n-7) = 54$

$\therefore \quad n = 33$ **RPTA. E**

30.- Si se cumple : $C^{n-2}_{n-5} + C^{n-2}_{n-4} + C^{n-1}_{n-3} = 84$ ***; el valor de "n" es :***

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

Resolución.-

Recordando que : $C^{n}_{k} + C^{n}_{k+1} = C^{n+1}_{k+1}$, donde : $\{n ; k\} \subset \mathbb{N}$, y, $0 \le k \le n$

$$\underbrace{\underbrace{C^{n-2}_{n-5} + C^{n-2}_{n-4}}_{C^{n-1}_{n-4}} + C^{n-1}_{n-3}}_{C^{n}_{n-3}} = 84$$

Lo cual nos conduce a : $C^{n}_{n-3} = 84$

Pero por propiedad : $C^{n}_{3} = 84$

Desarrollando el Número Combinatorio por el método práctico, tendremos :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84 = 7 \cdot 3 \cdot 4$$

$$n(n-1)(n-2) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4$$

$$n(n-1)(n-2) = (3 \cdot 3)(2 \cdot 4)(7)$$

$$n(n-1)(n-2) = 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Comparando : $n = 9$ **RPTA. E**

31.- Dada la expresión : $\binom{m}{n}^2$ ***. Indique la verdad (V) o la falsedad (F) de :***

I) "m" es un número real y "n" número entero

II) "m" es un número entero y "n" número natural

III) Su desarrollo posee "2n" fracciones numéricas multiplicadas $(n \in \mathbb{N} / n \ge 2)$

A) FFV ***B) VFF*** ***C) VVF*** ***D) FVV*** ***E) VFV***

Resolución.-

Recordando que : $\binom{m}{n}$ = coeficiente binomial, donde : $m \in \Re$, y , $n \in N$

Siendo su desarrollo : $\binom{m}{n} = \dfrac{[m]\,[m-1]\,[m-2]\,.....\,[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.....\,(n-1).n}$

Finalmente la combinación correcta será : **FFV** **RPTA. A**

32.- Qué valor natural de "n" verifica :

$$\frac{n\,C_1^n}{C_0^n} + \frac{2(n-1)\,C_2^n}{C_1^n} + \frac{3(n-2)\,C_3^n}{C_2^n} + ... + \frac{n\,C_n^n}{C_{n-1}^n} = 204$$

A) 8 *B) 9* *C) 10* *D) 11* *E) 12*

Resolución.-

Recordando que : $C_k^n = \left(\dfrac{n-k+1}{k}\right) C_{k-1}^n$, la aplicaremos en cada término la sumatoria

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204$$

Dado que el 1er miembro es la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales ,por propiedad, tendremos :

$$\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = 204 = 17\,.\,4\,.\,3$$

$$n\,(n+1)\,(2n+1) = 6\,.\,17.\,4\,.\,3$$

$$n\,(n+1)\,(2n+1) = 2\,.\,3\,.\,17\,.\,4\,.\,3$$

$$n\,(n+1)\,(2n+1) = (2\,.\,4)\,(3\,.\,3)\,(17) = 8\,.\,9\,.\,17$$

Comparando factores : $n = 8$ **RPTA. A**

33.- Calcular el valor de "n" en : $C_1^n + 2\,C_2^n + 3\,C_3^n + ... + n\,C_n^n = 11264$

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13* *E) 14*

Resolución.-

Por medio de la ropiedead : $C_k^n = \dfrac{n}{k}\,C_{k-1}^{n-1}$, degradaremos la expresión :

En cada término, se obtiene : $\dfrac{n}{1}\,C_0^{n-1} + 2\,\dfrac{n}{2}\,C_1^{n-1} + 3\,\dfrac{n}{3}\,C_2^{n-1} + ... + n\left(\dfrac{n}{n}\right) C_{n-1}^{n-1} =$

Simplificando : $n\,C_0^{n-1} + n\,C_1^{n-1} + n\,C_2^{n-1} + \ldots + n\,C_{n-1}^{n-1} = 11\,264$

Factoizando n : $n\left[C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + \ldots\ldots + C_{n-1}^{n-1}\right] = 11\,264$

Por propiedad : $n\,.\,2^{n-1} = 11\,264 = 11\,.\,2^{10}$

$$n\,.\,2^{n-1} = 11\,.\,2^{11-1}$$

Y comparando términos : $\boldsymbol{n = 11}$ **RPTA. B**

34.- Resolver : ***$12x\,! + 5\,(x+1)\,! = (x+2)\,!$***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

En estos casos es preferible desarrollar parcialmente a los factoriales de mayor valor, esto permitirá realizar algunas simplificaciones que reducirán la complejidad de la ecuación. Veamos :

$$12x\,! + 5\,(x+1)\,x\,! = (x+2)\,(x+1)\,x\,!$$

Simplificando de ambos miembros el término $x\,!$, tendremos : $12 + 5\,(x+1) = (x+2)\,(x+1)$

Efectuando : $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$\Rightarrow \quad (x-5)\,.\,(x+3) = 0$$

Y resolviendo, obtenemos : $x = -3$; $\boldsymbol{x = 5}$ **RPTA. E**

35.- Hallar "n" sabiendo que : ***$n\,!\ (n+1)! = 10\,!$***

A) 4 ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 7*** ***E) 8***

Resolución.-

Debemos expresar 10 ! como el producto de dos factoriales de números consecutivos.

$$10\,! = \underbrace{1.2.3.4.5.6}_{6!}.\underbrace{7.8.9.10}_{E}$$

De donde reconocemos que : $E = 7\,.\,8\,.\,9.\,10$

Transformando los factores : $E = 7\,.\,2\,.\,4\,.\,3\,.\,3\,.\,2\,.\,5$

Agrupando convenientemente : $E = 7\,.\,(2\,.\,3)\,.\,5\,.\,(4)\,.\,3\,.\,2 = 7\,!$

De esto deducimos que : $10\,! = 6\,!\ 7\,!$

$\Rightarrow \quad n\,!\,.(n+1)! = 6\,!\ 7\,!$ $\quad\therefore\quad$ $\boldsymbol{n = 6}$ **RPTA. C**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Señale falso (F) ó verdadero (V) en :

I) $-3! = -6$ II) $(-3)! = -6$

III) $(2! + 3!) = 5!$ IV) $0! = 1$

A) VVVV B) FFVV C) VFFV

D) FFFV E) VFFF

2.- Si $(3 + x)! = 120$, x es igual a :

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.- Efectuar : $3! + 4! + 5!$

A) 120 B) 86 C) 44 D) 150 E) 130

4.- Simplificar : $\dfrac{85!}{83!}$

A) 2 B) 85 C) 1 340

D) 7 140 E) 3 140

5.- Señalar la afirmación VERDADERA en :

A) $(m + n!) = m! + n!$

B) $(m \,.\, n)! = m! \,.\, n!$

C) $\sqrt{n!} = \left(\sqrt{n}\right)!$

D) $n! = (n-1)!.n$

E) $(m-n)! = m! - n!$

6.- Un valor equivalente a C_6^{13} es :

A) C_7^{14} B) C_5^{13} C) C_7^{13}

D) C_7^{12} E) C_8^{13}

7.- Si : $C_2^n = 10$; hallar $2n - 1$

A) 5 B) 15 C) 13 D) 9 E) 7

8.- Si : $C_x^{18} = C_{x+2}^{18}$, el valor de x es :

A) 4 B) 6 C) 2 D) 8 E) 10

9.- Simplificar : $\dfrac{32! \cdot 24!}{23! \cdot 33!}$

A) $\dfrac{8}{24}$ B) $\dfrac{8}{11}$ C) $\dfrac{16}{23}$

D) $\dfrac{8}{33}$ E) $\dfrac{24}{36}$

10.- Simplificar : $\dfrac{n!\,(n-2)!}{(n-3)!\,(n+1)!}$

A) $\dfrac{n-2}{n-1}$ B) $\dfrac{n-1}{n+1}$ C) $\dfrac{n-3}{n-1}$

D) $\dfrac{n-3}{n+1}$ E) $\dfrac{n-2}{n+1}$

11.- Simplificar : $\dfrac{6! + 7! + 8!}{6! + 7!}$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

12.- Simplificar : $\dfrac{m!\,(n-1)!}{(m-1)!\,n!}$

A) $\dfrac{m+1}{n+1}$ B) $\dfrac{m}{n}$ C) $\dfrac{n}{m}$

D) $\dfrac{n-1}{m-1}$ E) 1

13.- Señale Verdadero o Falso :

( ) $4! + 4! = 8!$

( ) $4!\,4! = 16!$

( ) $3! + 4! = 5!$

A) VVV B) VFF C) FFV

D) FVF E) FFF

NIVEL B

14.- ¿A qué es igual : $\sqrt{5!+4!}$?

A) 9 B) 8 C) 10 D) 12 E) 7

15.- ¿En cuánto excede C_3^8 a C_2^8 ?

A) C_1^8 B) C_2^7 C) C_2^8 D) C_2^9 E) C_3^9

16.- Efectuar : $\frac{4!}{3!} \cdot \frac{7!}{3!\,4!}$

A) 120 B) 140 C) 28 D) 56 E) 70

17.- Hallar x en : $12\ (x-5)! = (x-4)!$

A) 10 B) 15 C) 16 D) 9 E) 20

18.- ¿A qué es igual $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4}$?

A) 140 B) 210 C) 105 D) 120 E) 240

19.- Resolver : $\frac{m!}{(m-2)!} = 380$

A) 20 B) 18 C) 30 D) 32 E) 16

20.- Ordena de menor a mayor : C_6^{10} ; C_5^9 ; C_3^{10} y calcular la suma de los dos mayores.

A) 320 B) 180 C) 440 D) 124 E) 336

21.- Simiplificar : $\frac{2\,C_8^{15} + 8\,C_7^{15}}{2\,C_7^{15}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

22.- Efectuar : $\sqrt{\frac{9!\ 15!}{8!\ 16!}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 3

23.- Resolver : $\frac{C_7^{n-5}}{C_4^{n-8}} = 16$

A) 6 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

24.- Simplificar : $\frac{13.14.........60}{20.21.22.........60}$

A) $\frac{19}{12}$ B) $\frac{19!}{12!}$ C) 19!

D) 12! E) 19! - 12!

25.- Reducir : $\frac{(x+1)!\ +\ (x+2)!}{x!\ +\ (x-1)!}$

A) $x+3$ B) x^2+3x C) x^2-3x

D) x^2+3x+2 E) x^2+3x-2

26.- ¿A qué es igual : $\frac{20!\ 25!}{18!\ 24!} + \frac{11!\ -\ 10!}{10!}$?

A) 9 510 B) 18 C) 3 950

D) 9 520 E) 6 550

27.- $\binom{s}{t} = 15$ y $\frac{s!}{(s-t)!} = 360$, entonces $s\,.\,t$ es igual a :

A) 24 B) 96 C) 216

D) 864 E) N.A.

28.- Si : $\frac{(2n)!}{(2n-2)!} - \frac{n!}{(n-2)!} = 70$; el valor de n es :

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

NIVEL C

29.- Reducir : $\dfrac{\binom{16}{1}+\binom{16}{2}}{\binom{18}{15}-\binom{17}{15}}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{1}{15}$

30.- Al resolver : $(x-5)! + (x-4)! = x-3$, la suma de las raíces es :

A) 6 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

31.- ¿Para qué valor de n se cumple :

$$4\,C_3^{n+1} + C_3^{n} + C_3^{n+2} = 1\,331\ ?$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

32.- Reducir :

$$\binom{n+1}{r+1}+\binom{n-1}{r-1}+\binom{n}{r-1}+\binom{n-1}{r},\ (r \leq n-1)$$

A) $\binom{n+2}{r+1}$ B) $\binom{n+2}{r}$ C) $\binom{n+2}{r+2}$

D) $\binom{n+3}{r+2}$ E) N.A.

33.- A qué es igual :

$$\frac{((6!)!)!\ (5!)!\ (24!)!}{(5!-1)!\ ((4!)!)!\ (((3!)!)!)!}$$

A) 2! B) 3! C) 4! D) 5! E) 6!

34.- Si : $1.1!+2.2!+3.3.!+.........+n.n!=(n+1)! + k$, entonces k equivale a :

A) 1 B) n C) -1 D) $-n$ E) $n!$

35.- Simplificar :

$$2!+1!.2^2+2!.3^2+3!.4^2+....+20!.21^2$$

A) 22! B) 21! C) $(21!)^2$

D) 20! 22! E) $21!22^2$

36.- Si : $\dfrac{(120!+1)!\ -\ ((5!)!)!}{(120!-1)!}$ <> $[\,(a!)!\,]^b$

¿Qué valor asume "$a+b$" ?

A) 5 B) 3 C) 7 D) 8 E) 4

37.- Mostrar el equivalente de :

$$\frac{x^{x!+1}\,[(x-1)!]^{(x+1)!}}{(x!)^{x!}\,[(x-1)!]^{x(x!)}}$$

A) x B) $x!$ C) $\frac{1}{x}$ D) $x-1$ E) $x+1$

38.- Al reducir :

$$2\,.\,2!\ +\ 4\,.\,2!\ +\ 6\,.\,3!\ +\,.....+2n\,.\,n!$$

se obtiene :

A) $(n-1)!$ B) $(2n+1)!$ C) $2n!$

D) $2\,.\,(n+1)!$ E) $2n\,.\,(n+1)!$

39.- Calcular "$n+k$" de :

$$\begin{cases} 7\binom{22}{2k} = 11\binom{21}{2k-1} \\ 3\binom{4n}{3} = 28\binom{2n}{2} \end{cases}$$

A) 15 B) 8 C) 12 D) 9 E) 17

40.- Halle "m" $\wedge$ "n" a partir de :

$$C_{40}^{50} + C_{39}^{49} + C_{38}^{48} + ...+ C_1^{11} + 1 = C_n^m$$

A) $m=51 \wedge n=40$ B) $m=52 \wedge n=41$

C) $m=51 \wedge n=41$ D) $m=52 \wedge n=40$

E) $m=51 \wedge n=42$

10 Binomio de Newton

10.1) DEFINICION

La potencia de un binomio es un polinomio que se denomina desarrolla binomial o de Newton. Así tenemos :

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Estas igualdades presentan el desarrollo binomial de $(a+b)^n$ cuando n es 1; 2; 3 y 4. Para estas expresiones se observan las siguientes propiedades:

10.2) PROPIEDADES DEL BINOMIO DE NEWTON CON $n \in \mathbb{N}$

1°) En el desarrollo existen $n + 1$ términos ,siendo $n \in \mathbb{N}$.

2°) La suma de los exponentes de a y b en cualquier término es n; además el exponente de a disminuye de 1 en 1 y el de b aumenta de 1 en 1.

3°) El primer término del desarrollo es : a^n , ó , $\binom{n}{0}a^n$

El segundo término es : $\frac{n}{1}\, a^{n-1}\, b$, ó , $\binom{n}{1}\, a^{n-1}\, b$

El tercer término es : $\frac{n\,(n-1)}{1.2}\, a^{n-2}\, b^2$, ó , $\binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2$

10.3) TEOREMA DEL BINOMIO CON $n \in \mathbb{N}$

Si n es cualquier entero positivo :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Ejemplo : Desarrollar y simplificar mediante el teorema del binomio $(x^2+3y)^5$.

Solución : En este caso, $n = 5$; $a = x^2$; $b = 3y$.

$$\left(x^2+3y\right)^5 = \binom{5}{0}\left(x^2\right)^5 + \binom{5}{1}\left(x^2\right)^4 (3y)^1 + \binom{5}{2}\left(x^2\right)^3 (3y)^2$$
$$+ \binom{5}{3}\left(x^2\right)^2 (3y)^3 + \binom{5}{4}\left(x^2\right)^1 (3y)^4 + \binom{5}{5}(3y)^5$$
$$= 1.x^{10} + \frac{5}{1}x^8 (3y) + \frac{5.4}{2.1} . x^6 \left(9y^2\right) + \frac{5.4.3}{3.2.1} x^4 \left(27y^3\right)$$
$$+ \frac{5.4.3.2}{4.3.2.1} x^2 \left(81y^4\right) + 1.243\ y^5$$
$$= x^{10} + 15\ x^8 y + 90\ x^6 y^2 + 270\ x^4 y^3 + 405\ x^2 y^4 + 243\ y^5$$

10.4) TEOREMA DEL BINOMIO CON n FRACCIONARIO Y/O NEGATIVO

Si n es fraccionario y/o negativo :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots$$

Su desarrollo admite infinitos términos pudiéndosele llamar en este caso Serie Binomial.

Ejemplo.- *Hállese los tres primeros términos de la expansión de :* $(1-x)^{-1/3}$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en la teoría se deberá plantear :

$$(1-x)^{-1/3} = \binom{-1/3}{0}[1]^{-1/3} + \binom{-1/3}{1}[1]^{-1/3-1}x + \binom{-1/3}{2}[1]^{-1/3-2}x^2 + \ldots\ldots$$

Y según las propiedades antes vistas, se tendrá :

$$(1-x)^{-1/3} = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)x + \frac{(-1/3)\ (-1/3-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots\ldots$$

Finalmente efectuando las operaciones indicadas conseguimos :

$$(1-x)^{-1/3} = \underbrace{1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}}_{\text{tres primeros términos}}$$

10.5) TERMINO DE LUGAR $k+1$

Del teorema del binomio deducimos que el término de lugar $k+1$ es el que contiene a b^k en su desarrollo, y cuyo coeficiente es $\binom{n}{k}$

Entonces una expresión para el término de lugar $k+1$ será :

$$t_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k} . b^k$$

Ejemplo.- *Hallar el séptimo término del desarrollo de :* $\left(2x^3 - \frac{1}{4}y^4\right)^{10}$

Resolución.-

$t_7 = t_{k+1}$, entonces $k = 6$, luego de la fórmula tendremos :

$$t_7 = \binom{10}{6}\left(2x^3\right)^{10-6} \cdot \left(-\frac{1}{4}y^4\right)^6 = \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}\left(2^4 \cdot x^{12}\right) \cdot \frac{1}{2^{12}} \cdot y^{24}$$

$$= \frac{105}{128}x^{12} \cdot y^{24}$$

10.6) TRIANGULO DE PASCAL

Al considerar solo los coeficientes de las sucesivas potencias de $(a + b)$, obtenemos un arreglo de números en forma de triángulo :

												Suma
$(a+b)^0$						1						1
$(a+b)^1$					1		1					2
$(a+b)^2$				1		2		1				4
$(a+b)^3$			1		3		3		1			8
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1		16
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1	32

Este arreglo se llama Triángulo de Pascal en memoria del matemático francés Blaise Pascal, que tiene propiedades interesantes con relación a la fórmula del Binomio de Newton y al Cálculo de Probabilidades.

Obsérvese estos detalles del triángulo :

$$\begin{matrix} 4 & & 6 \\ & \diagdown\;\;\diagup & \\ & 10 & \end{matrix} \quad <> \quad \begin{matrix} C_1^4 & & C_2^4 \\ & \diagdown\;\;\diagup & \\ & C_2^5 & \end{matrix}$$

que en realidad comprueban que : $C_1^4 + C_2^4 = C_2^5$

son un caso particular de : $C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1} = C_r^n$

Además : $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

ó , $C_0^5 + C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 2^5$

son una prueba de que la suma de los coeficientes de la fila n, es igual de 2^n .

10.7) APROXIMACION LINEAL

Teniendo en cuenta al desarrollo de la potencia : $(1-x)^n$ con $n \in \mathbb{Q} \wedge x \to 0$ (muy pequeño casi cero) se cumple :

$$(1-x)^n = 1 + n\,x$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- El desarrollo de $\left(2-\sqrt{3}\right)^5$ da como resultado :

A) $361 + 301\sqrt{3}$ *B) $363 - 301\sqrt{3}$* *C) $360 + 206\sqrt{3}$*

D) $362 - 209\sqrt{3}$ *E) $360 - 205\sqrt{3}$*

Resolución.-

En la fórmula del binomio, hacemos $a = 2$; $b = -\sqrt{3}$; $n = 5$ .Luego empleando como coeficientes los que aparecen en el Triángulo de Pascal, tendremos:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^5 = 2^5 - 5\,.\,2^4\sqrt{3} + 10\,.\,2^3\,.\,\sqrt{3}^2 - 10\,.\,2^2\,.\,\sqrt{3}^3 + 5\,.\,2\,.\,\sqrt{3}^4 - \sqrt{3}^5$$

$$= 32 - 80\sqrt{3} + 240 - 120\sqrt{3} + 90 - 9\sqrt{3}$$

$$= \quad 362 - 209\sqrt{3}$$ **RPTA. B**

2.- En el desarrollo del binomio $(2x-y)^{10}$, el coeficiente de x^6y^4 es :

A) 13 380 *B) 3 450* *C) 13 460* *D) 13 440* *E) 13 455* *UNMSM 92*

Resolución.-

En el desarrollo de $(a+b)^n$, el término $k + 1$ está dado por : $t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

En el problema propuesto, se tiene que : $a = 2x$; $b = -y$; $n = 10$. Salta a la vista que el coeficiente que nos piden depende de k ; luego, nuestro problema se reduce a calcular el valor de k. Para ello nos apoyaremos en la parte literal del término dado que estos son condición del problema, veamos :

$$a^{n-k}\,.\,b^k \quad \Rightarrow \quad x^6y^4$$

$$(x)^{10-k}\,.\,(y)^k = x^6y^4$$

Por analogía encontramos que : $k = 4$

De este modo el coeficiente es la parte numérica de t_{k+1}, así en (*), tendremos :

$$t_{k+1} = t_{4+1} = \binom{10}{4}(2x)^{10-4} \,.\, (-y)^4$$

De este modo reconocemos que el coeficiente numérico es :

$$\text{Coeficiente} = \binom{10}{4}(2)^6 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}(2)^6 = \boxed{13\,440}$$ **RPTA. D**

3.- Encontrar el cuarto término de $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^6$ ***, es :***

A) $-\frac{96}{x^4}$ *B)* $\frac{15x^2}{4}$ *C)* -20 *D)* $\frac{60}{x^2}$ *E)* $\frac{3x^4}{8}$ ***UNI 88***

Resolución.-

De acuerdo con la fórmula general, tendremos : $t_4 = t_{3+1} = \binom{6}{3}.\left(\frac{x}{2}\right)^{6-3}.\left(-\frac{2}{x}\right)^3$ ....

Efectuando operaciones en el 2^{do} miembro se obtiene :

$$t_4 = \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^3 = \frac{6.5.4\,(-8)}{1.2.3.\ 8}$$

$$\boxed{t_4 = -20}$$ **RPTA. C**

4.- Calcular el término de lugar 13 en el desarrollo de : $\left(x^2 + \frac{1}{x^5}\right)^{15}$

A) $252x^{61}$ *B)* $455x^{-54}$ *C)* $125x^{-8}$ *D)* $30x^6$ *E) N.A.*

Resolución.-

Empleando la fórmula general, tendremos :

$$t_{13} = t_{12+1} = \binom{15}{12}\cdot\left(x^2\right)^{15-12}\cdot\left(\frac{1}{x^5}\right)^{12} = \binom{15}{3}.\left(x^2\right)^3.\left(x^{-5}\right)^{12}$$

$$t_{13} = \frac{15.14.13}{1.2.3}\ x^6 \,.\, x^{-60}$$

$$\boxed{t_{13} = 455x^{-54}}$$ **RPTA. B**

5.- Hallar la raíz cuadrada del tercer término del desarrollo de : $\left(a\sqrt{2} + b\sqrt{3}\right)^4$

A) 6ab *B) 5ab* *C) 2ab* *D) 3ab* *E) 4ab*

Resolución.-

A partir de la fórmula general, tendremos que :

$$t_3 = t_{2+1} = \binom{4}{2} . (a\sqrt{2})^{4-2} . (b\sqrt{3})^2$$

$$= \frac{4.3}{1.2} . 2a^2 . 3\,b^2 = 36\,a^2b^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{t_3} = \sqrt{36\,a^2b^2} = \mathbf{6ab}$$ **RPTA. A**

6.- El término independiente de x en $\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2x}\right)^9$ es :

A) 0,018 *B) 0,002* *C) 0,084* *D) 0,001* *E) N.A.* *UNFV 90*

Resolución.-

Recordemos que el término de lugar $k+1$ está dado por : $t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} . b^k$

Sustituyendo los datos del binomio : $t_{k+1} = \binom{9}{k} \left(\frac{2}{5}x^2\right)^{9-k} . \left(\frac{1}{2x}\right)^k$

Efectuando en x, tendremos : $t_{k+1} = \binom{9}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^{9-k} . \left(x^2\right)^{9-k} . (2x)^{-k}$ ....(*)

Ahora, si el término es independiente de x, el exponente de éste debe ser cero, entonces de (*), tendremos : $2 . (9-k) - k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 6$

Reemplazando en (*), el término buscado es igual a : $t_{6+1} = \binom{9}{6} . \left(\frac{2}{5}\right)^3 . \left(x^2\right)^3 . (2x)^{-6}$

$$t_7 = \frac{9.8.7}{1.2.3} . \frac{2^3}{5^3} . 2^{-6} . x^6 . x^{-6} \quad \Rightarrow \quad t_7 = 0{,}084$$ **RPTA. C**

7.- Qué valor debe asignarse a "n" para que el término de lugar 25, en la expansión de :

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{5n+2}$$ *, contenga a "x" con exponente : 44*

A) 7 *B) 8* *C) 9* *D) 10* *E) 11*

Resolución.-

Recordar que en la expansión de $(a+b)^n$ el término que ocupa el lugar "$k+1$" es :

$$t_{k+1} = C^n_k\, a^{n-k}\, b^k$$

En este problema se tiene que : $k+1=25 \quad \Rightarrow \quad k=24$

Luego el término señalado es : $C_{24}^{5n+2}\left[\dfrac{x^2}{y}\right]^{5n-22}\left[\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right]^{24}$

Por condición el exponente final de "x" en T_{25} es 44 , es decir :

$$2(5n-22)-12=44 \quad \Rightarrow \quad 2(5n-22)=56 \quad \Rightarrow \quad 5n-22=28$$

$\therefore$ $\boxed{n=10}$ **RPTA. D**

8.- Hallar n + k si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^n$ es $80x^k$.

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 10* *UNI 82 - II*

Resolución.-

Por la fórmula general se sabe que : $t_4 = t_{3+1} = \binom{n}{3} x^{n-3} \cdot 2^3$

Pero por dato sabemos que : $t_4 = 80\,x^k$

Igualando ambas expresiones, tendremos : $\dfrac{8n(n-1)(n-2)}{6} \cdot x^{n-3} = 80\,x^k$

$\Rightarrow \quad 8n(n-1)(n-2)=480$;

Resolviendo, encontramos que : $n=5$

Luego, de los exponentes de x : $n-3=k \quad \Rightarrow \quad k=2.$

Finalmente, lo solicitado es : $\boxed{n+k=7}$ **RPTA. C**

10. 8) FORMULA DE LEIBNITZ

Así como se puede hallar el término que uno desee en la potencia de un binomio, se puede hallar un término cualquiera en la potencia de un polinomio, aplicando la llamada fórmula de Leibnitz. Por razones puramente pedagógicas estableceremos las reglas para el desarrollo de $(a+b+c+d)^m$, en donde el término que contiene a : $a^\alpha . b^\beta . c^\gamma . d^\delta$ es :

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!} \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot d^\delta \quad ; \quad \text{donde : } \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=m$$

El desarrollo de toda la potencia se expresa así :

$$(a+b+c+d)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\, a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot d^\delta$$

donde m se descompone en todos los modos posibles tales que: $\alpha+\beta+\delta+\gamma=m$, donde los valores de α , β , δ , γ pertenecen al conjunto $\{0; 1; 2; \ldots\ldots, m\}$.

El *número de términos* del desarrollo es n, el cual se obtiene con la fórmula :

$$n = \binom{m+k-1}{k-1}$$

donde k es el número de términos del polinomio que se eleva a la potencia m.

Ejemplo.- El # de términos de $(1+x+y+z)^6$ es :

$$C^{6+4-1}_{4-1} = C^9_3 = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

9.- La suma de los coeficientes numéricos del desarrollo completo de $\left(x^2-2xy+y^2\right)^7$ es :

A) 0 *B) 7* *C) 14* *D) 128* *E) 128^2*

Resolución.-

En principio debemos reconocer un TCP dentro del paréntesis :

$$\left(x^2-2xy+y^2\right)^7 = \left[(x-y)^2\right]^7 = (x-y)^{14}$$

Ahora de acuerdo con la teoría de expresiones algebraícas debemos hacer: $x=1$; $y=1$, para así obtener la suma de coeficientes :

$$\Sigma\,\text{coef.} = (1-1)^{14} = \mathbf{0}$$ **RPTA. A**

10.- Si el número de términos que se obtiene al desarrollar : $\left(2+3x^2+4y+5z^2\right)^n$ es 84. Calcular "n"

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Resolución.-

Recordar que el número de términos del desarrollo de un polinomio de la forma $(x_1+x_2+x_3+.....+x_k)^n$, se calcula así :

$$\#\ \text{térm.} = C_{k-1}^{n+k-1}$$

Ahora en el problema, se sabe que : $C_{4-1}^{n+4-1} = 84$

Efectuando, tendremos : $C_3^{n+3} = 84$

Desarrollando tendremos : $\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3} = 84 = 7\,.\,3\,.\,4$

Descomponiendo en factores : $(n+3)(n+2)(n+1) = 3\,.\,3\,.\,4\,.\,2\,.\,7$

Multiplicando convenientemente : $(n+3)(n+2)(n+1) = 9\,.\,8\,.\,7$

Comparando : $\boxed{n = 6}$ **RPTA. A**

11.- Al desarrollar : $(x+y+z+w)^8$ se obtienen "n" términos en el cual uno de ellos toma la forma : $\lambda\, x^3y^2z\,w^2$ de acuerdo a lo anterior calcular el valor de : "$\lambda + n$"

A) 1 805 B) 1 584 C) 1 845 D) 1 854 E) 1 580

Resolución.-

Debemos reconocer que λ es el coeficiente de : $x^3y^2z\,w^2$

Aplicando la fórmula de Leibnitz para el coeficiente multinomial visto en el item10.8, tendremos :

$$\lambda = \frac{8!}{(3!).(2!).(1!).(2!)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1\,680$$

Hallemos "n" : $n = C_{4-1}^{8+4-1} = C_3^{11} \quad \Rightarrow \quad n = 165$

$\therefore \quad \boxed{\lambda + n = 1\,845}$ **RPTA. C**

12.- En el desarrollo de $\left(a^2+b-a\right)^8$, indicar el coeficiente del término de la forma $a^{10}b^k$, donde k es un número par no nulo.

A) 420 B) 420,56 C) - 420,56 D) 56 E) 560 UNI 89

Resolución.-

Por tratarse de un polinomio, utilizaremos la fórmula de Leibnitz, para ello reconocemos que el término general tendrá solo tres variables dado que el polinomio es un trinomio de exponente : $m = 8$. Veamos :

Recordando el término general : $= \dfrac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot z^{\gamma}$

Sustituyendo los datos del trinomio : $= \dfrac{8!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \cdot \left(a^2\right)^{\alpha} \cdot (b)^{\beta} \cdot (-a)^{\gamma}$

Por el problema nos dice que el término es : $= C \cdot a^{10}\, b^{k}$

Luego por analogía debe cumplirse que : $2\alpha + \gamma = 10$ ....(1)

y ; $k = \beta$

También por teoría debe cumplirse que : $\alpha + \beta + \gamma = 8$ ....(2)

La condición exige que k sea un número par no nulo, luego : $\beta = 2 ; 4 ; 6$ .....

Resolviendo (1) y (2), encontramos que : $\alpha = 4$; $\beta = 2$; $\gamma = 2$

Hacemos ahora una inspección del coeficiente : $C = \dfrac{8!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$

Reemplazando los valores calculados, tendremos : $C = \dfrac{8!}{4!\,2!\,2!} = \dfrac{8.7.6.5}{4}$

$\therefore$ $C = 420$ **RPTA. A**

13.- Calcular el coeficiente cuya parte literal es : $x^2\, y\, z^3$ en la expansión de : $(2x - y + z)^6$

A) - 120 *B) 120* *C) - 240* *D) 240* *E) - 320*

Resolución.-

De acuerdo con la fórmula de Leibnitz, se puede establecer que :

$$(2x - y + z)^6 = \Sigma \begin{pmatrix} 6 \\ \alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3 \end{pmatrix} [2x]^{\alpha_1}\ [-y]^{\alpha_2}\ z^{\alpha_3}$$

$$(2x - y + z)^6 = \Sigma \begin{pmatrix} 6 \\ \alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3 \end{pmatrix} 2^{\alpha_1}\ (-1)^{\alpha_2}\ x^{\alpha_1}\ y^{\alpha_2}\ z^{\alpha_3}$$

Por dato : $\alpha_1 = 2 \ \wedge\ \alpha_2 = 1 \ \wedge\ \alpha_3 = 3$

Al reemplazar datos el coeficiente es : $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 ; 1 ; 3 \end{pmatrix} 2^2\ (-1)^1 = \dfrac{6!}{(2!).(1!).(3!)} \cdot (-4)$

Finalmente, efectuando encontramos : **Coef. ($x^2\, y\, z^3$) = - 240** **RTPA. C**

14.- Para que valor de "n" en el desarrollo de : $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}\right)^n$ *aparece un término cuya parte literal es : xyz*

A) 7 *B) 8* *C) 9* *D) 10* *E) 11*

Resolución.-

Utilizando la fórmula de Leibnitz : $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}\right)^n = \Sigma\begin{pmatrix} n \\ \alpha_1\,;\,\alpha_1\,;\,\alpha_3\end{pmatrix}\sqrt{x}^{\alpha_1}\ \sqrt[3]{y}^{\alpha_2}\ \sqrt[4]{z}^{\alpha_3}$

Por condición del problema : $\alpha_1 = 2 \ \wedge\ \alpha_2 = 3 \ \wedge\ \alpha_3 = 4$

Y puesto que : $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow$ $\boxed{n = 9}$ **RPTA. C**

15.- Calcular el coeficiente cuya parte literal es x^9 *en la expresión de :* $(1-2x+x^3)^5$

A) 70 *B) - 70* *C) 80* *D) - 80* *E) 90*

Resolución.-

Aplicando la fórmula de Leibnitz podemos establecer que :

$$(1-2x+x^3)^5 = \Sigma\begin{pmatrix} 5 \\ \alpha_1\,;\,\alpha_1\,;\,\alpha_3\end{pmatrix}[1]^{\alpha_1}\,[-2x]^{\alpha_2}\,[x^3]^{\alpha_3} \quad ....(*)$$

De aqui podemos reconocer que el coeficiente es : $\begin{pmatrix} 5 \\ \alpha_1\,;\,\alpha_1\,;\,\alpha_3\end{pmatrix}[-2]^{\alpha_2}$ .... (**)

Asimismo de (*) se reconoce que la parte literal es : $x^{\alpha_2+3\alpha_3}$

Por condición del problema se sabe que : $\alpha_2 + 3\alpha_3 = 9$

Pero también se debe cumplir que : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5$

Resolviendo las ecuaciones en el campo de los números naturales, tendremos :

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_2 & + 3\alpha_3 = 9 & \wedge & \alpha_1 & + \alpha_2 & + \alpha_3 & = 5 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 3 & & 2 & 0 & 3 & \\ 3 & 2 & & 0 & 3 & 2 & \end{array}$$

a) Reemplazando : $\alpha_1 = 2 \ \wedge\ \alpha_2 = 0 \ \wedge\ \alpha_3 = 3$; en (**)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2\,;\,0\,;\,3\end{pmatrix}[-2]^0 = \frac{5!}{(2!).(0!).(3!)} = 10$$

b) $\alpha_1 = 0 \quad \wedge \quad \alpha_2 = 3 \quad \wedge \quad \alpha_3 = 2$

$$\binom{5}{0\,;\,3\,;\,2}[-2]^3 = 10\,(-8) = -80$$

Finalmente el coeficiente de x^9 será : $10 + (-80) = -70$

$$\therefore \qquad \textbf{COEF}\left(x^9\right) = \mathbf{-70} \qquad \textbf{RPTA. B}$$

16.- ¿Cuál es el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(1+x^2-x^3\right)^9$?

A) 378 ***B) 504*** ***C) 126*** ***D) 252*** ***E) 148***

<u>**Resolución**</u>.-

$$\left(1+x^2-x^3\right)^9 = \left[1+\left(x^2-x^3\right)\right]^9$$

$$= 1 + \binom{9}{1}\left(x^2-x^3\right) + \binom{9}{2}\left(x^2-x^3\right)^2 + \binom{9}{3}\left(x^2-x^3\right)^3$$

$$+ \binom{9}{4}\left(x^2-x^3\right)^4 + \binom{9}{5}\left(x^2-x^3\right)^5 + \ldots\ldots + \left(x^2-x^3\right)^9$$

Se observa que x^8 figura solamente en el cuarto y quinto términos el coeficiente que le corresponde es la suma :

$$3\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 3\,.\,\frac{9.8.7}{1.2.3} + \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}$$

$$= 252 + 126 = \mathbf{378} \qquad \textbf{RPTA. A}$$

MISCELANEA

17.- Hallar el término que contenga la cuarta potencia de "a" en el desarrollo de : $\left(\sqrt{2}-a\right)^{10}$

A) $1280a^4$ *B)* $1380a^4$ *C)* $1480a^4$ *D)* $1580a^4$ *E)* $1680a^4$

Resolución.-

Utilizando la fórmula general, tendremos que : $t_{k+1} = \binom{10}{k} \sqrt{2}^{10-k} \cdot (-a)^k$

Si la expresión contiene a^4 , entonces : $k = 4.$

Esto significa que el término buscado es : $t_{4+1} = \binom{10}{4} \sqrt{2}^6 \cdot a^4$

Desarrollando el coefiente binomial : $t_5 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \cdot 2^3\ a^4$

$\mathbf{t_5 = 1680a^4}$ **RPTA. E**

18.- En el desarrollo de $\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7$ ***, el coeficiente de*** $a^{-1/2}$ ***es :***

A) -7 *B)* 7 *C)* -21 *D)* 221 *E)* 35

Resolución.-

De acuerdo con el enunciado, debemos observar el siguiente desarrollo :

$$\left(a-a^{-1/2}\right)^7 = ... + C\ .\ a^{-1/2} + ...$$

Ahora, sabemos que el término general está dado así : $t_{k+1} = \binom{7}{k} \cdot a^{7-k} \cdot \left(-a^{-1/2}\right)^k$

Entonces por comparación, tendremos que : $\binom{7}{k} \cdot a^{7-k} \cdot \left(-a^{-1/2}\right)^k = C \cdot a^{-1/2}$

Igualando exponentes : $7 - k - \frac{k}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = 5$

Esto significa que : $C = -\binom{7}{5} = -\binom{7}{2} = \frac{-7.6}{1.2} = \mathbf{-21}$ **RPTA. C**

19.- La suma de los coeficientes numéricos de todos los términos del desarrollo de $(x-2y)^{18}$ es :

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) -19* *E) 19*

Resolución.-

Tal como hicimos en el ejercicio anterior haremos $x = 1$; $y = 1$, de este modo conseguimos directamente la suma de todos los coeficientes. De este modo :

$$\Sigma \text{ coef.} = (1-2)^{18} = (-1)^{18}$$

$$\boldsymbol{\Sigma \textbf{ coef.} = 1}$$ **RPTA. B**

20.- El coeficiente máximo en el desarrollo de $(1+x)^n$ cuando n es par es :

A) C^n_2 *B)* C^n_{n-1} *C)* $C^n_{n/2}$ *D)* $C^n_{\frac{n+1}{2}}$ *E)* $C^n_{\frac{n-1}{2}}$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 10.5, podemos reconocer que el coeficiente del término general de $(1+x)^n$ es C^n_k . Nuestro problema consiste en determinar para qué valor de k es máximo dicho coeficiente. De acuerdo con lo expuesto en el capítulo anterior, recordamos que cuando n es par, C^n_k es máximo, luego :

$$C_{\text{máx}} = C^n_{n/2}$$ **RPTA. C**

21.- Si $x = \frac{1}{3}$, hallar el máximo término en el desarrollo de $(1+4x)^8$

A) $\frac{21972}{324}$ *B)* $\frac{2178}{81}$ *C)* $\frac{57344}{243}$ *D)* $\frac{1247}{64}$ *E)* $\frac{3126}{54}$

Resolución.-

Sean t_k y t_{k+1} dos términos de lugares consecutivos.

$$t_{k+1} = \frac{8-k+1}{k} \cdot (4x) \cdot t_k \qquad \Rightarrow \qquad t_{k+1} = \frac{9-k}{k} \cdot \frac{4}{3} \cdot t_k$$

Para que $t_{k+1} > t_k$ debe cumplirse que : $\frac{9-k}{k} \cdot \frac{4}{3} > 1$

$$\Rightarrow \qquad 36 - 4k > 3k \qquad \Rightarrow \qquad k < \frac{36}{7}$$

El valor máximo que verifica esta desigualdad es $k = 5$, entonces el término es t_6 .

$$t_6 = t_{5+1} = C_5^8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{8.7.6}{1.2.3} \cdot \frac{4^5}{3^5} \quad \Rightarrow \quad \text{Término máximo} = \frac{57\,344}{243} \qquad \textbf{RPTA. C}$$

22.- Indicar el lugar que ocupa el término independiente de "x" en la expansión de :

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{154}$$

A) 57 *B) 63* *C) 97* *D) 112* *E) 113*

Resolución.-

Hallemos el término general : $T_{k+1} = C_k^{154}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]^{154-k}\left[\frac{y}{\sqrt[4]{x}}\right]^k$

Efectuando operaciones : $T_{k+1} = C_k^{154}\; x^{\frac{2(154-k)}{3} - \frac{k}{4}}$

Como es independiente de "x" se cumple : $0 = \dfrac{2\,(154-k)}{3} - \dfrac{k}{4}$

Efectuando : $8 \,.\, 154 = 11\,k \quad \Rightarrow \quad k = 112$

$\therefore$ Lugar : $\boldsymbol{k + 1 = 113}$ **RPTA. D**

23.- En la expansión de : $\left(3x^3 + x^{-1}\right)^n$ existe un término en la cual su grado es numéricamente igual a la posición que ocupa. Indicar dicha posición si la suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo es igual a : 2^{34}

A) 8 *B) 9* *C) 10* *D) 11* *E) 12*

Resolución.-

Del dato : $\Sigma\ \text{Coef.}\left(3x^3 + x^{-1}\right)^n = 2^{34}$

Es decir : $\left(3[1]^3 + [1]^{-1}\right)^n = 4^n \quad \Rightarrow \quad 4^n = 2^{34} = 4^{17} \quad \Rightarrow \quad n = 17$

Hallemos el término T_{k+1} : $T_{k+1} = C_k^{17}\,[3x^3]^{17-k}\,[x^{-1}]^k$

$$T_{k+1} = C_k^{17}\, 3^{17-k}\, x^{51-4k}$$

Por condición : Grado : (T_{k+1}) = Posición (T_{k+1})

Es decir : $51 - 4k = k + 1 \quad \Rightarrow \quad k = 10$

$\therefore$ Lugar : $\boldsymbol{k + 1 = 11}$ **RPTA. D**

24.- En el desarrollo de : $\left(\sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{120}$ ***determinar el número de términos racionales e irracionales.***

A) 9 ∧ 112 ***B) 15 ∧ 104*** ***C) 17 ∧ 104*** ***D) 20 ∧ 101*** ***E) N.A.***

Resolución.-

Hallemos el término general T_{k+1} :

$$T_{k+1} = C_k^{120} \left[\sqrt[5]{x}\right]^{120-k} \left[\sqrt[3]{x}^{\,-1}\right]^{k}$$

$$T_{k+1} = C_k^{120}\, x^{24 - \frac{8k}{15}} \quad ; \quad 0 \le k \le 120$$

Para que los términos sean racionales deberá cumplirse que :

$$24 - \frac{8k}{15} = \#\ \text{entero} \quad \Rightarrow \quad k = \overset{\circ}{15}$$

Como : $0 \le k \le 120$, entonces "k" toma 9 valores. Esto significa que existen 9 términos racionales. Ahora nosotros sabemos que :

(# términos racionales) + (# términos irracionales) = 121

Luego : 9 + (# términos irracionales) = 121

Finalmente : (# términos irracionales) = 112

Existen : **9 términos racionales y 112 términos irracionales** **RPTA. A**

25.- Cuántos términos se obtienen al desarrollar $\left(\sqrt[3]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n}$ ***si se sabe que la relación de los séptimos términos equidistantes de los extremos es : 1/6***

A) 7 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 15***

Resolución.-

Se sabe que : t^{*}_{k+1} , y , t_{k+1} son equidistantes, siendo :

$$t_{k+1} = C_k^n\, a^{n-k}\, b^{k} \quad \wedge \quad t^{*}_{k+1} = C_k^n\, b^{n-k}\, a^{k}$$

En el problema : $\dfrac{t_{k+1}}{t^{*}_{k+1}} = \dfrac{1}{6}$; $k = 6$

Esto significa que : $\dfrac{C_k^n \left[\sqrt[3]{2}\right]^{n-k} \left[\sqrt[3]{3}^{\,-1}\right]^{k}}{C_k^n \left[\sqrt[3]{3}^{\,-1}\right]^{n-k} \left[\sqrt[3]{2}\right]^{k}} = \dfrac{1}{6}$

Simplificando : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}^{\,2k-n}\ \sqrt[3]{2}^{\,2k-n}} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{3.2}^{\,2k-n}} = \dfrac{1}{6}$

Escribiendo así : $6 = \sqrt[3]{6}^{\,2k-n} = 6^{\frac{2k-n}{3}}$

Por analogía, encontramos : $1 = \dfrac{2k-n}{3} \Rightarrow n = 2k - 3$

Pero sabemos que : $k = 6 \Rightarrow n = 9$

Finalmente : # términos : $n + 1 =$ **10** **RPTA. D**

26.- Al desarrollar la expresión : $\left(\dfrac{x^m}{y^{n-10}} + \dfrac{y^{n+20}}{x}\right)^n$ observamos que esta admite un solo término central cuya parte literal es : $x^{60}\ y^{600}$. Calcular : "m + n"

A) 41 B) 42 C) 43 D) 44 E) 45

Resolución.-

Como existe un solo término central "n" es un número par, podemos asegurar que el lugar del término central está dado por : $\dfrac{n}{2} + 1$

Luego : $T_c = T_{\frac{n}{2}+1} = C^n_{\frac{n}{2}} \left[x^m\, y^{-n+10}\right]^{\frac{n}{2}} \left[y^{n+20}\, x^{-1}\right]^{\frac{n}{2}}$

Efectuando en los exponentes : $T_{\frac{n}{2}+1} = C^n_{\frac{n}{2}}\ x^{\frac{n(m-1)}{2}}\ y^{15n}$

Por condición del problema : $\dfrac{n\,(m-1)}{2} = 60 \quad \wedge \quad 15n = 600$

Luego : $n = 40 \Rightarrow m = 4$ $\therefore\ m + n =$ **44** **RPTA. D**

27.- Determinar el lugar que ocupa el término de mayor valor numérico que se obtiene al desarrollar : $(3+2x)^{15}$ para : $x = \dfrac{7}{2}$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Resolución.-

Según condición del problema : $t_{k+1} > t_k$

Utilizando la fórmula general $C^{15}_k\ 3^{15-k}\ (2x)^k > C^{15}_{k-1}\ 3^{16-k}\ (2x)^{k-1}$

Simplificando obtenemos : $(16-k)\,(2x) > 3k$

Por dato $x = \dfrac{7}{2}$, entonces : $\quad 7(16-k) > 3k$

Efectuando y despejando : $\quad k < 11{,}2$

El mayor valor entero de "k" es 11, luego el término máximo ocupa el lugar "$k + 1$" : $\quad \boxed{k+1 = 12}$ **RPTA. C**

28.- Calcular la suma de la serie combinatoria :

$$T = C_0^n + 2^2 C_1^n + 2^4 C_2^n + 2^6 C_3^n + \ldots\ldots (n+1) \text{ términos}$$

A) 3^n *B)* 4^n *C)* 5^n *D)* 6^n *E)* 7^n

Resolución.-

Escribiendo así : $\quad T = C_0^n + 4C_1^n + 4^2 C_2^n + 4^3 C_3^n + \ldots\ldots + 4^n C_n^n$

Observar que la suma pedida es el desarrollo del binomio : $(1+4)^n = 5^n$

$\therefore \quad \boxed{T = 5^n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$ **RPTA. C**

29.- Efectuar la siguiente adición : $\quad T = \dfrac{5C_0^n}{1} + \dfrac{5^2 C_1^n}{2} + \dfrac{5^3 C_2^n}{3} + \ldots\ldots + \dfrac{5^{n+1} C_n^n}{n+1}$

A) $\dfrac{6^n - 1}{n}$ *B)* $\dfrac{6^{n+1} + 1}{n+1}$ *C)* $\dfrac{6^n + 1}{n+1}$ *D)* $\dfrac{6^{n+1} - 1}{n+1}$ *E) N.A.*

Resolución.-

Multiplicando a ambos miembros por $(n+1)$:

$$(n+1)T = 5\left(\frac{n+1}{1}\right)C_0^n + 5^2\left(\frac{n+1}{2}\right)C_1^n + 5^3\left(\frac{n+1}{3}\right)C_2^n + \ldots\ldots + 5^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+1}\right)C_n^n$$

Escribiendo así : $\quad (n+1)T = 5C_1^{n+1} + 5^2 C_2^{n+1} + 5^3 C_3^{n+1} + \ldots\ldots + 5^{n+1} C_{n+1}^{n+1}$

Sumando a ambos miembros C_0^{n+1} :

$$C_0^{n+1} + (n+1)T = C_0^{n+1} + 5C_1^{n+1} + 5^2 C_2^{n+1} + \ldots\ldots + 5^{n+1} C_{n+1}^{n+1}$$

Observar el segundo miembro es el desarrollo del binomio : $\quad (1+5)^{n+1} = 6^{n+1}$

Luego : $\quad \underbrace{C_0^{n+1}}_{1} + (n+1)T = 6^{n+1} \quad \Rightarrow \quad (n+1)T = 6^{n+1} - 1$

$\therefore \quad \boxed{T = \dfrac{6^{n+1} - 1}{n+1}}$ **RPTA. D**

30.- Cuál es el valor de "x" que verifica : $\dfrac{C_0^x}{1} + \dfrac{C_1^x}{2} + \dfrac{C_2^x}{3} + ... + \dfrac{C_x^x}{x+1} = \dfrac{21}{2}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 7* *E) N.A.*

Resolución.-

Multiplicando a ambos miembros por : $(x+1)$

$$\left(\frac{x+1}{1}\right)C_0^x + \left(\frac{x+1}{2}\right)C_1^x + \left(\frac{x+1}{3}\right)C_2^x + ... + \left(\frac{(x+1)}{x+1}\right)\frac{21}{2}(x+1) = \frac{21}{2}(x+1)$$

Aprovechando las propiedades del Número Combnatorio, la expresión queda así :

$$C_1^{x+1} + C_2^{x+1} + C_3^{x+1} + ... + C_{x+1}^{x+1} = \frac{21(x+1)}{2}$$

Sumando y restando C_0^{x+1} en el primer miembro, tendremos :

$$\underbrace{C_0^{x+1} + C_1^{x+1} + C_2^{x+1} + ... + C_{x+1}^{x+1}}_{\text{Propiedad}} - C_0^{x+1} = \frac{21(x+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{x+1} - 1 = \frac{21(x+1)}{2}$$

Escribiendo así : $\dfrac{2^{x+1} - 1}{x+1} = \dfrac{21}{2}$ .... $\left(\dfrac{21}{2} = \dfrac{63}{6}\right)$

Dando forma : $\dfrac{2^{x+1} - 1}{x+1} = \dfrac{2^6 - 1}{6} = \dfrac{2^{5+1} - 1}{5+1}$

Por comparación : $\boxed{x = 5}$ **RPTA. E**

31.- El valor de "x" es tan pequeño de tal manera que su cuadrado y demás potencias superiores pueden despreciarse de acuerdo a esto. El equivalente de : $T = \dfrac{\sqrt{9+x}}{1+x}$ ***es :***

A) $3 + \dfrac{x}{6}$ *B)* $3 - \dfrac{x}{6}$ *C)* $2 + \dfrac{17x}{6}$ *D)* $3 - \dfrac{17x}{6}$ *E)* $3 - \dfrac{6x}{17}$

Resolución.-

Debemos recordar la siguiente aproximación lineal visto en el item 10.7 :

$$(1+x)^n = 1 + nx \quad \Leftrightarrow \quad x \to 0 \quad \text{(es casi cero)}$$

Reescribimos la expresión dada del siguiente modo : $T = \sqrt{9\left(1+\dfrac{x}{9}\right)}\,(1+x)^{-1}$

$$T = 3\left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}$$

Aplicando la aproximación lineal señalada, tendremos : $T = 3\left(1+\frac{x}{18}\right)\ (1 - x)$

$$T = 3 - 3x + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{6}$$

se desprecia (el término $\frac{x^2}{6}$)

$\therefore$ $\boxed{T = 3 - \frac{17x}{6}}$ **RPTA. D**

32.- Indicar el coeficiente de : x^{23} en la expansión de : $(1 - 2x + 3x^2 + x^4 + x^5)^5$

A) -10 *B) 10* *C) 1* *D) -1* *E) N.A.*

Resolución.-

Aplicando Leibnitz :

$$(1-2x+3x^2+x^4+x^5)^5 = \Sigma \binom{5}{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3 ; \alpha_4 ; \alpha_5} (-2)^{\alpha_2}\ (3)^{\alpha_3}\ x^{23}$$

Se cumple :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \alpha_2 & + 2\alpha_3 & + 4\alpha_4 & + 5\alpha_5 & = 23 & \wedge & \alpha_1 & + \alpha_2 & + \alpha_3 & + \alpha_4 & + \alpha_5 & = 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 0 & 2 & 3 & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \end{array}$$

Luego el coeficiente será : $\text{Coef.} = \dfrac{5!}{(\alpha_1!)\,(\alpha_2!)\,(\alpha_3!)\,(\alpha_4!)\,(\alpha_5!)}\ (-2)^{\alpha_2}\ (3)^{\alpha_3}$

Reemplazando : $\text{Coef.} = \dfrac{5!}{(0!)\,(0!)\,(0!)\,(2!)\,(3!)}\ (-2)^0\ (3)^0$

$\therefore$ $\boxed{\text{Coef.} = 10}$ **RPTA. B**

33.- Si un término de la expansión de : $\left(2\sqrt{3}a - 721b - \frac{3}{2}c + 8d\right)^n$ tiene como parte literal a : $a^2b^3c^4d$. Halle el número de términos de la expansión.

A) 360 *B) 260* *C) 280* *D) 286* *E) N.A.*

Resolución.-

Aplicando Leibnitz el desarrollo será :

$$\Sigma \binom{n}{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3 ; \alpha_4 ;} (2\sqrt{3}\,a)^{\alpha_1}\ (-721\,b)^{\alpha_2}\ \left(-\frac{3}{2}\,c\right)^{\alpha_3}\ (8\,d)^{\alpha_4}$$

Observar la parte literal : $a^{\alpha_1}\ b^{\alpha_2}\ c^{\alpha_3}\ d^{\alpha_4}$

Por condición : $\alpha_1 = 2 \;\wedge\; \alpha_2 = 3 \;\wedge\; \alpha_3 = 4 \;\wedge\; \alpha_4 = 1$

Además se cumple : $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

Luego : $n = 10$

Finalmente el número de términos de la expansión será :

$$\text{Coef.} = C_{4-1}^{10+4-1} = C_3^{13}$$

$$\text{Coef.} = \frac{13!}{(10!)\,(3!)}$$

$\therefore$ **Coef. = 286** **RPTA. D**

34.- En la expansión de : $(1-2xy^2+x^4)^8$; el coeficiente cuya parte literal toma la forma $x^{22}\,y^4$ es :

A) 672 ***B) 512*** ***C) 32*** ***D) 482*** ***E) N.A.***

Resolución.-

Aplicando Leibnitz el desarrollo será : $\Sigma \binom{8}{\alpha_1\,;\,\alpha_2\,;\,\alpha_3} [1]^{\alpha_1}\ [-2xy^2]^{\alpha_2}\ [x^4]^{\alpha_3}$

El coeficiente es : $\binom{8}{\alpha_1\,;\,\alpha_2\,;\,\alpha_3} (-2)^{\alpha_2}$

La parte literal es : $x^{\alpha_2+4\alpha_3}\, y^{2\alpha_2}$

Se cumple : $\alpha_2 + 4\alpha_3 = 22 \;\wedge\; 2\alpha_2 = 4$

Resolviendo : $\alpha_2 = 2 \;\wedge\; \alpha_3 = 5$

También se cumple : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 8 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 1$

Finalmente el coeficiente será : $\text{Coef.} = \dfrac{8!}{(\alpha_1!)\,(\alpha_2!)\,(\alpha_3!)}\,(-2)^{\alpha_2}$

Reemplazando : $\text{Coef.} = \dfrac{8!}{(1!)\,(2!)\,(3!)}\,(-2)^2$

$\therefore$ **Coef. = 672** **RPTA. A**

35.- Se sabe que en el desarrollo de $(a+b)^n$ hay $n+1$ términos distintos, entonces el número de términos distintos en $(a+b+c)^{10}$ es :

A) 11 B) 33 C) 55 D) 66 E) 132

Resolución.-

$$[(a+b)+c]^{10} = (a+b)^{10} + 10(a+b)^9 c + 45\,(a+b)^8 c^2 + \ldots\ldots + 10\,(a+b)\,c^9 + c^{10}$$

Como $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos distintos, al desarrollar el primer término se tiene 11 términos distintos; el siguiente tiene 10, etc.

El número total de términos distintos es : $1+2+3+\ldots\ldots\ldots+11 = \dfrac{11.12}{2}$

$\therefore$ **66** **RPTA. D**

36.- Hallar el coeficiente del término que contiene a x^2 en el desarrollo de : $(1-4x)^{-1/2}$

A) 12 B) 6 C) 4 D) 18 E) 1

Resolución.-

Hallemos el término t_{k+1} del desarrollo de $(1-4x)^{-1/2}$, para lo cual emplearemos la fórmula general expuesta en el item 10.5, con $n = -1/2$; $a = 1$, y , $b = -4\,x$. Veamos :

$$t_{k+1} = \binom{-1/2}{k}[\,1\,]^{-1/2-k}.[-4x\,]^k$$

Efectuando tendremos :

$$t_{k+1} = \binom{-1/2}{k}[-4\,]^k.x^k$$

De aqui se reconoce que el coeficiente numérico está dado por :

$$\text{Coef.}\left(x^2\right) = \binom{-1/2}{k}[-4\,]^k \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Como el término en mención contiene a x^k y éste debe ser : x^2 , deducimos que : $k=2$. De este modo en (*), se tendrá :

$$\text{Coef.}\left(x^2\right) = \binom{-1/2}{2}[-4\,]^2 = \frac{(-1/2)\,(-1/2-1)}{1\cdot 2}\ .\,16$$

Finalmente efectuando se consigue : **Coef. $\left(x^2\right) = 6$** **RPTA. B**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Respecto a : $(x+a)^n$; $n \in$ N , es FALSO :

A) El polinomio obtenido en su desarrollo tiene $(n+1)$ términos

B) El polinomio obtenido es homogéneo

C) El polinomio obtenido tiene $(n - 1)$ términos

D) El polinomio obtenido es homogéneo de grado n

E) Si a es positivo, todos los términos de su desarrollo son positivos.

2.- La suma de los coeficientes del desarrollo de : $(x+a)^6$ es :

A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128

3.- Del desarrollo de $(a+b)^5$. si $a \neq - b$ y $a, b > 0$; se puede afirmar que :

A) Tendrá 6 términos

B) Todos los términos serán positivos

C) El primer término será a^5

D) El último término será b^5

E) Todo lo anterior

4.- El número de términos que tiene el desarrollo de $(a+b)^n$ es :

A) 2^n D) $n + 1$

B) $2^n - 3$ E) $n - 3$

C) No se puede determinar

5.- En el desarrollo de $(a+b)^{10}$ el tercer coeficiente será :

A) 36 B) 28 C) 45 D) 55 E) 60

6.- ¿Cuál de las siguientes expresiones es falsa en relación con el desarrollo de $\left(x^2-3y^5\right)^6$?

A) El desarrollo consta de 7 términos

B) Los términos son alternativamente positivos y negativos

C) La suma de los exponentes que afectan a x e y en cada término es constante.

D) El coeficiente del segundo término es -18

E) El coeficiente del cuarto término no es 540

7.- ¿Cuáles son los dos primeros términos del desarrollo de : $\left(1-\dfrac{a^2}{10}\right)^{10}$?

A) $1- a^2$ B) $10 - a^{20}$ C) $1-10a^{18}$

D) $10 - a^2$ E) $1 + a^2$

8.- Hallar el coeficiente del término medio del desarrollo de : $(a+b)^{12}$

A) 792 B) 770 C) 132

D) 154 E) 924

9.- El 6^{to} término del desarrollo de : $(a+b)^8$

A) $6a^8 b^8$ B) $70a^2 b^6$ C) $28\, a^4 b^4$

D) $56\, a^3 b^5$ E) N.A

10.- $20x^3 a^3$ es el cuarto término en el desarrollo de :

A) $(x-2a)^2$ D) $(2a-x)^6$

B) $(x+a)^6$ E) $(a-x)^5$

C) $(x-a)^6$

NIVEL B

11.- El desarrollo binomial de $(ab+b)^{14}$ contiene .... términos.

A) 14 B) 13 C) 15 D) 28 E) N.A.

12.- El primer término del desarrollo binomial de $\left(\sqrt{a}-b^2\right)^8$ es :

A) a^4 B) b^4 C) $-a^4b^2$

D) a^4b^2 E) ab^8

13.- El sexto término del desarrollo de $(a+2b)^6$ es :

A) $64b^6$ B) $60a^2b^4$ C) $30a^4b^2$

D) $192ab^5$ E) $64ab^5$

14.- El término de segundo grado en el desarrollo de $\left[x^2-\frac{2}{x}\right]^4$ es :

A) $-32x^2$ B) $24x^2$ C) $-12x^2$

D) $4x^2$ E) $-16x^2$

15.- Al desarrollar $(a+b)^n$, se puede afirmar lo siguiente, EXCEPTO :

A) El primer término es a^n

B) El segundo término es $n\ a^{n-1}.\ b$

C) Los exponentes de a decrecen y los de b crecen.

D) El número de términos es $n+1$

E) El último término es independiente de a y b.

6.- En el siguiente desarrollo :

$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+....+....+....+b^6$

los términos que faltan son :

A) $20a^3b^3$; $30a^2b^4$; $6b^5$

B) $20a^3b^3$; $15a^2b^4$; $6ab^5$

C) $15a^3b^3$; $6a^2b^4$; b^5

D) $24a^3b^3$; $15a^2b^4$; $9ab^5$

E) N.A.

17.- El quinto término de $(2x^2+y)^{20}$ tiene por coeficiente :

A) 170.2^8 B) 570.2^4 C) 570.2^{16}

D) 340.2^5 E) $4\,845.2^{16}$

18.- La suma de coeficientes en el desarrollo de $(a+b)^7$ es :

A) 128 B) 256 C) 64 D) 84 E) 140

19.- En el desarrollo de $\left(x^2-x^{1/2}y\right)^5$ el término de menor grado es :

A) el 1^ro^ B) el 2^do^ C) el 4^to^

D) el 5^to^ E) el 6^to^

20.- El mayor coeficiente en el desarrollo de $(a+2b)^6$ es igual a :

A) 304 B) 256 C) 160 D) 240 E) 192

21.- 240 a^4b^4 es el tercer término en el desarrollo de $(.........)^6$

A) $16\,a+b$ B) a^2+2b C) $240a+2b$

D) $2a+b^2$ E) a^2+b^2

22.- El signo y el grado relativo a x del 4^to^ término en el desarrollo de $(2x-y)^{100}$ son respectivamente.

A) positivo; 97   D) positivo; 95

B) positivo; 96   E) negativo; 96

C) negativo; 97

23.- En el desarrollo de $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x}\right)^5$ el término que contiene a x^{-8} es :

A) el 2do B) el 3ro C) el 4to

D) el 5to E) el 6to

24.- La fórmula del binomio es válida para n , si y solo si :

A) $n>0$

B) n es un entero

C) n es entero positivo

D) n es racional

E) n es cualquier número real.

25.- Hallar el coeficiente de x^{16} en el desarrollo de $\left(x^2-2x\right)^{10}$

A) 1 240   B) 2 160   C) 3 360

D) 1 728   E) 1 024

NIVEL C

26.- En el desarrollo de $\left(x^2+2x-1\right)^3$ el término de mayor coeficiente es :

A) $24x^3$ B) $9x^4$ C) $6x^4$

D) $12x^5$ E) $18x^3$

27.- El exponente de un binomio excede en 3 al de otro. Determinar la suma de estos exponentes, sabiendo que la suma de los coeficiente de ambos binomios es 144.

A) 14   B) 9   C) 15   D) 11   E) 13

28.- En el desarrollo de $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^m$ los coeficientes de los términos cuarto y décimo tercero son iguales. Hallar el término que no contiene a x.

A) $120a^5$ B) $612a^4$ C) $870a^6$

D) $3\,003a^{10}$ E) $1\,020a^9$

29.- La suma del 4to y 6to términos del desarrollo del binomio $\left(2x-x^2\right)^8$, es :

A) $8\binom{8}{5}\left(4x^{11}-x^{13}\right)$

B) $-8\binom{8}{3}\left(4x^{11}+x^{13}\right)$

C) $-8\binom{8}{5}\left(4x^{11}-x^{13}\right)$

D) $8\binom{8}{3}\left(4x^{11}+x^{13}\right)$

E) Ninguna anterior.

30.- Señale verdadero o falso :

El desarrollo de $\left(\frac{3x^2}{y^3}+\frac{2y^4}{x^3}\right)^6$

( ) tiene 7 términos

( ) tiene un término que carece de x e y

( ) tiene como 3er término a 1 200 x^2y^4

A) VVF B) VFV C) VFF D) VVV E) FFF

31.- Al desarrollar $\left(1+x+2x^3\right)^4$ el término que contiene a x^8 tiene por coeficiente :

A) 16   B) 48   C) 24   D) -23   E) -36

32.- Deducir el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $\left(x^2-2x+1\right)^5$

A) 420 B) 120 C) 210

D) 140 E) 312

33.- Halle "n" si la suma de los coeficientes de los desarrollos de $\left(3x^2-1\right)^n$ y $\left(5x^3-1\right)^{2n-6}$ son respectivamente iguales.

A) 10 B) 11 C) 2 D) 3 E) 4

34.- En el desarrollo de $\left(\sqrt[x]{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ el coeficiente binomial del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en 44 unidades. Hallar el término que no contiene a x.

A) $\binom{12}{4}$ B) $\binom{11}{3}$ C) $\binom{10}{9}$

D) $\binom{10}{7}$ E) $\binom{12}{5}$

35.- En el desarrollo de $x\,(1+x)^n$, cada coeficiente se divide por el exponente de la x a la cual pertenece este coeficiente. Entonces la suma de los cocientes obtenidos es igual a :

A) 2^n+1 B) 2^n-1 C) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

D) $\frac{2^n+1}{n-1}$ E) $2^{n+1}-2$

36.- Hallar el valor de "m" sabiendo que la diferencia entre los grados absolutos de los términos sexto y décimo sexto del desarrollo del binomio $(x^4+y^m)^{2n}$ es 10

A) 2 B) 7 C) 3 D) 11 E) 5

37.- Calcular el término independiente del desarrollo de : $(x+x^{-19})^{60}$

A) C_3^{60} B) C_4^{60} C) C_5^{60}

D) C_6^{60} E) C_{12}^{60}

38.- El desarrollo de $\left(x+\frac{y}{6}\right)^{20}$ admite dos términos consecutivos de igual coeficiente. Halle las posiciones que ocupan.

A) 4to y 5to D) 11ro y 12do

B) 3ro y 4to E) 9no y 10mo

C) 10mo y 11ro

39.- ¿Cuántos términos posee : $\left(\frac{x}{y^8}+\frac{y^2}{\sqrt[4]{x^{m-4}}}\right)^m$ sabiendo que en su desarrollo tiene un término independiente de $x \wedge y$?

A) 5 B) 8 C) 10 D) 6 E) 13

40.- Al reducir :

$$\left[C_0^n\right]^2+\left[C_1^n\right]^2+\left[C_2^n\right]^2+\ldots+\left[C_n^n\right]^2$$

obtenemos :

A) C_{n-1}^{2n+1} B) C_n^{2n} C) C_n^{n+2}

D) C_n^{n-1} E) C_{n+1}^{2n-1}

11 Análisis Combinatorio

El Análisis Combinatorio o Teoría Combinatoria se encarga del estudio de las propiedades de las agrupaciones que pueden formarse con los elementos de un conjunto dado.

11.1) PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Reciben este nombre un par de reglas que permiten determinar el número de posibilidades lógicas que puede tener el desarrollo de un evento determinado .

11.1A PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA MULTIPLICACION

Si el evento "A" puede ocurrir de "m" maneras diferentes y después de haber ocurrido cualquiera de ellas , otro evento "B" puede ocurrir de "n" maneras diferentes, entonces , los eventos "A" y "B" pueden ocurrir de manera conjunta de "$m\ .\ n$" maneras distintas.

Para aplicar este principio debe verificarse que la realización de un evento no impide la realización del otro. Asimismo este principio puede generalizarse para más de dos eventos (un número finito de eventos).

Ejemplo.- *Si cinco corredores compiten en la carrera final de los 100* metros *planos. ¿De cuántas maneras pueden ganarse los dos primeros puestos?*

<u>Resolución</u>.-

Evento A) .- El número total de corredores que intervienen en la competencia es cinco. Teniendo en cuenta, que el primer puesto puede ser ganado por cualquiera de los cinco corredores se podrá afirmar que el número de maneras de ganar el Primer Puesto es :

$$m = 5$$

Evento B) .- Asumiendo que uno de los cinco corredores ya ganó el primer puesto, el segundo lugar puede ser ganado por cualquiera de los cuatro corredores que quedan en carrera, esto significa que el número de maneras de ganar el Segundo Puesto es :

$$n = 4$$

Reconociendo que la realización del evento A no impide la realización del evento B, aplicaremos el Principio Fundamental de la Multiplicación, por lo cual, el númerototal de maneras de ganar los dos primeros puestos viene dado así :

$$m.n = 5 \cdot 4 = \textbf{20 maneras}.$$

11.1B PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA ADICION

Si el evento "A" puede ocurrir de "m" maneras diferentes y el evento "B" puede ocurrir de "n" maneras diferentes, y si A y B no pueden ocurrir simultáneamente, entonces el evento "A" o "B" se podrá realizar de "$m + n$" maneras diferentes.

Para aplicar este principio se debe verificar que los eventos "A" y "B" sean excluyentes, es decir la ocurrencia de uno de ellos debe impedir la ocurrencia del otro.

Ejemplo.- *De la ciudad "P" hasta la ciudad "Q" puede irse por vía terrestre de cinco maneras distintas y por vía aérea de cuatro maneras diferentes ¿De cuántas maneras en total se podrá ir de la ciudad "P" hasta la ciudad "Q"?*

Resolución.-

Asumiendo que cada forma de viajar de P a Q es un evento, del enunciado podemos reconocer la existencia de dos eventos distintos, veamos :

Evento A).- Este evento consiste en viajar de P a Q por vía terrestre, lo cual puede ocurrir de cinco maneras diferentes : $m = 5$

Evento B).- Este evento consiste en viajar de P a Q por vía aérea; lo cual a su vez puede realizarse de cuatro maneras diferentes : $n = 4$

Ahora es necesario identificar si los eventos son o no excluyentes. Para ello basta con reconocer que solo podemos elegir una de las dos formas de viajar, esto significa que, la ocurrencia de uno de los eventos impedirá la realización del otro; por lo tanto los eventos son excluyentes. Esta conclusión nos permite aplicar el Principio Fundamental de la Adición para poder encontrar el número total de maneras distintas en que podemos viajar de P a Q :

$$m + n = 5 + 4 = \boxed{\textbf{9 maneras}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- ¿De cuántas maneras podrá vestirse una persona que tiene 2 pares de zapatos, 3 pantalones, 4 pares de medias y 5 camisas?

A) 14 *B) 100* *C) 120* *D) 30* *E) 240*

Resolución.-

Según condición del problema, la persona para vestirse deberá utilizar : un par de zapatos, 1 pantalón, un par de medias y una camisa. De este modo podemos reconocer la existencia de 4 eventos distintos, veamos :

1) Número de maneras de escoger un par de zapatos = 2

2) Número de maneras de escoger un pantalón = 3

3) Número de maneras de escoger un par de medias = 4

4) Número de maneras de escoger una camisa = 5

Dado que la ocurrencia de cualquiera de estos eventos no impide la realización de los otros, aplicaremos el Principio Funadamental de la Multiplicación, esto es, el número de maneras de vestirse que tiene la persona, viene dado así :

$\therefore \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$ **120 maneras** **RPTA. C**

2.- La selección de los mejores alumnos de un colegio está conformado por siete alumnos. Si se le toma un examen final ¿cuántas opciones distintas se tiene para ocupar los tres primeros lugares?

A) 210 ***B) 243*** ***C) 18*** ***D) 180*** ***E) 237***

Resolución.-

Es necesario reconocer que la obtención de cada puesto de mérito, disminuye en uno (1) el número de alumnos que compiten para ganar el puesto inmediato inferior. Asumiendo que la obtención de cada puesto es un evento, es fácil identificar la existencia de tres eventos distintos, veamos :

1) Número de maneras de ocupar el primer puesto = 7

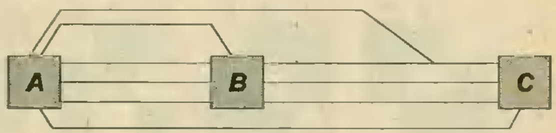
2) Número de maneras de ocupar el segundo puesto = 6

3) Número de maneras de ocupar el tercer puesto = 5

Puesto que la ocurrencia de cualquiera de estos eventos no impide la realización de los otros, aplicaremos el Principio descrito en el item 11.1A, es decir, el número de maneras distintas de ocupar los tres primeros puestos viene dado así :

$7 \cdot 6 \cdot 5 =$ **210 maneras** **RPTA. A**

3.- ¿De cuántas maneras diferentes podemos ir de la ciudad "A" hasta la ciudad "C" pasando por la ciudad "B" si se tiene el siguiente mapa de camino?



A) 1 ***B) 6*** ***C) 9***

D) 3 ***E) 12***

Resolución.-

Dado que la condición del problema exige pasar necesariamente por la ciudad B, debemos reconocer y considerar solo los caminos directos de A hacia B y de B hacia C. Esto permite identificar la existencia de dos eventos distintos, veamos :

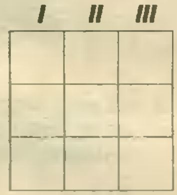
1) Número de maneras para ir desde "A" hasta "B" = 4

2) Número de maneras para ir desde "B" hasta "C" = 3

Finalmente observamos que la realización de uno de estos eventos no impide la realización del otro, por tal razón aplicaremos el principio expuesto en el item 11.1A, de este modo el número total de maneras diferentes de ir desde "A" hasta "C" pasando por "B" viene dado así :

$$4 \cdot 3 = \textbf{12 maneras} \qquad \textbf{RPTA. E}$$

4.- *¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 6 libros iguales en un estante cuya forma es la que se indica en la figura, si se desea que en cada casilla haya a lo más un libro y en cada fila o en cada columna 2 libros?*



A) 6 ***B) 9*** ***C) 12*** ***D) 4*** ***E) 3***

Resolución.-

De acuerdo al enunciado se deduce que la condición de que haya en cada fila o columna 2 libros, equivale a decir que en cada fila o columna quede siempre un casillero vacío. De este modo, la colocación de un casillero en blanco en cada columna se constituye en un evento, y por disponer de tres columnas podemos reconocer la existencia de tres eventos distintos, veamos :

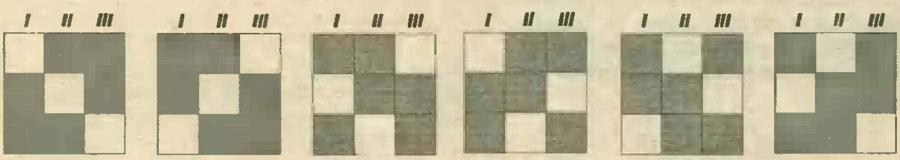
1) En la columna I se tienen 3 *maneras* diferentes para que un casillero quede vacío.

2) En la columna II se tienen 2 *maneras* distintas para que un casillero quede vacío, esto debido a que por condición del problema, en una fila no pueden haber dos casilleros vacíos.

3) En la columna III se tiene solo 1 *manera* para que un casillero quede vacío, esto en virtud de que hasta aquí ya existen dos filas con un casillero vacío cada una.

Finalmente, reconocemos que la realización de cualquiera de estos eventos no impide la realización de los otros, por lo tanto aplicaremos el principio expuesto en el Item 11.1A; de este modo el número de maneras de llenar el estante viene dado así :

$$\text{Número de maneras} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \textbf{6 maneras} \qquad \textbf{RPTA. A}$$



5.- *¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse izando cuatro banderas de diferentes colores una sobre otra, si pueden izarse cualquier número de ellas a la vez?*

A) 12 ***B) 24*** ***C) 256*** ***D) 64*** ***E) 48***

Resolución.-

Examinando cuidadosamente al enunciado podemos deducir cuatro eventos :

1) Cuando se iza una bandera el número de señales que se pueden formar es $= 4$

2) Cuando se izan dos banderas el número de señales que se pueden formar de acuerdo con el item 11.1A es $= 4 \cdot 3 = 12$

3) Cuando se izan tres banderas el número de señales es $= 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

4) Cuando se izan cuatro banderas el número de señales es $= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Puesto que la realización de uno de estos eventos impediría la realización de los otros, aplicaremos el principio expuesto en el item 11.1B , esto significa que el número de señales diferentes viene dado así :

$$\therefore \quad 4 + 12 + 24 + 24 = \boxed{\textbf{64 señales}}$$ **RPTA. D**

11.2) LA VARIACION

Se denomina variación de "*m*" elementos de un conjunto base, a otro conjunto ordenado cuyos elementos son grupos que involucran a "*n*" elementos del conjunto base, de tal modo que cada grupo se diferencia de otro en el orden de colocación o al menos en uno de sus elementos.

Matemáticamente : $$\boxed{V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

V_n^m se lee : Variación de "*m*" elementos en grupos de "*n*"

, o, Variación de "*m*" elementos tomados de "*n*" en "*n*"

Donde : m = número de elementos del conjunto base

n = número de elementos de cada grupo

Ejemplo .- *¿Cuántas palabras de dos letras diferentes se pueden formar con las letras :* a, b, c *y* d *?*

<u>Resolución</u>.-

Se pide calcular V_2^4 , es decir :

$$V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1}}{\cancel{1 \cdot 2}}$$

ab	*ac*	*ad*
ba	*ca*	*da*
bc	*bd*	*cd*
cb	*db*	*dc*

Finalmente : $V_2^4 = \boxed{\textbf{12 palabras}}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

6.- ¿Cuántos números de dos cifras diferentes se pueden formar con los siguientes dígitos: 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 9?

A) 6 ***B) 30*** ***C) 12*** ***D) 42*** ***E) 36***

Resolución.-

Según el enunciado se trata de escoger 2 dígitos de un total de 6, es decir estamos ante un caso de una variación de 6 elementos tomados de 2 en 2.

$$\therefore \quad V_2^6 = \frac{6!}{4!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} \quad \Rightarrow \quad V_2^6 = \textbf{30 números}$$ **RPTA. B**

7.- Con 6 consonantes y 3 vocales ¿Cuántas palabras que contengan 3 consonantes y 2 vocales se pueden formar sin que haya dos consonantes juntas?

A) 520 ***B) 210*** ***C) 720*** ***D) 24*** ***E) 5 040***

Resolución.-

Las palabras a formar deben contener cinco letras de las cuales 3 deberán ser consonantes (C) y 2 deben ser vocales (V) , dispuestas así : **C V C V C**

Primer Evento : Escogeremos 3 consonantes de un total de 6; es decir, tenemos 6 elementos que deberán tomarse de 3 en 3, luego el número de maneras viene dado por :

$$V_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} \quad \Rightarrow \quad V_3^6 = 120$$

Segundo Evento : Escogeremos 2 vocales de un total de 3 en 3 ; número de maneras : $V_2^3 = 6$

Puesto que la realización de uno de estos eventos no impide la realización del otro, aplicaremos el principio expuesto en el item 11.1A.; el número total de palabras será :

$$\therefore \quad 120\cdot 6 = \textbf{720}$$ **RPTA. C**

8.- Si el cuádruplo del número de variaciones de "n" objetos tomados de 3 en 3 es igual al quíntuple del número de variaciones de "n - 1" objetos tomados de 3 en 3. ¿Cuál es el valor de n?

A) 12 ***B) 15*** ***C) 16*** ***D) 20*** ***E) 25***

Resolución.-

De acuerdo con el enunciado se establece que : $4\,V_3^n = 5\,V_3^{n-1}$

Desarrollando cada variación se tendrá : $4\,\dfrac{n!}{(n-3)!} = 5\,\dfrac{(n-1)!}{([n-1]-3)!}$

Desarrollando parcialmente a los factoriales : $\dfrac{4n \cdot \cancel{(n-1)!}}{(n-3)\,\cancel{(n-4)!}} = \dfrac{5 \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-4)!}}$

Es decir : $4n = 5(n-3)$

Finalmente : $\mathbf{n = 15}$ **RPTA. B**

9.- El número de maneras en que se puede confeccionar una bandera de franjas de tres colores; si se tiene tela de cinco colores distintos es :

A) 10 *B) 30* *C) 50* *D) 60* *E) 120*

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo al enunciado se pide la variación de 5 elementos tomados de 3 en 3 :

$\therefore$ Número de maneras $= V_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 =$ **60 maneras** **RPTA. D**

10.- ¿Cuántas placas para automóviles pueden hacerse si cada placa consta de dos letras diferentes seguidas de tres dígitos diferentes? (considerar 26 letras del alfabeto).

A) 486 000 *B) 468 000* *C) 428 000* *D) 264 000* *E) 484 000*

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con el enunciado una placa deberá tener la siguiente forma :

Primer Evento.- Escogeremos 2 letras de 26; es decir debemos encontrar variaciones de 26 elementos tomados de 2 en 2 .Estas variaciones se obtienen así :

$$V_2^{26} = \frac{26!}{(26-2)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24!}{24!}$$

$$\therefore \quad V_2^{26} = 650$$

Segundo Evento.- Escoger 3 dígitos de 10 , es decir , haremos variaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3 . Estas variaciones se obtienen así : $V_3^{10} = 720$

Finalmente aplicando el principio expuesto en el item 11.1A.; el número total de placas será :

$\therefore \quad 650 \cdot 720 =$ **468 000** **RPTA. B**

11.3) LA PERMUTACION

Se denomina permutación de "m" elementos de un conjunto base a otro conjunto ordenado, cuyos elementos son grupos que involucran a los "m" elementos del conjunto base de tal modo que cada grupo se diferencia de otro solamente por el orden , o, disposición de sus elementos.

Matemáticamente : $\boxed{P_m = m\,!}$

P_m se lee : Permutación de "m" elementos

m = número de elementos del conjunto base

Ejemplo .- *¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse cuatro niños en una banca de cuatro asientos?*

Resolución.-

Dado que todos los niños (elementos) participan en el juego, y los grupos a formarse solo se diferenciaran por el orden de éstos, estamos frente a un caso de Permutación, que en este caso es de 4 elementos. Veamos :

$$\Rightarrow \quad P_4 = 4\,! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{\textbf{24 maneras}}$$

11.3A PERMUTACION CON REPETICION.

Dado un conjunto base con "m" elementos entre los cuales hay "α_1" de una misma clase, "α_2" de otra clase, α_3 de otra y así sucesivamente, denominamos permutación con repetición a las diferentes formas en que se pueden ordenar a estos "m" elementos, donde cada agrupación se diferencia de otra por el lugar que ocupan los elementos distintos.

Matemáticamente : $\boxed{P_m^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ldots\alpha_k} = \dfrac{m!}{\alpha_1!\,.\,\alpha_2!\,.\,\alpha_3!\ldots\,\alpha_k!}}$

donde :

m = número de elementos del conjunto base

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$ = número de elementos repetidos, tal que :

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_k = m$

Ejemplo .- *¿Cuántas palabras de seis letras se pueden formar con las letras de la palabra :* ***c a t i t a****?*

Resolución.-

A partir del enunciado el conjunto base tiene por elementos a las letras de la palabra **catita**, y de ella podemos reconocer que :

$m = 6$: número de elementos disponibles

$\alpha_1 = 1$: letra **c** una sola vez

$\alpha_2 = 2$: letra **a** dos veces

$\alpha_3 = 1$: letra **i** una sola vez

$\alpha_4 = 2$: letra **t** dos veces

Y de acuerdo con el ejercicio se pide calcular : $P_6^{1,2,1,2}$

Finalmente : $P_6^{1,2,1,2} = \dfrac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!} = \boxed{\textbf{180 palabras}}$

11.3B PERMUTACION CIRCULAR

Para calcular el número de permutaciones de "m" elementos de un conjunto base alrededor de un circulo, se deberá considerar a un elemento fijo de los "m" elementos dados, en consecuencia la relación matemática que permite calcular dicha permutación es :

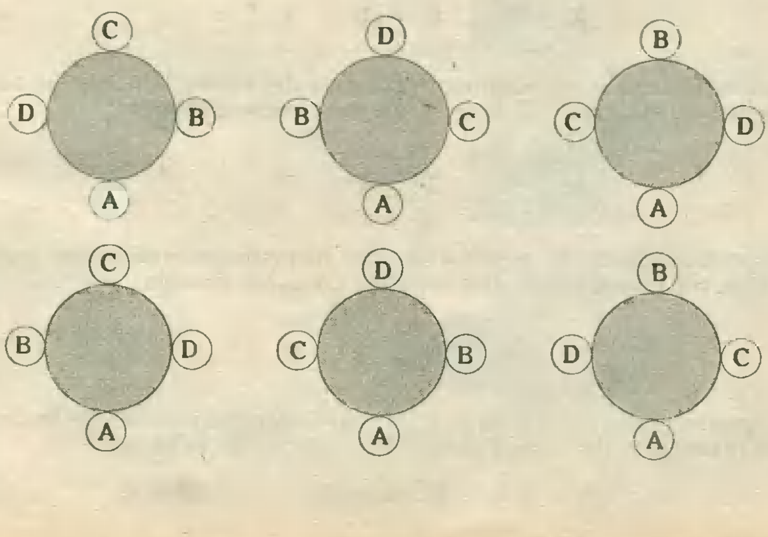
$$\boxed{P'_m = (m-1)!}$$

Ejemplo.- *¿De cuántas maneras pueden sentarse cuatro personas alrededor de una mesa circular?*

Resolución.-

Se pide calcular P'_4 es decir :

$$P'_4 = (4-1)! = 3! = \boxed{\textbf{6 maneras}}$$



PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

11.- En una final de competencia automovilística intervienen los cinco coches favoritos: A, B, C, D y E. ¿De cuántas maneras puede terminar la competencia? (no considerar los empates)

A) 120 B) 125 C) 625 D) 5 E) 20

Resolución.-

Al término de la competencia automovilística se podrá observar la siguiente ubicación :

1º	2º	3º	4º	5º

Debemos Observar que el número de maneras de terminar la competencia equivale al número de maneras de ordenar a los cinco coches según el esquema anterior, en donde cada grupo se diferenciará de otro, solo por el orden de sus elementos, entonces es evidente que estamos frente a un caso de Permutación de 5 elementos.

∴ Número de maneras que puede terminar la competencia :

$$P_5 = 5! = \mathbf{120}$$ **RPTA. A**

12.- Con respecto al problema anterior. ¿De cuántas maneras podrá terminar la competencia si el coche "B" llega inmediatamente después del coche "A"?

A) 120 B) 12 C) 24 D) 240 E) 36

Resolución.-

Un posible esquema que nos indica el enunciado será :

A	B	C	D	E

Como el coche "B" llega inmediatamente después del coche "A"podemos considerar la permutación de los elementos : AB, C, D y E, es decir cuatro elementos.

A	B	3ro	4to	5to

Debe observarse que en todos los grupos a formarse AB permanecen fijos entre si, pero pueden cambiar de lugar con relación a los otros 3 coches, como por ejemplo :

1ro	A	B	4to	5to

Finalmente, reconocemos que se trata de grupos de 4 elementos que se diferenciarán unos de otros solo por el orden, es decir es un caso de Permutación de 4 elementos :

$$P_4 = 4! = \mathbf{24\ maneras}$$ **RPTA. C**

13.- Dos varones y tres chicas van al cine y encuentran cinco asientos juntos en una misma fila donde desean acomodarse. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse, si las tres chicas no quieren estar una al costado de la otra?

A) 10 B) 16 C) 18 D) 15 E) 12 UNI 94

Resolución.-

Designemos con H a los varones y con M a las chicas ; de acuerdo al enunciado , la única manera de acomodarlos será según como muestra el siguiente esquema :

M	H	M	H	M

Primer Evento : Dado que las tres chicas participan en todos los grupos y solo se diferencian por su orden, encontraremos la permutación de 3 elementos :

$$P_3 = 3\,! = 6$$

Segundo Evento : Para encontrar las maneras distintas de ubicar a los dos varones aplicaremos :

$$P_2 = 2\,! = 2$$

Finalmente reconocemos que la realización de un evento no impide la realización del otro, por esta razón aplicaremos el principio expuesto en el Item 11.1A.; es decir, el número de maneras distintas de acomodar a los jóvenes estará dado por :

$$6 \cdot 2 = \boxed{12}$$ **RPTA. E**

14.- ¿De cuántas maneras se puede representar el número 9 como suma indicada de tres sumandos positivos y diferentes?

A) 21 B) 6 C) 18 D) 12 E) 28 UNI 94

Resolución.-

Desde que se nos pide presentar a 9 como una suma indicada, reconocemos que se trata de ordenar a tres elementos (sumandos) de tal modo que cada grupo se diferencie de otro solo por su orden ; esto significa que se trata de una Permutación. Ahora las ternas diferentes de números enteros y positivos cuya suma es 9 son :

I) $\{1; 2; 6\}$ número de maneras = $P_3 = 3\,! = 6$

II) $\{2; 3; 4\}$ número de maneras = $P_3 = 3\,! = 6$

III) $\{5; 3; 1\}$ número de maneras = $P_3 = 3\,! = 6$

Finalmente debemos reconocer que la ocurrencia de uno de los eventos analizados (I, II ó III) impide la ocurrencia de otro, por lo cual aplicaremos el principio expuesto en el Item 11.1B.

∴ El número total de maneras será : $6 + 6 + 6 = \boxed{18}$ **RPTA. C**

15.- ¿De cuántas maneras se pueden ubicar siete personas alrededor de una mesa redonda si dos de ellas no desean estar juntas?

A) 720 *B) 600* *C) 540* *D) 480* *E) 5 040*

Resolución.-

Sea M el número de formas en que las 7 personas pueden sentarse alrededor de la mesa y N el número de formas en que dichas personas se sientan de modo que A y B están juntas ; de este modo , el número de formas P en que las siete personas se pueden sentar alrededor de la mesa sin que dos de ellas estén juntas , viene dado por la siguiente relación :

$$P = M - N \qquad \dots (1)$$

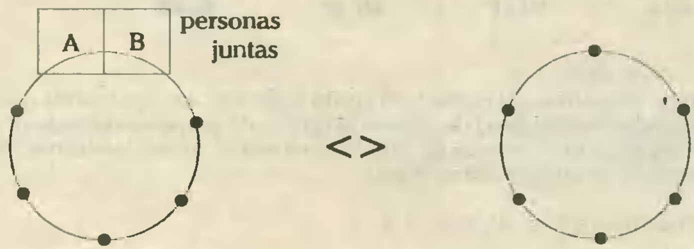
Primero hallaremos la permutación circular de las siete personas sin restricción alguna, para lo cual utilazremos la relación vista en el item 11.3B :

$$M = P'_7 = (7-1)! = 6! \quad \Rightarrow \quad M = 720 \qquad \dots (2)$$

En segundo lugar calcularemos la permutación circular de las siete personas considerando que dos de ellas permanecen juntas. Para ello emplearemos la siguiente estrategia :

Si consideramos a la pareja AB como un solo elemento, el número de maneras de ubicar a las siete personas alrededor de la mesa con la condición de que A y B estén juntas, será como permutar a 6 elementos, lo cual se podrá calcular por medio de la relación expuesta en el item 11.3B : P'_6. Sin embargo debemos reconocer que los mismos elementos "A" y "B" pueden permutar de 2 formas AB ó BA, por lo tanto, el número total N de formas en que todas las personas pueden sentarse tal que A y B esten juntas viene dado así :

$$N = 2P'_6 = 2 \cdot 5! = 2(120) = 240 \quad \dots (3)$$



Finalmente sustituiremos lo obtenido en (2) y (3) en la relación (1):

$$P = 720 - 240 = \mathbf{480}$$ **RPTA. D**

11.4) LA COMBINACION

Se denomina combinación de "m" elementos de un conjunto base a otro conjunto ordenado cuyos elementos son grupos que involucran a "n" elementos del conjunto base, de tal modo que cada grupo se diferencia de otro al menos en un elemento.

Matemáticamente : $$C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!\,.\,n!}$$

Combinaciones de "m" elementos tomados de "n" en "n" donde :

m = número de elementos del conjunto base

n = número de elementos de cada grupo

Asimismo se debe verificar que : $n \leq m$

Ejemplo .- *De un grupo de siete personas se desea seleccionar un comité que esté integrado por cuatro personas ¿De cuántas maneras se podrá hacer esto?*

Resolución.-

El ejercicio consiste en averiguar de cuántas formas diferentes se pueden agrupar a 4 elementos de un total de 7, esto significa que debemos determinar el número de combinaciones de siete elementos tomados de cuatro en cuatro; es decir :

$$C_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!\cdot 4!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} \Rightarrow C_4^7 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{4!}}$$

Finalmente : $C_4^7 = \boxed{\textbf{35 maneras}}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO IV)

16.- De cinco hombres y cuatro mujeres se debe escoger un comité de seis personas. ¿De cuántas maneras se podrá hacer esto si en el comité deben haber dos mujeres?

A) 30 *B) 36* *C) 42* *D) 25* *E) 45*

Resolución.-

Designemos con H a un hombre y con M a una mujer; luego por condición del problema se tiene :

Comité de seis personas :

M	M	H	H	H	H

1ro) Debemos constituir grupos diferentes de 2 mujeres de un total de 4 , es decir debemos realizar una combinación de 4 elementos tomados de 2 en 2 :

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{2!\,\cancel{2!}}$$

Número de grupos : $C_2^4 = 6$

2do) Constituiremos grupos diferentes de 4 hombres de un total de 5 ;esto significa que debemos encontrar el total de combinaciones 5 elementos tomados de 4 en 4 :

$$C_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!\,4!} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{1!\,\cancel{4!}}$$

Número de grupos : $C_4^5 = 5$

Finalmente reconocemos que uno de estos eventos no impide la realización del otro, luego por el principio expuesto en el Item 11.1A , el número de maneras de escoger un comité de seis personas (2 mujeres y 4 hombres) se obtendrá así :

$6 \cdot 5 =$ **30 maneras** **RPTA. A**

17.- De cinco físicos, 4 químicos y 3 matemáticos se tiene que escoger un comité de 6, de modo que se incluyan: 3 físicos, 2 químicos y 1 matemático. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

A) 180 B) 182 C) 190 D) 200 E) 360 UNI 78

<u>Resolución</u>.-

Designemos con F a los físicos, con Q a los químicos y con M a los matemáticos; según el enunciado se deduce que el comité está conformado así :

F	F	F	Q	Q	M

1ro) Escogeremos grupos diferentes de 3 físicos de un total de 5 , lo cual significa hacer combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3 :

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}}$$

número de grupos : $C_3^5 = 10$

2do) Escogeremos grupos diferentes de 2 Químicos de un total de 4 , esto significa hacer combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2 :

número de grupos : $C_2^4 = 6$

3ro) Finalmente , el número de grupos diferentes de 1 matemático de un total de 3 ,equivale a formar combinaciones de 3 elementos tomados de 1 en 1 :

número de grupos : $C_1^3 = 3$

Puesto que estos eventos no son excluyentes, aplicaremos el principio expuesto en el Item 11.1A. así; el número de maneras de escoger al mencionado comité viene dado por :

$$10 \cdot 6 \cdot 3 = \textbf{180 maneras}$$ **RPTA. A**

18.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa redonda de 4 asientos; si 4 están en espera?

A) 280 *B) 350* *C) 420* *D) 450* *E) 560*

Resolución.-

Según el enunciado podemos distinguir dos eventos : El primero será elegir a las personas que se han de sentar en la mesa y el Segundo será el de averiguar los distintos modos en que dicho grupo se podrá sentar alrededor de la mesa .Veamos :

1ro) Escogeremos a las 4 personas que se deben ubicar en la mesa de un total de 8. Esto significa realizar combinaciones de 8 elementos tomados de 4 en 4 :

$$C_4^8 = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot \cancel{4!}}$$

$$\text{Número de maneras} = C_4^8 = 70$$

Este resultados nos indica que podemos disponer de 70 grupos distintos de 4 personas c/u. para sentarse alrededor de la mesa.

Segundo Evento : Ahora se trata de ubicar a las 4 personas escogidas alrededor de la mesa circular; para lo cual aplicaremos la relación expuesta en el item 11.3B :

$$\text{Número de maneras} = (4 - 1)! = 6$$

Luego según el item 11.1A.; el número total de maneras diferentes será :

$$70 \cdot 6 = \textbf{420}$$ **RPTA. C**

19.- De 5 ingenieros y 4 médicos se desea escoger un grupo de 4 personas. ¿De cuántas maneras se podrá realizar esto, si en cada grupo debe haber a lo más 2 médicos?

A) 100 *B) 70* *C) 52* *D) 105* *E) 120*

Resolución.-

Por condición del problema podemos inferir que en el grupo escogido podrán estar presentes : 2 médicos, ó ,1 médico, ó , ningún médico. Este pequeño análisis nos permite reconocer la existencia de tres eventos diferentes, veamos :

1er) Grupos formados por 2 médicos y 2 ingenieros. El primero de estos grupos se obtiene por combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2; el segundo resulta de combinaciones de 5 elementos tomados de 2 en 2. Finalmente el número total de asociaciones que se pueden formar con estos dos grupos viene dado así :

$$\text{Número de grupos :} \; C_2^4 \,.\, C_2^5 = 6 \,.\, 10 = 60$$

2do) Grupos formados por 1 médico y 3 ingenieros. Estos grupos son combinaciones de 4 elementos tomados de 1 en 1 y de 5 elementos tomados de 3 en 3 respectivamente. A continuación el número total de asociaciones que se pueden formar con estos dos grupos viene dado así :

$$\text{Número de grupos} = C_1^4 \cdot C_3^5 = 40$$

3er) Grupos de 4 personas donde todos son ingenieros, es decir no hay médicos. Esto significa que el total de grupos con esta característica viene dado por las combinaciones que se pueden realizar con los 5 ingenieros tomados de 4 en 4 , veamos :

$$\text{Número de grupos} = C_4^5 = 5$$

Finalmente debemos reconocer que al elegir a uno de estos eventos los otros se verían impedidos de realizarse, por ello aplicaremos el principio expuesto en el item 11.1B; de este modo, el número de maneras de escoger al grupo estará dado así :

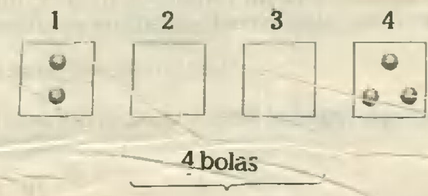
$$\therefore \quad 60 + 40 + 5 = \mathbf{105} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

20.- Se tiene 4 cajas en las cuales se deben colocar 9 bolas diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden colocar si en la primera caja se deben colocar 2 bolas, en la última 3 bolas y las restantes en las demás respectivamente?

A) 20 060 *B) 21 060* *C) 2 160* *D) 2 016* *E) 20 160*

Resolución.-

Hagamos la distribución de las 9 bolas en un esquema, tal como el mostrado en la figura adjunta :



Primer Evento : Escoger 2 bolas de un total de 9 para ubicarlas en la primera caja.

$$\text{Número de maneras} = C_2^9 = 36$$

Observar que ya se han distribuido 2 bolas, en consecuencia para un segundo evento el total de bolas será : 7.

Segundo Evento : Escoger 3 bolas de un total de 7; para ubicarlas en la cuarta caja

$$\text{Número de maneras} = C_3^7 = 35$$

Tercer Evento : Distribuir las 4 bolas restantes entre las cajas 2 y 3. Debemos observar que cada una de las 4 bolas se podrá ubicar de 2 maneras diferentes, una manera es colocándola en la caja 2 y la otra en la caja 3, luego :

$$\text{Número de maneras} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 bolas}} = 16$$

Finalmente, por el principio expuesto en el item 11.1A.; el número de maneras de realizar la operación pedida será :

$$36 \cdot 35 \cdot 16 = \mathbf{20\ 160} \qquad \textbf{RPTA. E}$$

Puesto que estos eventos no son excluyentes, aplicaremos el principio expuesto en el Item 11.1A. así; el número de maneras de escoger al mencionado comité viene dado por :

$$10 \cdot 6 \cdot 3 = \textbf{180 maneras}$$ **RPTA. A**

18.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa redonda de 4 asientos; si 4 están en espera?

A) 280 B) 350 C) 420 D) 450 E) 560

Resolución.-

Según el enunciado podemos distinguir dos eventos : El primero será elegir a las personas que se han de sentar en la mesa y el Segundo será el de averiguar los distintos modos en que dicho grupo se podrá sentar alrededor de la mesa .Veamos :

1ro) Escogeremos a las 4 personas que se deben ubicar en la mesa de un total de 8. Esto significa realizar combinaciones de 8 elementos tomados de 4 en 4 :

$$C_4^8 = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot \cancel{4!}}$$

Número de maneras $= C_4^8 = 70$

Este resultados nos indica que podemos disponer de 70 grupos distintos de 4 personas c/u. para sentarse alrededor de la mesa.

Segundo Evento : Ahora se trata de ubicar a las 4 personas escogidas alrededor de la mesa circular; para lo cual aplicaremos la relación expuesta en el item 11.3B :

Número de maneras $= (4 - 1)! = 6$

Luego según el Item 11.1.A.; el número total de maneras diferentes será :

$$70 \cdot 6 = \textbf{420}$$ **RPTA. C**

19.- De 5 ingenieros y 4 médicos se desea escoger un grupo de 4 personas. ¿De cuántas maneras se podrá realizar esto, si en cada grupo debe haber a lo más 2 médicos?

A) 100 B) 70 C) 52 D) 105 E) 120

Resolución.-

Por condición del problema podemos inferir que en el grupo escogido podrán estar presentes : 2 médicos, ó ,1 médico, ó , ningún médico. Este pequeño análisis nos permite reconocer la existencia de tres eventos diferentes, veamos :

1er) Grupos formados por 2 médicos y 2 ingenieros. El primero de estos grupos se obtiene por combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2; el segundo resulta de combinaciones de 5 elementos tomados de 2 en 2. Finalmente el número total de asociaciones que se pueden formar con estos dos grupos viene dado así :

Número de grupos : $C_2^4 \, . \, C_2^5 = 6 \, . \, 10 = 60$

2do) Grupos formados por 1 médico y 3 ingenieros. Estos grupos son combinaciones de 4 elementos tomados de 1 en 1 y de 5 elementos tomados de 3 en 3 respectivamente. A continuación el número total de asociaciones que se pueden formar con estos dos grupos viene dado así :

$$\text{Número de grupos} = C^4_1 \cdot C^5_3 = 40$$

3er) Grupos de 4 personas donde todos son ingenieros, es decir no hay médicos. Esto significa que el total de grupos con esta característica viene dado por las combinaciones que se pueden realizar con los 5 ingenieros tomados de 4 en 4 , veamos :

$$\text{Número de grupos} = C^5_4 = 5$$

Finalmente debemos reconocer que al elegir a uno de estos eventos los otros se verían impedidos de realizarse, por ello aplicaremos el principio expuesto en el item 11.1B; de este modo, el número de maneras de escoger al grupo estará dado así :

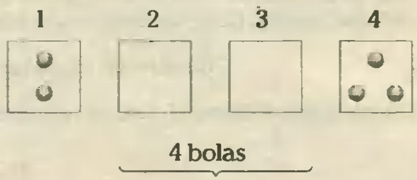
$\therefore$ $60 + 40 + 5 = \mathbf{105}$ **RPTA. D**

20.- Se tiene 4 cajas en las cuales se deben colocar 9 bolas diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden colocar si en la primera caja se deben colocar 2 bolas, en la última 3 bolas y las restantes en las demás respectivamente?

A) 20 060 ***B) 21 060*** ***C) 2 160*** ***D) 2 016*** ***E) 20 160***

Resolución.-

Hagamos la distribución de las 9 bolas en un esquema, tal como el mostrado en la figura adjunta :



Primer Evento : Escoger 2 bolas de un total de 9 para ubicarlas en la primera caja.

$$\text{Número de maneras} = C^9_2 = 36$$

Observar que ya se han distribuido 2 bolas, en consecuencia para un segundo evento el total de bolas será : 7.

Segundo Evento : Escoger 3 bolas de un total de 7; para ubicarlas en la cuarta caja.

$$\text{Número de maneras} = C^7_3 = 35$$

Tercer Evento : Distribuir las 4 bolas restantes entre las cajas 2 y 3. Debemos observar que cada una de las 4 bolas se podrá ubicar de 2 maneras diferentes, una manera es colocándola en la caja 2 y la otra en la caja 3, luego :

$$\text{Número de maneras} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\ \text{bolas}} = 16$$

Finalmente, por el principio expuesto en el item 11.1A.; el número de maneras de realizar la operación pedida será :

$36 \cdot 35 \cdot 16 = \mathbf{20\ 160}$ **RPTA. E**

Finalmente aplicando el principio expuesto en el Item 11.1A.; se tendrá que el número de maneras de seleccionar el comité de 10 personas viene dado así :

$$N = 10 \cdot 35 \cdot 20 = \mathbf{7\,000} \qquad \textbf{RPTA. A}$$

26.- Se va a colorear un mapa de cuatro países, con colores diferentes para cada país, si hay disponibles 6 colores diferentes ¿De cuántas maneras puede colorearse el mapa?

A) 120 *B) 360* *C) 320* *D) 720* *E) 144*

Resolución.-

Observamos que la condición del problema nos induce a seleccionar los colores (elementos) teniendo en cuenta su orden y así mismo reconocemos que un mapa se diferenciará de otro también en al menos uno de sus colores. Estas son las características que poseen todas las agrupaciones que provienen de las Variaciones. Por tal razón encontraremos las variaciones de 6 elementos tomados de 4 en 4, veamos :

$$V_4^6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \textbf{360 maneras} \qquad \textbf{RPTA. B}$$

27.- Hay 6 buses que viajan entre el pueblo "A" y el pueblo "B" ¿De cuántas maneras una persona puede ir del pueblo "A" hasta el pueblo "B" y luego regresar en un bus diferente?

A) 6 *B) 5* *C) 30* *D) 20* *E) 12*

Resolución.-

La persona para ir de "A" hasta "B" puede utilizar cualquiera de los 6 buses, es decir, dicha persona dispone de 6 maneras diferentes de ir y para regresar podrá utilizar cualquiera de los 5 buses restantes, es decir, se dispone de 5 maneras diferentes para regresar (por condición del problema no se puede utilizar el mismo bus para el regreso). Es evidente que para encontrar el número de formas diferentes para realizar dicho viaje se deberá emplear el principio expuesto en el Item 11.1A :

$$\text{Número de maneras} = 6 \cdot 5 = \mathbf{30} \qquad \textbf{RPTA. C}$$

28.- ¿De cuántas maneras puede seleccionarse una partida de naipes de 4 o más personas si hay 10 disponibles?

A) 846 *B) 484* *C) 468* *D) 848* *E) 849*

Resolución.-

Puesto que cada grupo de jugadores se diferenciará de otro en por lo menos uno de ellos, estamos frente a un caso de combinaciones de 10 elementos tomados como mínimo de 4 en 4. Esto significa que deberán encontrarse todas las combinaciones posibles con grupos de : 4; 5; 6; 7; 8; 9; é incluso 10 personas. Ante tal situación reconocemos la existencia de 7 eventos diferentes de combinaciones :

$$C_4^{10}\ ,\ C_5^{10}\ ,\ C_6^{10}\ ,\ C_7^{10}\ ,C_8^{10}\ ,\ C_9^{10}\ ,\text{y}\ ,\ C_{10}^{10}$$

Dado que la realización de cualquiera de estos eventos impediría la realización de cualquier otro, aplicaremos el principio expuesto en el Item 11.1B; se tendrá :

$$\text{Número de maneras} = C_4^{10} + C_5^{10} + \ldots + C_{10}^{10} = \quad \mathbf{848} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

29.- En un ómnibus que posee 37 asientos que se presentan en 8 filas de 4 asientos cada una, con un pasillo en el medio y al final 5 asientos juntos, se desean ubicar a 25 pasajeros ¿De cuántas formas se pueden ubicar a dichos pasajeros?

A) C_{27}^{35} *B)* P_{27} *C)* V_{25}^{37} *D)* C_{25}^{37} *E)* P_{25}

Resolución.-

Debemos reconocer que los elementos a seleccionar son los asientos, los mismos que serán elegidos de 25 formas distintas, dado que se dispone de 25 pasajeros. Puesto que cada grupo constituído por 25 asientos ocupados, se diferenciará de otro por la ubicación de los mismos o en por lo menos uno de ellos, reconocemos que estamos frente a un caso de Variación. Según datos del problema debemos encontrar todas las variaciones posibles de 37 elementos tomados de 25 en 25, es decir :

$$\text{Número de maneras} = V_{25}^{37} \qquad \textbf{RPTA. C}$$

30.- En el problema anterior. ¿De cuántas formas se pueden ubicar los pasajeros si deciden no ocupar los últimos 5 asientos?

A) C_{27}^{30} *B)* P_{27} *C)* V_{25}^{32} *D)* C_{25}^{32} *E)* V_{20}^{32}

Resolución.-

En este caso reconocemos que al no ocuparse 5 asientos nos quedarán 32 asientos los mismos que deberán ser ocupados por 25 pasajeros. Luego procediendo del mismo modo que en el caso anterior, tendremos que :

$$\text{Número de maneras} = V_{25}^{32} \qquad \textbf{RPTA. C}$$

31.- 3 alumnos del 2do año de secundaria llegan a matricularse a un colegio, que dispone de 8 aulas para dar cabida a los alumnos de dicho grado ¿De cuántas maneras se les puede distribuir a los mencionados alumnos de modo que siempre ocupen aulas diferentes?

A) 6 *B) 56* *C) 48* *D) 320* *E) 336*

Resolución.-

En base al análisis descrito en el problema 29, estamos frente a un caso de selección de 8 elementos (aulas), tomadas de 3 en 3 (alumnos). Puesto que cada grupo elegido se diferencia de otro por el orden y por sus elementos, aplicaremos la relación vista en el item 11.2 :

$$V_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}$$

$V_3^8 =$ **336 maneras** **RPTA. E**

32.- ¿Cuántas comisiones integradas por un niño y una niña pueden formarse de 5 niños y 8 niñas, si cierto niño rehusa trabajar con dos de las niñas?

A) 40 ***B) 42*** ***C) 38*** ***D) 36*** ***E) 32***

Resolución.-

Hallemos el número de comisiones que se pueden formar sin importar de que cierto niño rehuse trabajar con dos niñas.

De 5 niños escogemos 1; así : C_1^5

De 8 niñas escogemos 1; así : C_1^8

Por el principio expuesto en el Item 11.1A; se tendrá :

Número de comisiones = $C_1^5 \cdot C_1^8 = 5 \cdot 8 = 40$

No olvidar que aquí (en las 40 comisiones que se pueden formar) están incluidas aquellas comisiones que están formadas por el niño que rehusa trabajar con las dos niñas.

Ahora hallemos las combinaciones del niño con las dos niñas.

Número de comisiones = $C_1^1 \cdot C_1^2 = 2$

Notar que según el enunciado del ejercicio, estas 2 comisiones no deben estar consideradas.

Finalmente el número de comisiones pedidas será :

$40 - 2 =$ **38** **RPTA. C**

33.- Un grupo está formado por 5 personas y desean formar una comisión integrada por presidente y secretario. ¿De cuántas maneras puede nombrarse ésta comisión?

A) 10 ***B) 20*** ***C) 15*** ***D) 25*** ***E) 30***

Resolución.-

El presidente puede ser escogido de 5 maneras (pues hay 5 personas).

El secretario puede ser escogido de 4 maneras (pues de las 5 personas; al escoger una para presidente, solo quedarían 4 personas para ser escogidos como secretarios).

Finalmente por el principio expuesto en el Item 11.1A.; se tendrá :

Número de maneras = $5 \cdot 4 =$ **20** **RPTA. B**

34.- Una chica tiene 10 amigos, desea invitar a una reunión solo a 3 de ellos. ¿De cuántas maneras puede invitar, si entre las 10 personas hay 2 matrimonios y cada pareja asisten juntas?

A) 120 B) 20 C) 12 D) 32 E) 60

Resolución.-

$$\text{Número de personas} = 10 \begin{cases} 2 \text{ matrimonios (4 personas)} \\ 6 \text{ personas} \quad \text{(sin pareja)} \end{cases}$$

Como solo debe invitar a 3 personas, consideremos los siguientes casos :

I) Invita a una pareja (2 personas) y una persona.

II) No invita a ninguna pareja (3 personas).

Ahora hallemos el número de maneras para cada caso :

Para (I) : $C_1^2 \,.\, C_1^6 = 12$

Para (II) : $C_3^6 = 20$

Finalmente por el principio expuesto en el Item 11.1B; se tendrá :

Número de maneras = 12 + 20 = **32** **RPTA. D**

35.- Un estudiante tiene 10 libros de matemática y el otro tiene 8 libros de física. ¿De cuántas formas pueden intercambiar dos libros de uno por dos del otro?

A) 1 260 B) 620 C) 540 D) 840 E) 1 620

Resolución.-

Hallemos el número de maneras de escoger 2 libros de cada materia.

Para matemática : C_2^{10}

Para física : C_2^8

Finalmente por el principio expuesto en el Item 11.1A; el número de formas pedido será :

$C_2^{10} \,.\, C_2^8 = 45 \cdot 28 =$ **1 260** **RPTA. A**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- La teoría combinatoria se cimienta en : .... principios fundamentales.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2.- Si Carlitos puede ir a su escuela en bicicleta o en bus, la cantidad de maneras diferente en que puede ir a su escuela se calculan por :

A) El principio fundamental de la multiplicación.

B) La permutación.

C) La variación.

D) El principio fundamental de la adición.

E) N.A.

3.- En la variación y en la permutación siempre:

A) Interesa el orden de los elementos.

B) Intervienen todos los elementos.

C) Se consiguen igual resultado.

D) Interesa la cantidad de elementos.

E) Se consigue agrupaciones repetidas.

4.- Una combinación se distingue de una variación pues a la 1ra no le interesa .... mientras que a la 2da si le interesa ....

A) El orden, el orden

B) El grupo ; el grupo

C) La cantidad de elementos ; la cantidad de elementos

D) El orden ; el grupo

E) Agrupar ; agrupar

5.- En una permutación :

A) Solo intervienen 2 elementos del conjunto base.

B) Solo intervienen 5 elementos del conjunto base.

C) Intervienen todos los elementos del conjunto base.

D) A veces intervienen todos los elementos del conjunto base.

E) N.A.

6.- Se dice que dos eventos son excluyentes si:

A) Ocurren a la vez

B) Ocurren uno a continuación del otro

C) Jamás ocurren en forma simultánea

D) Si uno de ellos ocurre el otro deja de ocurrir

E) N.A.

7.- Dadas las agrupaciones :

ab ; ac ; bc ; ba ; ca ; cb , es correcto :

A) Existen 6 combinaciones

B) Existen 3 variaciones

C) Existen 3 permutaciones

D) Existen 3 combinaciones

E) Existen 6 permutaciones

8.- Si nos aseguran que tenemos 3 grupos diferentes constituídos asi : abc ; acb $\wedge$ bac; podemos deducir que estamos frente a :

A) Una combinación

B) Una variación

C) Una permutación lineal

D) Una permutación circular

E) N.A.

9.- ¿Cuántas permutaciones se pueden formar con las letras : a , b $\wedge$ c ?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 12 E) N.A.

10.- ¿Cuántas variaciones binarias se pueden formar con las letras : a , b , c , d $\wedge$ e ?

A) 5 B) 10 C) 16 D) 20 E) 25

11.- ¿Cuántas combinaciones de 3 elementos conseguimos con los elementos : a , b $\wedge$ c ?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 1 E) N.A.

12.- En una permutación circular :

A) Se presentan sólo 2 agrupaciones posibles.

B) No se considera a ningún elemento fijo.

C) Se considera a un elemento fijo.

D) El resultado es igual al de una permutación lineal.

E) Dos elementos determinados permanecen fijos.

13.- Si del pueblo "A" conducen 3 camiones hasta el pueblo "B", y de éste último pueblo conducen 4 camiones a un tercer pueblo "C". ¿Cuántos caminos diferentes conducen desde "A" hasta "C" pasando por "B" ?

A) 7 B) 12 C) 9 D) 15 E) 1

14.- La alternativa correcta del problema anterior se obtuvo utilizando :

A) El principio fundamental de la adición

B) El principio fundamental de la multiplicación

C) La permutación

D) La variación

E) A $\vee$ B.

15.- En el enunciado "realizar un viaje a Cañete por vía terrestre, vía aérea o vía marítima"; distinguimos :

A) 1 evento B) 2 eventos C) 3 eventos

D) 4 eventos E) 5 eventos

16.- ¿Cuántas banderas bicolores distintas podemos formar usando los colores del arco iris?

A) 49 B) 42 C) 36 D) 7 E) 35

17.- Cierta juguería ofrece 3 tipos de jugos y 4 tipos diferentes de kekes. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá elegir un jugo y un keke?

A) 7 B) 9 C) 16 D) 12 E) 8

18.- Se lanza cinco veces una moneda. ¿Cuántos resultados diferentes pueden producirse?

A) 5 B) 10 C) 32 D) 25 E) 36

19.- ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 6 personas en una fila de 6 asientos?

A) 500 B) 840 C) 36 D) 120 E) 720

20.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 3 niños y 3 niñas en una banca, si tanto los niños como las niñas deben estar juntos entre sí?

A) 40 B) 72 C) 84 D) 95 E) 55

21.- Con las letras de la palabra **l a d r ó n**. ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar?

A) 350 B) 320 C) 360 D) 250 E) 240

22.- Del problema anterior. ¿Cuántas palabras empiezan por vocal y terminan también en vocal?

A) 28 B) 41 C) 24 D) 45 E) 25

23.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar cuatro personas alrededor de una mesa circular?

A) 24 B) 32 C) 4 D) 9 E) 6

24.- ¿Cuántos grupos de 7 miembros se pueden formar con 6 hombres y 5 mujeres, de manera que en cada grupo se encuentren 4 hombres?

A) 120 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

25.- ¿Cuántos elementos deberán considerarse para que con ellos podamos formar tantas variaciones binarias como combinaciones terciarias?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

26.- ¿De cuántas maneras se pueden elegir dos o más camisas de entre una colección de 7?

A) 128 B) 31 C) 63 D) 127 E) 120

27.- Determinar el número de triángulos diferentes que se pueden formar uniendo los cinco vértices de un pentágono.

A) 3 B) 20 C) 10 D) 12 E) 6

NIVEL B

28.- Las letras: A, B, C y D; son escritas una por una en cuatro tarjetas. ¿Cuántos códigos pueden formarse con estas tarjetas; si cada código puede llevar indistintamente una, dos, tres o cuatro letras?

A) 64 B) 60 C) 90 D) 24 E) 120

29.- Hay 8 candidatos para un concurso de historia, 7 para un concurso de matemática y 4 para uno de ciencias naturales. ¿De cuántas maneras pueden elegirse los concursantes?

A) 180 B) 196 C) 124 D) 224 E) 240

30.- ¿Cuántos números de tres cifras emplean por lo menos una vez la cifra 6 en su escritura?

A) 648 B) 810 C) 213 D) 699 E) 310

31.- ¿Cuántas señales se pueden hacer con 4 banderas de diferentes colores izando cada vez 2; 3 ó 4 banderas?

A) 90 B) 120 C) 80 D) 60 E) 150

32.- ¿Qué valor entero y positivo de "*n*" verifica: $V_4^n = 20\,V_2^n$

A) 6 B) 9 C) 7 D) 5 E) 8

33.- En una biblioteca hay 2 libros de matemática y 6 libros de historia. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un estante los libros en grupos de 5 de los cuales 3 sean de matemáticas y 2 de historia?

A) 10 800 B) 3 120 000 C) 1 440 000
D) 720 000 E) 2 052 000

34.- Tres viajeros llegan a una ciudad en la que hay 4 hoteles, si deben alojarse en hoteles distintos. ¿De cuántas maneras distintas pueden ocupar dichos hoteles?

A) 24 B) 32 C) 48 D) 61 E) 128

35.- ¿De cuántas maneras pueden distribuirse entre 9 personas, 3 medallas de oro, 2 de plata y 4 de bronce (en ese orden); si a cada persona le corresponde una medalla?

A) 240 B) 1 260 C) 1 200
D) 780 E) 1 620

36.- De un grupo de 7 hombres y 5 mujeres. ¿Cuántos comités de 6 personas se pueden formar; si cada comité debe tener por lo menos 3 hombres?

A) 350 B) 700 C) 812 D) 1 624 E) 406

37.- Hay 9 puntos en el espacio de los cuales no hay cuatro que están en un mismo plano, con excepción de cinco de ellos que están todos en un mismo plano. ¿Cuántos planos distintos estarán determinados por los 9 puntos?

A) 75 B) 84 C) 60 D) 35 E) 85

38.- Un equipo científico consta de 25 miembros de los cuales 4 son doctores; hallar el número de grupos de 3 miembros que se pueden formar, de manera que en cada grupo haya por lo menos un doctor.

A) 1 200 B) 1 020 C) 840
D) 970 E) 810

39.- Se tiene 2 bolas diferentes y dos urnas. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 12 bolas en una de ellas y 8 en la otra?

A) 125 970 B) 210 000 C) 125 200
D) 90 600 E) 72 480

40.- Se desea formar un comité de 3 peruanos y 3 argentinos y hay elegibles 8 peruanos y 6 argentinos. ¿De cuántas maneras puede formarse el comité?

A) 1 160 B) 1 120 C) 2 040
D) 2 200 E) 960

NIVEL C

41.- Se tiene 9 libros de álgebra que van a ser distribuidos entre los alumnos : A, B y C; tocándole a cada uno de ellos 3 libros, si la distribución se debe hacer en el orden dado. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

A) 1 260 B) 1 240 C) 1 460
D) 1 680 E) 1 820

42.- Seis personas entran en un salón de belleza en la que hay ocho sillas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse?

A) 336 B) 60 C) 20 160
D) 6 720 E) 20 610

43.- El capitán de una compañía del ejército solicita: 4 soldados y dos oficiales. Si se presentan: 7 soldados y cinco oficiales. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá atender dicha solicitud?

A) 280 B) 350 C) 35 D) 21 E) 210

44.- Una persona está interesada en comprar 4 camisas y 3 pantalones pero solamente puede comprar 2 camisas y 2 pantalones. ¿De cuántas maneras diferentes podrá elegir las prendas?

A) 12 B) 24 C) 18 D) 120 E) 200

45.- De un grupo de 9 personas: 5 varones y 4 mujeres. ¿Cuántos comités de 4 personas se podrán formar, tal que siempre, en cada comité haya 2 varones?

A) 12 B) 60 C) 70 D) 36 E) 100

46.- ¿De cuántas formas se pueden ordenar los siguientes cubos de diversos colores de un juego, si se tiene 2 rojos, 3 verdes y 2 azules?

A) 7 B) 21 C) 12 D) 17 E) 24

47.- El número de combinaciones de "n" objetos tomados de 3 en 3 están con el número de variaciones de los mismos objetos formados de 2 en 2 en la relación 1/2. Halle el valor de "n".

A) 15 B) 8 C) 10 D) 12 E) 5

48.- En un plano se marcan 12 puntos de los cuales 5 están sobre una misma recta. ¿Cuántos triángulos pueden ser formados uniéndose 3 cualesquiera de esos puntos?

A) 70 B) 105 C) 175 D) 140 E) 210

49.- ¿De cuántos modos diferentes puedo colocar 7 libros en un estante, si deseo que 2 de esos libros estén siempre juntos?

A) 240 B) 720 C) 256 D) 1 440 E) 360

50.- Un vendedor está a punto de visitar a 5 de sus clientes. ¿De cuántas maneras puede hacer esa serie de visitas, si se hace 3 en un día y 2 al día siguiente?

A) 12 B) 5 C) 6 D) 120 E) 36

51.- Se tiene un lote de 6 piezas, de los cuales 3 son defectuosas. ¿De cuántas maneras podemos escoger un lote de 4 piezas, de tal modo que 2 sean defectuosas?

A) 9 B) 19 C) 12 D) 20 E) 18

52.- Se compra 6 piezas mecánicas. ¿De cuántas maneras se puede repartir, si hay 4 talleres recibiendo 2 de ellos dos piezas y los otros una sola?

A) 720 B) 360 C) 180 D) 24 E) 72

53.- Se dispone de 3 caracteres de imprenta: 2; 5; 7 y se forman todos los números de 2 cifras diferentes. Calcular la suma de cifras de todos esos números.

A) 84 B) 56 C) 60 D) 420 E) 140

54.- Sobre 20 personas, 10 leen una revista "A", 8 leen una revista "B" y 3 leen las dos revistas. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 personas entre las 20 si de entre ellas por lo menos 3, leen la revista "A"?

A) 5 680 B) 9 556 C) 9 856
D) 9 240 E) 7 752

55.- Una asociación con 20 socios, de los cuales 12 son hombres y 8 son mujeres, desean formar un comité de 5 personas en el que debe haber al menos 2 hombres y 2 mujeres; calcular: ¿De cuántas maneras se puede formar el comité si 2 de los hombres se niegan a formar parte del mismo?

A) 5 680 B) 5 160 C) 9 850
D) 5 880 E) 1 400

12 Cálculo de Probabilidades

El cálculo de probabilidades es un conjunto de reglas que permiten determinar el porcentaje de posibilidades de que un suceso se realice.

12.1) EXPERIMENTO ALEATORIO (E)

Recibe este nombre cualquier suceso o dato estadístico cuyo resultado no puede predecirse antes de efectuarse. Veamos los siguientes ejemplos :

1) E_1 : Lanzar una moneda y observar su cara superior.

2) E_2 : Lanzar un dado y observar el número que aparece en su cara superior.

3) E_3 : Designar un delegado de un grupo de 40 personas.

12.2) ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Es el conjunto cuyos elementos son todos los resultados posibles que puede tener un experimento aleatorio.

Para los experimentos expuestos en el item anterior, tendremos :

1) Sean : c = cara , y , s = sello , entonces el espacio muestral del experimento E_1 viene dado así :

$$\Omega_1 = \{c \,; s\} \quad \Rightarrow \quad n(\Omega_1) = 2$$

Donde $n(\Omega_1)$ representa el número de elementos del espacio muestral Ω_1

2) Reconociendo que los dígitos que aparecen sobre las caras de un dado van del 1 al 6, deducimos el espacio muestral para el experimento E_2 :

$$\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad \Rightarrow \quad n(\Omega_2) = 6$$

3) Para el experimento E_3 el espacio muestral lo representaremos así :

$$\Omega_3 = \{a_1; a_2; a_3; \ldots a_{40}\}$$

Donde a_k indica a una persona, tal que : $1 \leq k \leq 40$; siendo $k \in \mathbb{N}$

$$\therefore \quad n(\Omega_3) = 40$$

12.3 EVENTO

Se denomina así a cualquier subconjunto del espacio muestral, el cual se representará por las letras mayúsculas : $A, B, C, ...$ etc. Para los experimentos expuestos anteriormente tenemos :

1) Del espacio muestral Ω_1 , se tiene el siguiente evento :

A_1 : Lanzar una moneda y que el resultado de la cara superior sea sello (s).

$\Rightarrow \quad A_1 = \{s\}$; de este modo podemos notar que : $A_1 \subset \Omega_1$

2) Del espacio muestral Ω_2 , se tiene el siguiente evento :

A_2 : Lanzar un dado y que el resultado de la cara superior sea un número primo.

$\Rightarrow \quad A_2 = \{2; 3; 5\}$; de este modo podemos notar que : $A_2 \subset \Omega_2$

12.3A EVENTO SEGURO.

Se denomina así al evento que es igual a su espacio muestral :

$$A = \Omega \quad \wedge \quad n(A) = n(\Omega)$$

12.3B EVENTO POSIBLE.

Se denomina así al evento que está incluido en su espacio muestral :

$$A \subset \Omega \quad \wedge \quad n(A) \leq n(\Omega)$$

12.3C EVENTO IMPOSIBLE.

Un evento recibe este nombre cuando resulta ser un conjunto vacío :

$$A \not\subset \Omega \quad \wedge \quad n(A) = 0$$

Ejemplo.- *Para el experimento «Lanzar un dado y observar el resultado que aparece en su cara superior», definimos los siguientes eventos :*

A_1 : Obtener un número par.

A_2: Obtener un número mayor que siete.

A_3: Obtener un número entero positivo menor o igual que seis.

Luego ¿cuáles de estos eventos sera : Seguro, Posible o Imposible, respectivamente?.

Resolución.-

El espacio muestral para éste experimento será : $\Omega = \{1; 2, 3; 4; 5; 6\}$

A partir de este conjunto deduciremos los eventos mencionados en el problema :

a) $A_1 = \{2; 4; 6\} \quad \Rightarrow \quad A_1 \subset \Omega$, luego se trata de un **evento posible.**

b) $A_2 = \{\ \} \quad \Rightarrow \quad A_2 \not\subset \Omega$, luego se trata de un **evento imposible.**

c) $A_3 = \{6; 5; 4; 3; 2; 1\} \quad \Rightarrow \quad A_3 = \Omega$, luego se trata de un **evento seguro.**

12.4) ALGEBRA DE EVENTOS

Dos o más eventos pueden asociarse para formar nuevos eventos utilizando las diferentes operaciones con conjuntos.

Si A y B son dos eventos incluidos en un mismo espacio muestral, podemos definir a los siguientes eventos :

a) $A \cup B$: Es el evento que sucede si y solo si A, ó , B, o ,ambos suceden. Esto significa que el evento $A \cup B$ sucede si al menos uno de sus eventos componentes sucede.

b) $A \cap B$: Es el evento que sucede si y solo si A y B suceden a la vez. Esto significa que el evento $A \cap B$ sucede si sus eventos componentes suceden simultáneamente.

c) $A' = A^c = \overline{A}$ es la notación empleada para designar al complemento de A, a quien también se le llamará *Evento Contrario*. A' es el evento que sucede si y solo si el evento A no sucede.

Para la resolución de algunos ejercicios será necesario conocer las siguientes leyes de Morgan :

I) $(A \cup B)' = (A \cup B)^c = \left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$

II) $(A \cap B)' = (A \cap B)^c = \left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Considere el experimento que consiste en lanzar un dado o una moneda. Luego de encontrar su espacio muestral ¿indicar cuántos elementos posee?

A) 2 *B) 6* *C) 8* *D) 12* *E) N.A.*

Resolución.-

Sean los experimentos : E_1 y E_2; que poseen a Ω_1 y Ω_2 como sus espacios muestrales respectivamente, tales que :

E_1 : Lanzar un dado $\Rightarrow \Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

E_2 : Lanzar una moneda $\Rightarrow \Omega_2 = \{c ; s\}$

Puesto que el experimento consiste en lanzar un dado o una moneda, de acuerdo con el item 12.4a estamos frente a un caso de reunión de eventos : $E_1 \cup E_2$

Por esta razón el espacio muestral para este experimento será la unión de Ω_1 y Ω_2 , es decir : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; c; s\}$

Finalmente; se observa que el número de elementos del espacio muestral pedido es :

$$n(\Omega) = 8$$

RPTA. C

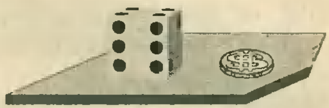
2.- ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral asociado al siguiente experimento: se lanzan una moneda y un dado simultáneamente y se observan las caras superiores?

A) 2 ***B) 6*** ***C) 8*** ***D) 12*** ***E) 64***

Resolución.-

Para poder reconocer a todos los elementos del espacio muestral de este experimento, utilizaremos la tabla de doble entrada donde la 1ra fila nos indica el evento de lanzar un dado y la 1ra columna nos señala el evento de lanzar una moneda. Veamos :

Dado / Moneda	1	2	3	4	5	6
c	c ; 1	c ; 2	c ; 3	c ; 4	c ; 5	c ; 6
s	s ; 1	s ; 2	s ; 3	s ; 4	s ; 5	s ; 6



Luego el espacio muestral para este experimento será el conjunto formado por todas las combinaciones obtenidas en el cuadro, esto es :

$\Omega = \{(c\,;1), (c\,;2), (c\,;3), (c\,;4), (c\,;5), (c\,;6), (s\,;1), (s\,;2), (s\,;3), (s\,;4), (s\,;5), (s\,;6)\}$

Finalmente; se observa que el número de elementos del espacio muestral es :

$$n(\Omega) = 12$$ **RPTA. D**

3.- ¿Cuántos elementos tiene el evento que consiste en obtener una puntuación mayor que ocho del siguiente experimento: Se lanzan dos dados simultáneamente y se observan las caras superiores?

A) 10 ***B) 16*** ***C) 24*** ***D) 12*** ***E) 18***

Resolución.-

Mediante una tabla de doble entrada encontraremos el espacio muestral que le corresponde a este experimento.

De acuerdo con la condición del problema los elementos del evento pedido (A), son todos los que se encuentran en los recuadros sombreados, es decir, aquellos pares de resultados cuya suma es mayor que 8; luego :

1ro Dado / 2do Dado	1	2	3	4	5	6
1	1 ; 1	1 ; 2	1 ; 3	1 ; 4	1 ; 5	1 ; 6
2	2 ; 1	2 ; 2	2 ; 3	2 ; 4	2 ; 5	2 ; 6
3	3 ; 1	3 ; 2	3 ; 3	3 ; 4	3 ; 5	3 ; 6
4	4 ; 1	4 ; 2	4 ; 3	4 ; 4	4 ; 5	4 ; 6
5	5 ; 1	5 ; 2	5 ; 3	5 ; 4	5 ; 5	5 ; 6
6	6 ; 1	6 ; 2	6 ; 3	6 ; 4	6 ; 5	6 ; 6

$A = \{(3;6), (4;5), (4;6), (5;4), (5;5), (5;6), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6)\}$

Finalmente : $n(A) = 10$ **RPTA. A**

4.- Para el siguiente experimento «Lanzar tres dados y dos monedas», determinar ¿Cuántos elementos tiene el evento: Obtener igual resultado en cada moneda y que la suma de la puntuación de los tres dados sea 17?

A) 12 *B) 6* *C) 18* *D) 72* *E) 36*

Resolución.-

En el problema reconocemos dos eventos : El lanzamiento de los dados y el lanzamiento de las monedas, por tal razón analizaremos cada evento por separado para luego aplicar el Principio Multiplicativo visto en el Cap.11, dado que dichos eventos se realizan sin que ninguno impida la realización del otro. Veamos :

a) El lanzamiento de los dados (A).- Según condición del problema, se debe tener una puntuación de 17, y ello solo podrá ocurrir si las caras de los dados dan : 6; 6 y 5 . De este modo, todas las maneras posibles en que ellos puedan ocurrir constituirán el espacio muestral del evento A :

$$A = \{(6;6;5), (6;5;6), (5;6;6)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

b) El lanzamiento de las monedas (B).- Según condición del problema, se debe apreciar el mismo resultado en cada moneda lanzada, es decir las dos dan cara (c) , o , las dos dan sello (s) , luego el espacio muestral de B es así :

$$B = \{(c;c), (s;s)\} \Rightarrow n(B) = 2$$

Finalmente, el número total del maneras diferentes en que pueden ocurrir los eventos A y B ($A \cap B$) de modo simultáneo, viene dado así :

$$n(A \cap B) = n(A) \,.\, n(B) = 3 \,.\, 2$$

$\therefore \quad n(A \cap B) = 6$ **RPTA. B**

5.- Se tiene una caja con 10 artículos diferentes, si el experimento consiste en extraer tres artículos de uno en uno. ¿Cuántos elementos tiene su espacio muestral?

A) 120 *B) 240* *C) 360* *D) 720* *E) 540*

Resolución.-

Nuestro problema se reduce a encontrar las maneras distintas en que podemos sacar 3 artículos de uno en uno, de un total de 10. Esto nos induce a pensar que tenemos tres eventos distintos que se realizan simultáneamente, es decir en un mismo experimento. Veamos :

a) Extracción del primer artículo (A).- En este evento se dispone de 10 artículos, por lo tanto existen 10 maneras diferentes de extraer uno de ellos :

$$\Rightarrow n(A) = 10$$

b) Extracción del segundo artículo (B) .- Ahora se dispone de 9 artículos, dado que el primera ya se extrajo. Por lo tanto, existen 9 maneras distintas de extraer un artículo, luego :

$$\Rightarrow n(B) = 9$$

c) Extracción del tercer artículo (C) .- En esta oportunidad se dispone de 8 artículos y por lo tanto existitán 8 maneras de extraer un artículo :

$$\Rightarrow \quad n(C) = 8$$

Finalmente aplicaremos el Principio Multiplicativo en vista de que los eventos se realizan sin que ningunos impida la realización de los otros, de este modo el espacio muestral del experimento tiene un número de elementos que viene dado así :

$$n(\Omega) = n(A) \,.\, n(B) \,.\, n(C) = 10 \,.\, 9 \,.\, 8$$

$$\therefore \qquad n\ (\Omega) = 720$$ **RPTA. D**

6.- Se tiene una bolsa que contiene : 6 bolas blancas y 4 bolas negras; el experimento consiste en extraer 6 bolas al azar. ¿Cuántos elementos tiene su espacio muestral?

A) 21 B) 10 C) 6 D) 60 E) 210

Resolución.-

Nuestro experimento consiste en extraer 6 bolas al azar de un total de 10, sin ninguna particularidad especial. Esto significa que cada grupo se diferenciará de otro en por lo menos uno de sus elementos.

Este pequeño análisis nos permite concluir que el espacio muestral del experimento en mención, tiene como elementos a todas las combinaciones que se puedan hacer con las 10 bolas, tomadas de 6 en 6; así :

$$n(\Omega) = C_6^{10} \quad \Rightarrow \quad n(\Omega) = \frac{10!}{(10-6)!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

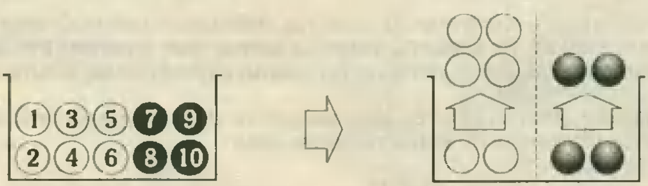
$$\therefore \qquad n\ (\Omega) = 210$$ **RPTA. E**

7.- Con respecto al problema anterior. ¿Cuántos elementos tendrá el evento: extraer 6 bolas de entre las cuales 4 sean blancas y 2 sean negras?

A) 45 B) 120 C) 90 D) 180 E) 360

Resolución.-

A diferencia del problema anterior, en esta oportunidad la selección de las bolas debe satisfacer ciertas características : 4 deben ser blancas y 2 deben ser negras. Esto, sin duda, nos obliga a aceptar la existencia de dos eventos (A y B) que se desarrollarán sin que ningunos impida la realización del otro.



a) Evento A.- Trataremos de averiguar las maneras distintas en que podemos extraer 4 bolas blancas de un total de 6. Para ello debemos reconocer que cada grupo se diferencia de otro en por lo menos un elemento, luego se trata de averiguar el número de combinaciones que se pueden formar con 6 bolas tomadas de 4 en 4 :

$$n(A) = C_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!} \quad \Rightarrow \quad n(A) = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 15$$

b) Evento B.- En este caso se trata de averiguar el número de formas diferentes en que se pueden extraer 2 bolas negras de un total de 4. Por tratarse de grupos que difieren en por lo menos un elemento, diremos que son combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2 :

$$n(B) = C_2^4 = \frac{4!}{2!\ 2!} \quad \Rightarrow \quad n(B) = 6$$

Finalmente, aplicaremos el Principio Multiplicativo para determinar el número de maneras distintas de extraer las bolas blancas y negras simultáneamente :

$$\therefore \quad n(\Omega) = n(A)\,.\,n(B) = 15\,.\,6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n(\Omega) = 90} \qquad \textbf{RPTA. C}$$

8.- Cierto juego consiste en lanzar 2 dados, en el que se gana si el resultado es: a) la suma de, 7, ó, b) los dos dados muestran el mismo resultado. "Se lanzan 2 dados, si se gana terminamos el juego; si no se gana se vuelve a lanzar 2 dados, terminando el experimento" ¿Cuántos eventos elementales tiene el espacio de muestras (espacio de posibilidades favorables asociado al experimento mencionado)?

A) 1 296 B) 876 C) 864 D) 88 E) 432 UNI 94 - I

Resolución.-

En la tabla de doble entrada, se muestran todos los resultados posibles al lanzar los dos dados :

2do Dado \ 1ro Dado	1	2	3	4	5	6
1	1 ; 1	1 ; 2	1 ; 3	1 ; 4	1 ; 5	1 ; 6
2	2 ; 1	2 ; 2	2 ; 3	2 ; 4	2 ; 5	2 ; 6
3	3 ; 1	3 ; 2	3 ; 3	3 ; 4	3 ; 5	3 ; 6
4	4 ; 1	4 ; 2	4 ; 3	4 ; 4	4 ; 5	4 ; 6
5	5 ; 1	5 ; 2	5 ; 3	5 ; 4	5 ; 5	5 ; 6
6	6 ; 1	6 ; 2	6 ; 3	6 ; 4	6 ; 5	6 ; 6

A partir de este cuadro podemos decir que el lanzamiento de los dados puede general hasta 36 resultados diferentes, a los que en adelante llamaremos puntos de muestra. Asimismo estos puntos se distribuyen del siguiente modo :

1) Evento A.- Los de resultado favorable vienen indicados por los recuadros sombreados, luego el número de elementos del espacio muestral de A es :

$n(A) = 12$. Con cualquiera de ellos termina el juego.

2) Evento B.- Los de resultado no favorable vienen indicados por los recuadros en blanco, luego el número de elementos del espacio muestral de B es :

$n(B) = 24$. Con cualquiera de ellos el juego continúa.

De producirse uno de estos resultados deberíamos lanzar los dados por última vez, dando lugar a un tercer evento B', el cual como el del inicio tiene hasta 36 resultados posibles, es decir :

$$n(C) = 36$$

Dado que los eventos B y C se realizarán sin que ninguno impida la realización del otro, diremos que el número de maneras diferentes en que se pueden tirar los dados cuando se ha perdido la 1ra vez, se obtiene aplicando el Principio Multiplicativo, esto es :

$$n(D) = n(B) \,.\, n(C) = 24 \,.\, 36 \quad \Rightarrow \quad n(D) = 864$$

Nota.- D es el evento que reune a B y C .

Finalmente, debemos reconcer que los eventos A y D son exlcuyentes, dado que de ocurrir el evento A, se impediría la realización del evento D; luego para determinar el número total de maneras diferentes en que puede ocurrir este experimento, debemos aplicar el Principio Aditivo visto en el Cap.11, esto es :

$$n(\Omega) = n(A) + n(D) = 12 + 864$$

$$\therefore \quad \mathbf{n(\Omega) = 876} \qquad\qquad \textbf{RPTA. B}$$

12.5) DEFINICION CLASICA DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad $P(A)$ de que un evento A ocurra, se define como la razón entre el número $n(A)$ de elementos favorables al evento y el número $n(\Omega)$ de elementos posibles.

Matemáticamente : $$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}}$$

$$\text{ó}, \quad P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al evento A}}{\text{número total de casos posibles}}$$

La definición dada anteriormente, se basa en el supuesto de que todos los resultados posibles de un experimento aleatorio son igualmente probables; es decir cada uno de los elementos del espacio muestral tiene la misma posibilidad de ocurrir.

Ejemplo.- *¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire; el resultado obtenido sea cara?*

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con el enunciado podemos reconocer que :

E : Lanzar una moneda y observar el resultado que aparece en su cara superior.

$\therefore \ \Omega = \{c; s\} \Rightarrow n(\Omega) = 2$ (número total de casos posibles)

A : Evento que consiste en obtener como resultado cara.

$\therefore \ A = \{c\} \Rightarrow n(A) = 1$

Luego la probabilidad pedida es : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$

Finalmente : $P(A) = \boxed{0{,}5}$, ó , $\boxed{50\ \%}$

Nota .- El último resultado se interpreta así : de 100 lanzamiento de una moneda es probable que 50 de ellos den cara.

Ejemplo.- *En una caja se tienen 3 bolas rojas y 2 bolas blancas; si se extrae 1 bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?*

Resolución.-

De acuerdo con el enunciado podemos reconocer que existen dos eventos, de los cuales nos interesa averiguar el número de sus elementos, veamos :

1) Evento E : Extraer una bola y observar su color.

Notar que para el experimento E, el espacio muestral tiene por elementos a todas las maneras posibles de extraer una bola de un total de 5 (3 rojas y 2 blancas); y puesto que solo existen 5 maneras de extraer una bola, concluímos que :

$$n(\Omega) = 5$$

2) Evento A : Que la bola extraída sea blanca.

Notar que el evento en mención, tiene por elementos a todas las maneras posibles de extraer una bola blanca de un total de 2; y puesto que solo existen 2 maneras de hacer, conlcuímos que :

$$n(A) = 2$$

3) Finalmente la probabilidad pedida será : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{5} = \boxed{0{,}4}$, ó , $\boxed{40\ \%}$

12.6) EVENTOS SIMPLES

Un Evento Simple; es aquel cuya ocurrencia o no ocurrencia, no está relacionada con ningún otro evento.

Ejemplo.- *Si una moneda se lanza 5 veces al aire. ¿Cuál es la probabilidad que aparezcan exactamente 3 caras?*

Resolución.-

Cabe resaltar que nuestro experimento consiste en repetir 5 veces un evento simple (obtener cara), cuyo resultado no depende de ningún otro evento. Asimismo, es necesario señalar que el espacio muestral del experimento tiene como elementos a todas las maneras diferentes de obtener un resultado al lanzar una moneda 5 veces.

Dado que cada lanzamiento puede producir 2 resultado y son en total 5 lanzamientos, los mismos que se realizan sin que ninguno impida poder determinar el número total de resultado posibles :

$$n(\Omega) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 veces}} = 32 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

A continuación analizaremos el evento A, que consiste en obtener 3 caras de un total de 5. El espacio muestral de este evento tiene como elementos a las distintas maneras de formar combinaciones de 5 caras tomadas de 3 en 3, esto significa que :

$$n(A) = C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \Rightarrow n(A) = 10 \qquad \text{..............} (2)$$

Finalmente, la probabilidad pedida vendrá dada por : $P(A) = \dfrac{n\ (A)}{n\ (\Omega)}$ .... (3)

Reemplazando (1) y (2) en (3) : $P(A) = \dfrac{10}{32} = \boxed{0{,}3125}$

12.7) EVENTOS COMPUESTOS

Un evento se denomina Evento Compuesto; si éste asocia a dos o más eventos simples. Todo evento compuesto puede clasificarse en 3 clases: Eventos Mutuamente Excluyentes, Eventos Independientes y Eventos Dependientes.

12.7A EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES (E.M.E)

Dos eventos A y B se dice que son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir a la vez, es decir; la ocurrencia de uno impide la ocurrencia del otro.

Simbólicamente : $\boxed{A \cap B = \phi}$

TEOREMA : Si A y B son eventos mutuamente excluyentes se cumple que :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Ejemplo.- *De 5 hombres y 4 mujeres, se quiere escoger al azar un comité de 4 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté formado por más de 2 hombres?*

Resolución.-

a) Cálculo del número de elementos del espacio muestral.-

Los elementos que constituyen el espacio muestral del experimento señalado en el ejercicio, son todos los grupos diferentes de 4 personas de un total de 9. Esto significa que el número de elementos del espacio muestral viene dado por el número de combinaciones que se pueden realizar de 9 personas tomadas de 4 en 4, veamos :

$$n(\Omega) = C_4^9 = \frac{9!}{(9-4)! \cdot 4!} \Rightarrow n(\Omega) = 126 \qquad \text{.........} (1)$$

b) Cálculo del número de comités formados por 3 hombres y 1 mujer.-

Designemos por A a este evento, ahora debemos reconocer que los elementos que componen el espacio muestral de este evento, vienen a ser todos los grupos diferentes de 4 personas formados por 3 hombres y 1 mujer. en el fondo, este evento está formando por otros dos : Uno es el elegir grupos diferentes de 3 hombres de un total de 5, cuyo número viene dado por : C_3^5 y el otro es elegir a 1 mujer de un total de 4, cuyo número viene dado por : C_1^4 . Finalmente por tratarse de dos eventos en el que la realización de uno no impide la realización del otro, diremos que, el número de maneras diferentes en que ambos eventos se pueden realizar se obtiene aplicando el Principio Multiplicativo, esto significa que :

$$n(A) = C^5_3 \, . \, C^4_1 = (10)(4) \quad \Rightarrow \quad n(A) = 40 \quad .... (2)$$

Luego, de (1) y (2) : $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{40}{126} \quad .... (*)$$

c) Cálculo del número de comités integrado por 4 hombres.-

Este evento que designamos por B, consiste en formar grupos diferentes de 4 hombres de un total de 5, cuyo número viene dado por :

$$n(B) = C^5_4 \quad \Rightarrow \quad n(B) = 5 \quad .... (3)$$

Luego, de (1) y (3) : $$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad P_{(B)} = \frac{5}{126} \quad .... (**)$$

Finalmente, debemos reconocer que los eventos A y B son mutuamente excluyentes, y dado que nos piden : $P(A \cup B)$, aplicaremos el teorema del item 12.7A, veamos :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad .... (**)$$

Luego, reemplazando (*) y (**) en (***) :

$$P(A \cup B) = \frac{40}{126} + \frac{5}{126} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A \cup B) = \frac{45}{126}}$$

12.7B EVENTOS INDEPENDIENTES (E.I.)

Dos eventos simultáneos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no impide la ocurrencia del otro.

Simbólicamente : $\boxed{A \cap B \neq \phi}$

TEOREMA : Si A y B son eventos independientes (E.I.) se cumple :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)}$$

Ejemplo.- *Calcular la probabilidad de obtener una puntuación* par *en el lanzamiento de un dado y cara en el lanzamiento de una moneda.*

<u>**Resolución**</u>.-

1) Evento A.- Obtener una puntuación par en el lanzamiento de un dado. En este caso reconocemos que el espacio muestral tiene 6 elementos (caras) y el evento A tiene 3 elementos (caras con número par), luego :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

2) Evento B.- Obtener por resultado «cara» en el lanzamiento de una moneda. Aquí el espacio muestral tiene 2 elementos (cara y sello) y el evento B solo posee 1 elemento (una cara); luego :

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

Podemos notar que la ocurrencia del evento A no impide la ocurrencia del evento B, luego se trata de dos eventos independientes, por lo tanto la probabilidad de que ocurra el evento $A \cap B$, viene dado por el teorema del item 12.7B :

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{4}}$$

12.7C EVENTOS DEPENDIENTES (E.D.)

Dos eventos A y B son dependientes; si la ocurrencia de uno altera la ocurrencia del otro.

Ejemplo.- *En una urna se tienen 10 bolitas numeradas del 1 al 10. Si se extrae sucesivamente dos bolitas. ¿Cuál es la probabilidad de que estén numeradas con un número par?*

Resolución.-

El experimento señalado se compone de dos eventos :

A = extraer la 1ra bolita con número par.

B = extraer la 2da bolita con número par.

Podemos notar que la ocurrencia del evento A tiene un resultado que logra alterar la ocurrencia del evento B, por lo tanto se trata de dos eventos dependientes cuyo análisis conviene realizar así :

1ro) Evento A.- Para este evento el espacio muestral tiene : $n\,(\Omega) = 10$ elementos y el evento A : n (A) = 5 elementos (bolas con número par); luego :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{10} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

2do) Evento B.- Una vez ocurrido el evento A, el espacio muestral para este experimento cuenta con : $n\,(\Omega) = 9$ elementos y el evento B con $n(B) = 4$ elementos (quedan 4 bolas con número par), por lo tanto :

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{9}$$

Finalmente la probabilidad de ocurrencia del evento $A \cap B$, viene dado así :

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = \frac{2}{9}}$$

12.8) AXIOMAS Y TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD

12.8A AXIOMA I

Para todo evento A de un espacio muestral, su probabilidad $P(A)$ tiene un valor que varía desde cero hasta uno.

$$\boxed{0 \leq P\,(A) \leq 1}$$

12.8B AXIOMA II

Si A es un evento seguro ($A = \Omega$) se cumple :

$$\boxed{P\,(A) = 1}$$

12.8C TEOREMA I

Si $\bar{A}$ es el evento contrario de A; su probabilidad se calcula así :

$$\boxed{P\,(\bar{A}) = 1 - P\,(A)}$$

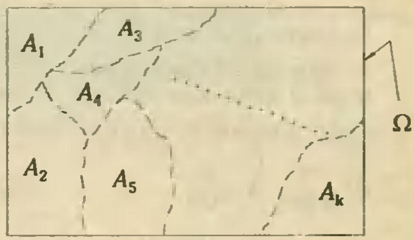
12.8D TEOREMA II

Si A y B son dos eventos cualquiera asociados a un mismo espacio muestral, se cumple :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

12.8E TEOREMA III

Si : $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$; es una secuencia numerable de eventos mutuamente excluyentes definidos en un único espacio muestral Ω ; se cumple :



$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k) = 1$$

12.9) PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sea B un evento cualquiera de un espacio muestral, la probabilidad de que ocurra un evento A; una vez que el evento B haya ocurrido, se calcula así :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{con : } P(B) \neq 0$$

Donde $P(A/B)$ es la probabilidad de ocurrencia del evento A, dado que ha ocurrido el evento B.

Ejemplo.- *Si se lanzan 2 dados y la suma obtenida de la puntuación de sus caras superiores es 6. Hallar la probabilidad de que en uno de los dados se haya obtenido por puntuación 2.*

Resolución.-

De acuerdo al enunciado, se pueden distinguir los eventos :

B : Obtener suma 6 = $\{(1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5;1)\}$ $\Rightarrow$ $n(B) = 5$

A : Puntuación 2 aparece al menos en un dado = $\{(2;4), (4;2)\}$

Reconocemos que : $A \cap B = \{(2;4), (4;2)\}$ $\Rightarrow$ $n(A \cap B) = 2$

Asimismo observamos que el número de elementos del espacio muestral, de los eventos mencionados anteriormente, es igual al número total de maneras en que pueden caer los dados; es decir: $6 \cdot 6 = 36$.

Finalmente, la probabilidad pedida se calcula así :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{5/36} \quad \Rightarrow \quad P(A/B) = \frac{2}{5}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

9.- De una baraja de 52 carta se extraen tres naipes. Determínese las probabilidades de los siguientes eventos :

A : Que todos sean ases.
B : Que todos sean del mismo palo.

Nota : Un palo de una baraja es una serie de 13 naipes del mismo color.

A) $\frac{1}{5\,525}$ y $\frac{22}{425}$ *B)* $\frac{3}{5\,525}$ y $\frac{11}{425}$ *C)* $\frac{12}{5\,525}$ y $\frac{3}{425}$

D) $\frac{1}{5\,525}$ y $\frac{12}{425}$ *E) N.A.*

Resolución.-

De acuerdo al enunciado; el número de elementos del espacio muestral es igual a la cantidad de maneras de extraer 3 naipes de un total de 52.

$n(\Omega) =$ Cantidad de maneras de extraer 3 naipes de un total de 52 $= C_3^{52}$

Para el evento A : Que todos sean ases; su número de elementos será :

$n(A) =$ Cantidad de maneras de extraer 3 ases de un total de 4 $= C_3^4$

Finalmente; la probabilidad de ocurrencia del evento A será :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_3^4}{C_3^{52}} = \frac{1}{5\,525}$$

Para el evento B : Que todos sean del mismo palo; su número de elementos será :

$n(B) = 4\,C_3^{13}$ = Cantidad de maneras de obtener 3 naipes del mismo palo (en la baraja hay 4 palos).

Finalmente; la probabilidad de ocurrencia del evento B será :

$$\therefore \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4C_3^{13}}{C_3^{52}} = \frac{22}{425}$$ **RPTA. A**

10.- Tres ampolletas malas se mezclan con doce buenas, se prueba seleccionán-dolas al azar entre las que quedan sin probar hasta encontrar las malas. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la tercera mala en la séptima prueba?

A) 0,2967 *B) 0,0667* *C) 0, 1111* *D) 0,4286* *E) 0,0330* *UNI 93-II*

Resolución.-

Tener en cuenta que encontrar la tercera mala en la séptima prueba, implica que las 2 malas restantes se han encontrado en las seis pruebas anteriores.

El número de elementos del espacio muestral, será igual al número total de maneras de extraer 7 ampolletas, una a continuación de la otra de un total de 15 ampolletas, es decir :

$$n(\Omega) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$$

Si A es el evento pedido : obtener la 3° mala en la séptima prueba. Hagamos un posible esquema :

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	← Prueba
						M	....
						Fijo	

Observar que en los casilleros : 1°, 2°, 3°, 4°, 5° y 6°; se deben distribuir 6 ampolletas (una en cada una) entre las cuales : 2 serán malas y 4 serán buenas; luego, el número de elementos del evento A será :

$$n(A) = V_2^6 \cdot V_4^{12} \cdot 3 \qquad \text{... (Ver Capítulo 11)}$$

→ cantidad de maneras de escoger la ampolleta fija

$$n(A) = 6 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3$$

Finalmente; la probabilidad de ocurrencia del evento A será :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = 0{,}03296$$

Si observamos las alternativas, podemos concluir que la probabilidad encontrada se aproxima a :

0,0330 **RPTA. E**

11.- Una bolsa contiene 4 fichas blancas y 2 fichas negras; otra bolsa contiene 3 fichas blancas y 5 fichas negras; se extrae una ficha de cada bolsa. Determinar la probabilidad de que ambas fichas sean blancas.

A) 1/2 B) 1/4 C) 2/3 D) 3/4 E) 1/3

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo al enunciado; se pueden distinguir 2 eventos :

A : Extraer una ficha blanca de la 1° bolsa.

B : Extraer una ficha blanca de la 2° bolsa.

Donde : $P(A \cap B)$ es la probabilidad de ocurrencia del evento pedido, como A y B son eventos independientes (Item 12.7.B) dicha probabilidad se calculará así :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B);$$

Es decir : $$P(A \cap B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8}$$

Finalmente ; la probabilidad pedida : $\frac{1}{4}$ **RPTA. B**

12.- Las probabilidades que tienen: A, B y C de resolver un mismo problema son : 4/5, 2/3 y 3/7 respectivamente; si intentan hacerlo los tres. Determinar la probabilidad de que se resuelva el problema.

A) 24/105 B) 101/105 C) 81/105 D) 90/105 E) 4/105 UNI 94-II

Resolución.-

Observar que el problema queda resuelto si al menos uno de los tres lo resuelve; en consecuencia la probabilidad pedida será : $P(A \cup B \cup C)$.

De acuerdo al Item 12.8.C.; dicha probabilidad se podrá expresar así :

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P\left(\overline{A \cup B \cup C}\right)$$

Donde : $\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = \left[\overline{(A \cup B) \cup C}\right] = \overline{(A \cup B)} \cap \overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

Es decir : $P(A \cup B \cup C) = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)$,

Como : $\overline{A}$; $\overline{B}$ y $\overline{C}$ son eventos independientes; la probabilidad pedida se calculará así :

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P\left(\overline{A}\right) . P\left(\overline{B}\right) . P\left(\overline{C}\right) \qquad \text{... } (\alpha)$$

Por dato se sabe que : $P(A) = 4/5$; $P(B) = 2/3$ y $P(C) = 3/7$

Utilizando el teorema expuesto en el Item 12.8.C.; se tendrá :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1/5 \text{ ; } P\left(\overline{B}\right) = 1/3 \text{ y } P\left(\overline{C}\right) = 4/7$$

Finalmente; reemplazando dichas probabilidades en la relación (α); concluimos que :

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \mathbf{\frac{101}{105}} \qquad \textbf{RPTA. B}$$

13.- Cierto tipo de motor eléctrico falla por obstrucción de los cojines, por combustión del embobinado o por desgaste de las escobillas. Supóngase que la probabilidad de la obstrucción es el doble de la combustión, la cual es cuatro veces más probable que la inutilización de las escobillas. ¿Cuál es la probabilidad de que el fallo sea por combustión del embobinado?

A) $\frac{4}{13}$ ***B)*** $\frac{3}{16}$ ***C)*** $\frac{1}{3}$ ***D)*** $\frac{5}{16}$ ***E)*** $\frac{7}{16}$

Resolución.-

Sean los eventos : A : Falla por obstrucción de los cojines.

B : Falla por combustión del embobinado.

C : Falla por desgaste de las escobillas.

De acuerdo al teorema expuesto en el Item 12.8.E.; se cumple : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ ... (α)

Por dato se sabe que : $P(A) = 2P(B)$ y $P(B) = 5P(C)$ ... (θ)

Como se pide : $P(B)$ reemplazamos (θ) en (α) adecuadamente : $2\,P(B) + P(B) + \frac{\bar{P}(B)}{5} = 1$

Finalmente obtenemos : $\boxed{P(B) = \frac{5}{16}}$ **RPTA. D**

14.- Se dispone de 5 envases de gaseosas: dos de Coca Cola, dos de Inka Kola y una de Watts; si se les ordena en una fila. ¿Cuál es la probabilidad de que las de Coca Cola y las de Watts estén juntas?

A) $\frac{1}{5}$ *B)* $\frac{3}{10}$ *C)* $\frac{7}{120}$ *D)* $\frac{1}{10}$ *E)* $\frac{3}{5}$

<u>Resolución</u>.-

Tener en cuenta que el espacio muestral para el experimento en mención, tiene por elementos a las permutaciones de cinco elementos (2 Coca Cola, 2 Inka Kola, 1 Watts).

En consecuencia : $n\,(\Omega) = P_5 = \;5 = 120$

Si A es el evento que consiste en ordenar a las gaseosas en una fila, de tal modo que las de *Coca Cola* y la de *Watts* queden juntas; su probabilidad se calcula así :

$$P\,(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Donde : $n\,(A)$ = cantidad de maneras de ordenar a las 5 gaseosas; de tal modo que las de Coca Cola y la de Watts estén juntas.

Hagamos un posible esquema para calcular $n\,(A)$:

C_1	C_2	W	I_1	I_2

Siempre juntos

Como : C_1 ; C_2 y W permanecen juntas, se las podrá considerar como un solo elemento, luego; la cantidad de maneras será igual a la permutación de 3 elementos :

	I_1	I_2

Cantidad de maneras = $P_3 = \;3! = 6$ ... (α)

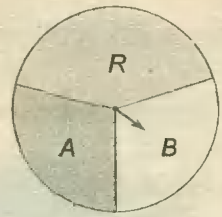
Observar que, si bien es cierto que C_1; C_2 y W permanecen juntas; ellas también podrán permutar entre sí y por cada permutación de ellas existirán 6 maneras de ordenar a los cinco elementos (α); en consecuencia :

$$n\,(A) = 6\,P_3 = 6\;\;3! = 36$$

Finalmente; la probabilidad pedida será : $P\,(A) = \frac{36}{120}$

$\therefore$ $\boxed{P\,(A) = \frac{3}{10}}$ **RPTA. B**

15.- Una ruleta de colores; como se muestra en el gráfico adjunto: está dividido en tres sectores iguales de colores: rojo (R), blanco (B) y azul (A); se hace girar la flecha indicadora dos veces consecutivas. Hallar la probabilidad de que en ambos casos señale el mismo color.



A) $\frac{1}{9}$ *B)* $\frac{2}{3}$ *C)* $\frac{2}{9}$ *D)* $\frac{1}{6}$ *E)* $\frac{1}{3}$

Resolución.-

El espacio muestral para este experimento lo obtendremos de la siguiente tabla de doble entrada :

Giro 1 / Giro 2	R	B	A
R	$R\,;R$	$R\,;B$	$R\,;A$
B	$B\,;R$	$B\,;B$	$B\,;A$
A	$A\,;R$	$A\,;B$	$A\,;A$

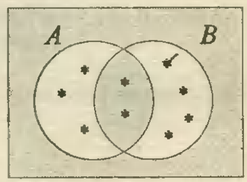
Observar que : $n(\Omega) = 9$

Si C es el evento que consiste en obtener igual resultado en ambos giros, notar que de la tabla se obtiene : $n(C) = 3$; en consecuencia la probabilidad pedida $P(A)$ será :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{9}$$

$\therefore$ $\mathbf{P(A) = \frac{1}{3}}$ **RPTA. E**

16.- Sean los eventos A y B representados en el diagrama adjunto. Calcular : P(A/B)



A) $\frac{1}{9}$ *B)* $\frac{1}{3}$ *C)* $\frac{2}{9}$ *D)* $\frac{2}{3}$ *E) N.A.*

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 12.9, se sabe que :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{...... (1)}$$

A partir del esquema podemos reconocer que $P(A \cap B)$ viene dado por la zona sombreada que representa la intersección de los conjuntos A y B, luego :

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9} \quad \text{........(2)}$$

Asimismo reconocemos que : $P(B) = \frac{6}{9}$ ...... (3)

Finalmente sustituyendo (2) y (3) en (1), obtenemos : $P(A/B) = \dfrac{2/9}{6/9}$

$\therefore$ $\mathbf{P(A/B) = 1/3}$ **RPTA. B**

MISCELANEA

17.- Un grupo de estudio está conformado por 11 niños y 7 niñas. Si se escogen 4 estudiantes al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean niños?

A) 0,1074 B) 0,1076 C) 0,1078 D) 0,1080 E) 0,1000

Resolución.-

Sea "A" evento de obtener 4 niños, luego; el número de elementos de "A" será :

$$n(A) = C_4^{11} = \text{Cantidad de maneras de escoger 4 niños de 11.}$$

Siendo "Ω" espacio muestral; tenemos :

$$n(\Omega) = C_4^{18} = \text{Cantidad de maneras de escoger 4 personas de 18.}$$

Según la definición; la probabilidad de ocurrencia del evento A : $P(A)$; se calcula así :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Finalmente; en el ejercicio se tendrá : $P(A) = \dfrac{C_4^{11}}{C_4^{18}} = \dfrac{11}{102} = $ **0,1078** **RPTA. C**

18.- Se quiere seleccionar un comité de 5 personas, a partir de un grupo de 7 peruanos, 4 chilenos y 3 argentinos. ¿Qué probabilidad habría de que en el comité se encuentren: 2 peruanos, 2 chilenos y 1 argentino?

A) 0,1788 B) 0,1888 C) 0,1878 D) 0,8181 E) 0,1118

Resolución.-

Sea "A" evento pedido, recordar que : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ ... (I)

Donde : $n(\Omega) = C_5^{14}$ = Cantidad de maneras totales de escoger 5 personas de 14.

Cálculo de $n(A)$: C_2^7 = Cantidad de maneras de escoger 2 peruanos de 7.

C_2^4 = Cantidad de maneras de escoger 2 chilenos de 4.

C_1^3 = Cantidad de maneras de escoger 1 argentino de 3.

Luego; según el principio expuesto en el Item 11.1.A.; del Capítulo 11: $n(A)$

Estará dado por : $n(A) = C_2^7 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3$

Finalmente; reemplazando en (I) se tendrá : $P(A) = \dfrac{C_2^7 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3}{C_5^{14}} = \dfrac{27}{143} =$

$$\mathbf{P(A) = 0{,}1888}$$ **RPTA. B**

19.- Si se lanzan dos monedas de diferente tamaño al aire. Calcular la probabilidad de que :

I) Salga exactamente una cara

II) Salga por lo menos una cara

A) 0,5 y 0,25 B) 0,5 y 0,125 C) 0,25 y 0,25 D) 0,5 y 0,75 E) 0,25 y 0,75

Resolución.-

Reconociendo el Ω para el experimento : $\Omega = \{cc; ss; cs; sc\} \Rightarrow n(\Omega) = 4$

Ahora para cada caso pedido, se tendrá :

I) $A \rightarrow$ Evento pedido : $A = \{cs; sc\} \Rightarrow n(A) = 2$

De acuerdo a la definición : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \mathbf{0{,}5}$

II) $A \rightarrow$ Evento pedido : $A = \{cs; sc; \underline{cc}\} \Rightarrow n(A) = 3$

Notar que "por lo menos una cara" implica que también se considere al resultado en el cual salgan las dos caras.

Finalmente : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}$ **RPTA. D**

20.- Una caja tiene 100 focos entre los cuales hay 10 defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una muestra de tres focos, los tres sean defectuosos?

A) $\dfrac{2}{197}$ *B)* $\dfrac{15}{2\,695}$ *C)* $\dfrac{7}{2\,659}$ *D)* $\dfrac{2}{2\,695}$ *E)* $\dfrac{4}{2\,695}$

Resolución.-

Sea "A" evento pedido, luego :

$n(A) = C_3^{10}$ = Cantidad de maneras de extraer 3 focos defectuosos de los 10.

También : $n(\Omega) = C_3^{100}$ = Cantidad de maneras de extraer 3 focos de 100.

Finalmente; según la definición se tendrá : $P(A) = \dfrac{C_3^{10}}{C_3^{100}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{2\,695}}$ **RPTA. D**

21.- En una caja se disponen de 9 bolas numeradas del 1 al 9. Si se extraen 2 bolas al azar :

I) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos números primos?

II) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos números impares?

A) $\dfrac{1}{6}$ y $\dfrac{5}{18}$ *B)* $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{5}{6}$ *C)* $\dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{4}{18}$ *D)* $\dfrac{4}{9}$ y $\dfrac{5}{9}$ *E)* $\dfrac{1}{6}$ y $\dfrac{1}{6}$

Resolución.-

Reconociendo el espacio muestral "Ω"; para el experimento :

$T = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ Total de bolas

$\Rightarrow$ $n(\Omega)$ = Cantidad de maneras de extraer 2 bolas de las 9.

Es decir : $n(\Omega) = C_2^9$

Ahora; para cada caso pedido se tendrá :

I) Sea "A" evento pedido : Números primos = $\{2; 3; 5; 7\}$

$n(A) = C_2^4$ = Cantidad de maneras de escoger 2 números primos de un total de 4.

Luego; de acuerdo con la definición, se tendrá : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_2^4}{C_2^9} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

II) Sea "A" evento pedido : Números impares = $\{1; 3; 5; 7; 9\}$

$n(A) = C_2^5$ = Cantidad de maneras de escoger 2 números impares de un total de 5.

Luego; de acuerdo con la definición, se tendrá : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_2^5}{C_2^9} = \boxed{\dfrac{5}{18}}$ **RPTA. A**

22.- Si se lanzan 2 dados y el resultado es seis. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado se halla obtenido mediante un tres en cada dado?

A) $\frac{1}{36}$ *B)* $\frac{1}{6}$ *C)* $\frac{1}{5}$ *D)* $\frac{2}{9}$ *E)* $\frac{3}{16}$

Resolución.-

El espacio muestral para el experimento será : $\Omega = \{(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)\}$

De aqui salta a la vista que : $n(\Omega) = 5$

Si "A" es el evento pedido, observar que : $n(A) = 1$

Finalmente : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$ **RPTA. C**

23.- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtengan tres caras o tres sellos?

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{8}$ *D)* $\frac{1}{27}$ *E)* $\frac{1}{16}$

Resolución.-

Sean los eventos : "A" y "B" : $A \rightarrow$ Obtener tres caras

$B \rightarrow$ Obtener tres sellos

El evento pedido será : $(A \cup B)$

El espacio muestral para el experimento será : $\Omega = \{ccs, csc, scc, css, scs, ssc, sss, ccc\}$

Notar que : $(A \cup B) = \{ccc; sss\}$

Asimismo; observar que : $n(\Omega) = 8$ y $n(A \cup B) = 2$

Finalmente : $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ **RPTA. B**

24.- Si se lanzan 2 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados que indican sus caras superiores sea 4 ó 6?

A) $\frac{1}{36}$ *B)* $\frac{1}{6}$ *C)* $\frac{2}{7}$ *D)* $\frac{2}{9}$ *E)* $\frac{2}{15}$

Resolución.-

Sean los eventos : "A" y "B" : $A \rightarrow$ Suma cuatro

$B \rightarrow$ Suma seis

El evento pedido será : $(A \cup B)$

Para "A" : $A = \{(1; 3), (2; 2), (3; 1)\} \Rightarrow n(A) = 3$

Para "B" : $B = \{(2; 4), (5; 1), (3; 3), (4; 2), (1; 5)\} \Rightarrow n(B) = 5$

Observar que : $n(A \cup B) = 8$

También : $n(\Omega) = 36$ = Cantidad de maneras que tienen de caer dos dados.

Finalmente : $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$ **RPTA. D**

25.- Si se lanza 1 dado. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga 6?

A) $\frac{1}{6}$ *B)* $\frac{1}{2}$ *C)* $\frac{1}{3}$ *D)* $\frac{5}{6}$ *E)* $\frac{2}{5}$

Resolución.-

En este ejercicio vamos a utilizar la probabilidad para el evento contrario :

Sea "A" evento pedido, luego : $\bar{A}$ = Evento contrario de A (que salga seis)

Recordar el teorema expuesto en el Item 12.8C : $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$ ... (*)

Ahora; hallemos $P(\bar{A})$: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

$\bar{A} = \{6\} \Rightarrow n(\bar{A}) = 1$

Es decir : $P(\bar{A}) = \dfrac{1}{6}$

Finalmente; reemplazando en (*); obtenemos : $P(A) = \frac{1}{6} = 1 - P(A)$

$$\therefore \qquad \mathbf{P(A) = \frac{5}{6}} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

26.- Una caja tiene 100 foquitos, entre los cuales hay 10 defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una muestra de 3 foquitos por lo menos uno sea defectuoso?

A) 0,2734 *B) 0,2732* *C) 0,2736* *D) 0,2738* *E) 0,2717*

Resolución.-

Resolveremos este problema utilizando el concepto de probabilidad para un evento contrario.

Sea "A" el evento pedido, donde por lo menos uno de los tres foquitos es defectuoso.

Ahora : $\bar{A}$ = Extraer una muestra de 3 foquitos donde no hay ningún defectuoso.

Hallemos $P(\bar{A})$: Probabilidad de extraer 3 foquitos buenos.

$$\text{Total de foquitos} = 100 \begin{cases} 90 \text{ buenos} \\ 10 \text{ defectuosos} \end{cases}$$

Observar que :

$n(\bar{A}) = C_3^{90}$ = Cantidad de maneras de extraer 3 foquitos buenos de un total de 90.

$n(\Omega) = C_3^{100}$ = Cantidad de maneras de extraer 3 foquitos de un total de 100.

Luego : $$P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{C_3^{90}}{C_3^{100}} = \frac{178}{245}$$

Finalmente; hallemos $P(A)$ de : $\mathbf{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

$$\frac{178}{245} = 1 - P(A) \qquad \therefore \qquad P(A) = \frac{67}{245} = \mathbf{0{,}2734} \qquad \textbf{RPTA. A}$$

27.- De 150 pacientes examinados en una clínica; se encontró que: 90 tenían enfermedades cardiacas, 50 tenían diabetes y 30 padecían de ambas enfermedades. ¿Qué porcentaje de los pacientes tenían uno u otro padecimiento?

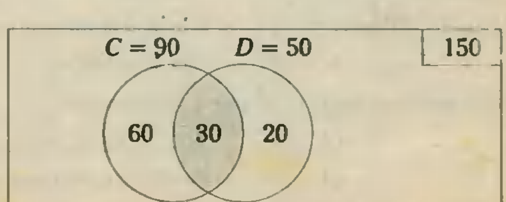
A) 72 % *B) 72,3 %* *C) 73 %* *D) 73,3 %* *E) 75 %*

Resolución.-

Llevando los datos a un diagrama :

C = Cardiacos

D = Diabéticos



Observar que el evento pedido es : $(C \cup D)$

Hallemos $P(C \cup D)$: $\quad P(C \cup D) = \dfrac{90+20}{150} = \dfrac{110}{150} = \dfrac{11}{15}$

Ahora; se plantea la siguiente regla de tres simple :

Probabilidad	**Porcentaje %**
1	100
$P(C \cup D)$	x

Luego : $\quad x = P(C \cup D) \cdot 100\,\% = \dfrac{11}{15} \cdot 100\,\%$

Finalmente : $\quad \boldsymbol{x = 73{,}3\,\%}$ **RPTA. D**

28.- De una bolsa que contiene 5 bolitas negras y 3 bolitas blancas se extraen 3 de ellas en sucesión y sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean negras?

A) 0,179 B) 0,169 C) 0,159 D) 0,176 E) 0,168

Resolución.-

Planteando correctamente el enunciado, se observa que los eventos a intervenir son dependientes (ver Item 127C.); luego :

La 1º bolita negra tendrá una probabilidad de : 5/8.

La 2º bolita negra tendrá una probabilidad de : 4/7.

La 3º bolita negra tendrá una probabilidad de : 3/6.

Finalmente; la probabilidad de que las 3 bolitas sean negras, será :

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{56} = \mathbf{0{,}179}$$ **RPTA. A**

29.- La probabilidad que tiene un alumno de aprobar matemática es : 2/3, la probabilidad que tiene el mismo alumno de aprobar física es : 4/9; si la probabilidad de éste alumno de aprobar por lo menos uno de los cursos es: 4/5 ¿Cuál es su probabilidad de aprobar ambos cursos?

A) 3/4 B) 6/7 C) 7/15 D) 12/45 E) 14/45

Resolución.-

Sean los eventos : $A \rightarrow$ Aprobar matemática.

$B \rightarrow$ Aprobar física.

De acuerdo al Item 12.4.; también tenemos :

$(A \cup B) \rightarrow$ Evento de aprobar al menos un curso.

$(A \cap B) \rightarrow$ Evento de aprobar ambos cursos.

De acuerdo al enunciado : $\quad P(A) = 2/3 \;\wedge\; P(B) = 4/9 \;\wedge\; P(A \cup B) = 4/5$

Es decir, se pide : $P(A \cap B)$

Recordar el teorema visto en el Item 12.8D : $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Reemplazando valores, se tendrá : $\dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} - P(A \cap B)$

$\therefore \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = \dfrac{14}{45}}$ **RPTA. E**

30.- Sean "A" y "B" dos eventos que no son mutuamente excluyentes, tal que : P (A) = 0,20 ∧ P (B) = 0,30 ∧ P (A ∩ B) = 0,10. Calcular : P ($\bar{A}$ ∩ $\bar{B}$)

A) 0,20 B) 0,30 C) 0,40 D) 0,50 E) 0,60

Resolución.-

Se pide $P(\bar{A} \cap \bar{B})$; por Morgan (Item 12.4.) : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$

De acuerdo al teorema visto en el Item 12.8C; podemos plantear : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B)$

Como "A" y "B" no son mutuamente excluyentes, podemos utilizar el teorema visto en el Item 12.8D : $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Luego : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

Finalmente; reemplazando valores se tendrá :

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - [0,20 + 0,30 - 0,10] =$ **0,60** **RPTA. E**

31.- Supóngase que "A" y "B" son dos eventos independientes asociados con un experimento, si la probabilidad de que A ó B ocurra es igual a : 0,6; mientras que la probabilidad de que "A" ocurra es igual a : 0,4. Determinar la probabilidad de que "B" ocurra.

A) $\frac{1}{2}$ ***B)*** $\frac{1}{3}$ ***C)*** $\frac{1}{4}$ ***D)*** $\frac{1}{5}$ ***E)*** $\frac{1}{6}$

Resolución.-

Como "A" y "B" son eventos independientes, podemos utilizar el teorema visto en el Item 12.7B :

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) \qquad ..... (1)$$

De acuerdo al enunciado, se pueden deducir los siguientes datos :

$$P(A \cup B) = 0,6 \ \wedge\ P(A) = 0,4 \ \wedge\ P(B) = ?$$

Aplicando el teorema (II) de probabilidades expuesta en el item 12.8, tendremos que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad .... (2)$$

Reemplazando (1) en (2), se logra establecer que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \quad ..... (*)$$

Finalmente; reemplazando valores en (*), se tendrá :

$$0{,}6 = 0{,}4 + P(B) - (0{,}4)\ P(B)$$

$$\therefore \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad\qquad \textbf{RPTA. B}$$

32.- Se tiene un estante con capacidad para 5 libros, si en el se quiere ordenar 3 libros de Algebra (diferentes) y 2 libros de Física (diferentes). ¿Cuál es la probabilidad de que los libros de una y otra materia queden alternados?

A) 0,150 ***B) 0,500*** ***C) 0,100*** ***D) 0,200*** ***E) 0,350***

Resolución.-

Sea $P(A)$ la probabilidad pedida, donde el evento A se aprecia en el siguiente esquema :

x_1	F_1	x_2	F_2	x_3

$x_1 ; x_2 ; x_3$ Algebra

$F_1 ; F_2$ Física

"Libros de Algebra y Física quedan alternados"

Debemos notar que : $n(A)$ representa la cantidad de maneras totales que se tienen para distribuir 3 libros de Algebra y 2 de Física según el esquema anterior.

Los 3 libros de Algebra se podrán distribuir de : $P_3 = 3! = 6$ maneras; mientras que los 2 libros de Física se podrán distribuir de : $P_2 = 2! = 2$

De acuerdo con el principio multiplicativo visto en el item 11.1A del Cap.11; el número de maneras totales para realizar el evento A viene dado por :

$$n(A) = 6 \cdot 2 = 12 \quad .... (I)$$

Asimismo debemos apreciar que el número de elementos del espacio muestral $n(\Omega)$ viene dado por la permutación de 5 elementos (libros) en 5 casillas (estantes), es decir :

$$n(\Omega) = P_5 = 5! = 120 \quad .... (II)$$

Finalmente sustituyendo (I) y (II) en la definición :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

La probabilidad pedida será : $P(A) = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10} = \mathbf{0{,}100}$ **RPTA. C**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Es un experimento aleatorio :

A) Una carrera de caballo

B) Un juego de naipes

C) Un encuentro de fútbol

D) Observar un color básico

E) Todas las anteriores

2.- El espacio muestral tiene un número .... de elementos :

A) par B) impar C) finito

D) infinito E) N.A.

3.- Si un evento es seguro, su probabilidad de ocurrencia vale :

A) 0,5 B) 0 C) 0,8 D) 1 E) 0,2

4.- Si un evento es imposible podemos afirmar que su probabilidad de ocurrencia es :

A) 0,5 B) 0 C) 0,8 D) 1 E) 0,2

5.- Según el teorema de Morgan : $(A \cap B)' = \bar{A} \cap \bar{B}$, luego: $(A \cup B \cup C \cup D)'$ es :

A) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}$

B) $\bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{C} \cap \bar{D}$

C) $\bar{A} \cup \bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{D}$

D) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cap \bar{D}$

E) No esta definido

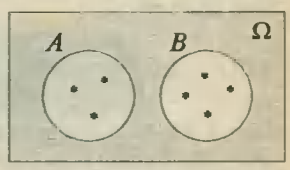
6.- ¿Cuál de los siguientes valores :

I) 3/2 II) 5/4 III) 2/3

podría adquirir la probabilidad de un evento A?

A) I B) II C) III D) I y III E) N.A.

7.- Dados los eventos A y B en el siguiente esquema :



es correcto que :

A) son mutuamente excluyentes

B) son independientes

C) son dependientes

D) son simples

E) N.A.

8.- El evento : En el lanzamiento de dos dados, obtener una puntuación igual a 16, es :

A) posible B) seguro C) simple

D) imposible E) compuesto

9.- Si : $A_1 \in \Omega \ \wedge \ A_2 \in \Omega$; no es cierto que :

A) $P(A_1) + P(A_2) = 1$

B) $P(A_1) \cap P(A_2) = \phi$

C) $P(A_1) \cup P(A_2) = P(\Omega)$

D) $0 < P(A_1) < P(A_2)$

E) Todas las anteriores

10.- Con respecto a $P(A)$ es correcto :

A) Varía entre 0 $\wedge$ 1

B) Varía desde 0 hasta 1

C) Varía entre 0 $\wedge$ 0,5

D) Varía desde 0 hasta 0,5

E) siempre es mayor que 1

11.- Hallar la probabilidad de obtener 8 puntos, tirando dos dados al aire una sola vez.

A) $\frac{10}{27}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{7}{10}$

NIVEL B

12.- En una bolsa hay 4 bolas rojas y 6 bolas blancas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola blanca?

A) 0,6 B) 0,4 C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{2}{9}$ E) 0,9

13.- ¿Cuál es la probabilidad de que al retirar una carta de una baraja, se obtenga "**AS**"?

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{2}{13}$ C) $\frac{1}{26}$

D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{1}{13}$

14.- ¿Cuál es la probabilidad de que al retirar una carta de una baraja, ésta no sea de espadas?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

15.- Si la probabilidad de ganar un cierto juego es : 0,4. ¿Cuál es la probabilidad de perderlo (no puede haber empate)?

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,4 D) 0,8 E) 0,6

16.- En una caja se tienen 4 llaveros de color rojo. 3 llaveros de color verde y 2 llaveros de color azul. ¿Cuál es la probabilidad de que al retirar 2 llaveros; ambos sean rojos?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{9}$

17.- En una urna hay 10 fichas numeradas del 1 al 10; se extraen de ésta urna 2 fichas al azar. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de éste experimento aleatorio?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 45 E) 50

18.- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un **4** o un número primo en un lanzamiento de un dado?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

19.- Se va a seleccionar un comité de tres personas, a partir de un grupo de seis hombres y cuatro mujeres. ¿Cuál es la probabilidad, de que :

I) Los tres sean hombres

II) Dos sean hombres

A) $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$ E) N.A.

20.- Hallar la probabilidad de que al arrojar una moneda dos veces, aparezca *cara*, aunque sea una vez :

A) 0,5000 B) 0,7500 C) 0,2500

D) 0,6000 E) 0,3000

21.- De un juego de casinos se extraen 2 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de valor igual a 8?

A) $\frac{9}{442}$ B) $\frac{8}{441}$ C) $\frac{9}{443}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{6}$

22.- Al lanzar tres monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y 1 sello?

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{4}{7}$

23.- En una caja hay 5 fichas blancas y 5 fichas rojas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha roja y otra blanca?

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{8}{9}$

24.- ¿Cuál es la probabilidad que en una familia de tres hijos, hayan 2 niños y una niña?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{7}{9}$

25.- Juan Carlos tiene tres cartas con las letras: **T**, **A** y **N**; si coloca las cartas en una fila. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga la palabra: **TAN**?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{9}$

26.- Para cierta rifa se venden 20 boletos, Carlitos compra 2 boletos; si se ofrecen 2 premios. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga sólo uno de los premios?

A) 0,2 B) 0,3 C) 0,7 D) 0,9 E) 0,5

NIVEL C

27.- Se considera el experimento aleatorio de lanzar 2 dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor que cinco?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{26}{36}$ D) $\frac{5}{36}$ E) $\frac{13}{36}$

28.- Se lanza un dado e independientemente se escoge al azar una carta de una baraja normal. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado muestre un número par y la carta sea de un palo rojo?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{52}$

29.- Del problema anterior. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado muestre un número par o la carta sea de un palo rojo?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{52}$

30.- Se va a seleccionar un comité de 3 miembros de un grupo de 7 personas, de las cuáles 2 son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que :

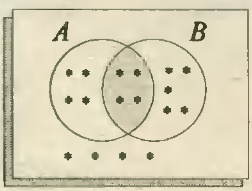
I) En el comité estén las 2 mujeres

II) El comité esté integrado por lo menos por un hombre

A) $\frac{1}{3}$ y 1 B) $\frac{1}{5}$ y 1 C) $\frac{1}{7}$ y 1

D) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ E) N.A.

31.- Sean los eventos *A* y *B* representados en :



Halle usted $P(B/A)$.

A) 60 % B) 20 %

C) 30 % D) 40 % E) 50 %

32.- Si seis personas se sientan alrededor de una mesa circular. Hallar la probabilidad de que dos personas determinadas ocupen lugares contiguos.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{2}{15}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{1}{6}$

33.- En cierto tipo de ruleta, se tienen 2 discos giratorios, uno de ellos está marcado con las letras *A, B, C, D, E* y el otro con los dígitos 1,2,3,4, 5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una *B* y un número par?

A) $\frac{2}{32}$ B) $\frac{3}{22}$ C) $\frac{3}{25}$ D) $\frac{2}{35}$ E) $\frac{2}{25}$

34.- Se lanzan 2 dados: uno rojo y otro azul. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de valores igual a 8 y que el dado rojo presente un valor mayor que el dado azul?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

35.- Si se lanzan al aire 4 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 caras y 2 sellos?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

36.- Se elige una carta aleatoriamente de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un 4 o menos de un palo negro?

A) $\frac{4}{13}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{7}{16}$ D) $\frac{5}{52}$ E) $\frac{2}{13}$

37.- En una habitación, 10 personas tienen insignias numeradas del 1 al 10, se eligen 3 personas al azar y se les pide que dejen la habitación inmediatamente y se anotan los números de las insignias. ¿Cuál es la probabilidad de que el número menor de las insignias sea 5?

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,5 D) 0,3 E) 0,4

38.- En el problema anterior. ¿Cuál es la probabilidad que el número mayor de las insignias sea 5?

A) 0,5 B) 0,15 C) 0,05 D) 0,02 E) 0,01

39.- De una caja que contiene 4 tubos malos y 6 buenos, se sacan 2 a la vez, se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

40.- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres dados, la suma de sus caras sea más que quince?

A) $\frac{5}{108}$ B) $\frac{7}{107}$ C) $\frac{9}{101}$ D) $\frac{7}{108}$ E) $\frac{3}{108}$

41.- En un lanzamiento de 2 dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma menor que siete?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{4}{9}$

42.- Karina escribe 4 cartas y los sobres correspondientes, si ella introduce las cartas en los sobres sin fijarse en si corresponden o no, entonces la probabilidad de que cada carta esté en su respectivo sobre, es :

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{24}$ D) $\frac{1}{23}$ E) $\frac{2}{7}$

43.- En una caja hay 10 ampolletas de las cuales cuatro están malogradas, un enfermero toma al azar tres piezas. Hallar la probabilidad de que por lo menos una de las ampolletas escogidas esté malograda.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{4}{7}$ E) N.A.

44.- A una fiesta de disfraces asisten 10 matrimonios, si se eligen dos personas al azar, entonces la probabilidad de que las dos personas sean esposos, es :

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{100}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{4}{7}$ E) N.A.

45.- *A* juega tres billetes en una lotería de 12 números que tiene 3 premios, *B* tiene 2 billetes en otra de 8 números que tiene 2 premios, compare usted sus probabilidades de éxito.

A) $\frac{152}{231}$ B) $\frac{117}{22}$ C) $\frac{952}{715}$ D) $\frac{431}{120}$ E) $\frac{14}{125}$

46.- Se investiga a un grupo de 12 hombres y 12 mujeres de los cuales la mitad de los hombres y la tercera parte de las mujeres son personas infieles a sus respectivas parejas. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea un hombre o una persona infiel?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{1}{4}$

47.- Si se tienen 12 urnas y 7 bolas; hallar la probabilidad de colocar las 7 bolas en 6 urnas.

A) 0,0780 B) 0,0078 C) 0,0870
D) 0,0087 E) 0,0007

48.- Si se tienen 15 cartas numeradas : 1, 2, 3, ... 15; las que son colocadas aleatoriamente en fila, sean los eventos :

A : La carta 1 aparece en la primera posición.
B : La carta 2 aparece en la segunda posición.

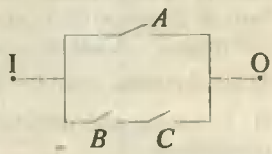
Calcular la probabilidad de que al menos una de las cartas esté en dicho lugar.

A) 0,0128 B) 0,1283 C) 0,1285
D) 0,0085 E) 0,2185

49.- La probabilidad de que Silvia ingrese a la UNI es : 0,7; que ingrese a la Católica es : 0,4; si la probabilidad de que no ingrese a ninguna es: 0,12. Hallar la probabilidad de que ingrese a ambas universidades a la vez.

A) 0,42 B) 0,22 C) 0,24 D) 0,48 E) 0,58

50.- Considere el siguiente circuito eléctrico :



Las llaves se cierran o se abren independientemente. Si las probabilidades de cierre de las llaves son : $P(A) = 0{,}30$ y $P(B) = P(C) = 0{,}15$; determinar la probabilidad del paso de la corriente de I a O.

A) 0,2157 B) 0,2937 C) 0,3157
D) 0,3257 E) 0,3275

13 Campo Complejo

El campo complejo se encarga del estudio de todas las expresiones numéricas (Reales o no Reales), centrando su análisis en aquella expresión numérica llamada: Número Complejo.

13.1) EXPRESION IMAGINARIA

En forma clásica se denomina así a todas aquellas expresiones que son el resultado de extraer signo radical de índice par a números negativos, como por ejemplo :

$$\sqrt{-9}\ ,\ \sqrt[4]{-1}\ ,\ \sqrt{-2}\ ,\ \sqrt[100]{-16}\ ,\ \ldots$$

En general : $\sqrt[2n]{a}$ = Expresión Imaginaria $\Leftrightarrow\ n \in \mathbb{Z}^{+} \wedge a \in \mathbb{R}^{-}$

13.2) UNIDAD IMAGINARIA

Se denomina así a la expresión imaginaria : $\sqrt{-1}$ a la cual se le representará con la letra i.

Unidad Imaginaria = $i = \sqrt{-1}$ / $i^2 = -1$

Con esta definición las expresiones imaginarias citadas en el item anterior se podrán representar así :

$$\sqrt{-9} = \sqrt{(9)(-1)} = \sqrt{9}\cdot\overbrace{\sqrt{-1}}^{i} \Rightarrow \sqrt{-9} = 3i$$

$$\sqrt{-2} = \sqrt{(2)(-1)} = \sqrt{2}\cdot\overbrace{\sqrt{-1}}^{i} \Rightarrow \sqrt{-2} = \sqrt{2}\,i$$

13.3) POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Teniendo en cuenta que $i^1 = i$ y según la definición : $i^2 = -1$, podemos deducir las siguientes potencias :

$$\begin{aligned}
i^1 &= i\\
i^2 &= -1\\
i^3 &= i.i^2 = -i\\
i^4 &= i^3.i = 1\\
i^5 &= i^4.i = i\\
i^6 &= i^5.i = -1
\end{aligned}$$

i^1 a i^4: $\Sigma = 0$; i^2 a i^5: $\Sigma = 0$; i^3 a i^6: $\Sigma = 0$

$$i^7 = i^6 . i = -i$$

$$i^8 = i^7 . i = 1$$

$$i^9 = i^8 . i = i$$

$$i^{10} = i^9 . i = -1$$

$$i^{11} = i^{10} . i = -i$$

$$\vdots$$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS DE i

Una buena inspección de todas estas potencias nos permitirá formular las siguientes propiedades :

$$\text{I)} \quad i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0 \quad / \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{II)} \quad i^{4k} = 1 \vee i^{4k+m} = i^m \quad \Leftrightarrow \quad \{m\,;k\} \subset \mathbb{Z}$$

En particular si $m = 1; 2$ ó 3 ; se tendrán las siguientes equivalencias :

$$i^{4k+1} = i^1 = i$$

$$i^{4k+2} = i^2 = -1$$

$$i^{4k+3} = i^3 = -i$$

Sugerencia .-

En muchos casos es recomendable poder expresar el exponente entero de i en la forma : $4k + m$; de este modo se podrá aplicar de manera directa la propiedad II. Veamos :

Sea i^n , donde : $n = 4k + m \quad \Rightarrow \quad i^n = i^{4k+m}$

Y dado que : $i^{4k} = 1$, concluímos que : $i^n = i^m$

(*) Este procedimiento permite reducir los exponentes enteros de i a valores más manejables.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Cuál es el equivalente de $i^{423\,679}$

A) 1 ***B) -1*** ***C) i*** ***D) -i*** ***E) N.A***

Resolución.-

De acuerdo al item 13.3 será necesario analizar al exponente de la unidad imaginaria con la finalidad de expresarlo en función de un múltiplo de 4 ($4k = \overset{\circ}{4}$ = Múltiplo de cuatro) para lo cual se procede así :

$$\begin{array}{r|l} 423\,679 & 4 \\ \cline{2-2} & 105\,919 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Como el residuo de dividir 423 679 por 4 es 3 se podrá afirmar que el número 423 679 es un múltiplo de 4 más 3 es decir :

$$423\,679 = 4k + 3,$$

Y empleando la propiedad II del item 13.3, tendremos que :

$$i^{423\,679} = i^{4k+3} = i^3 = \boxed{-i} \qquad \textbf{RPTA. D}$$

Observación.- *Si un número de 3 o más cifras es múltiplo de 4 las dos últimas cifras de dicho número deberá representar a un número múltiplo de 4. Por ejemplo, para el problema anterior se tiene :*

$423\,6\underbrace{79}$ *,donde : 79 no es múltiplo de 4, por lo tanto 423 679 no es múltiplo de 4, sin embargo al analizar el número formado con sus dos últimas cifras se tiene que :*

$$79 = 76 + 3 = 4k + 3$$

En consecuencia : $423\,679 = 4k + 3 \quad \Rightarrow \quad i^{423\,679} = i^{4k+3} = i^3$

2.- Al reducir : $i^{473} + 3i^{515} + 5i^{989}$ ***, obtenemos :***

A) 3 ***B) -3*** ***C) 3i*** ***D) -3i*** ***E) 7i***

Resolución.-

Analizando a cada exponente en base a la observación dada en el problema anterior, es decir, observando únicamente el número formado por las dos últimas cifras, se tendrá :

Para el 1er sumando : $4\overset{\frown}{73} = 4k + 1 \Rightarrow i^{473} = i^{4k+1} = i$

Para el 2do sumando : $5\overset{\frown}{15} = 4k + 3 \Rightarrow i^{515} = i^{4k+3} = i^3 = -i$

Para el 3er sumando : $9\overset{\frown}{89} = 4k + 1 \Rightarrow i^{989} = i^{4k+1} = i$

Finalmente la expresión reducida será : $i + 3(-i) + 5i = \boxed{3i}$ **RPTA. C**

3.- El equivalente de :

$$\left\{ -\frac{-i^{-77}}{\frac{-i^{25}}{-\frac{-i^{33}}{-i^{-47}}}} \right\} \div \left\{ -\frac{-\frac{-i^{49}}{-i^{-321}}}{-\frac{-i^{-457}}{-i^{911}}} \right\} \text{, es :}$$

A) i *B) 1* *C) -i* *D) -1* *E) 2i*

Resolución.-

Simplificando signos y utilizando los teoremas vistos para los exponentes en cada término, se tendrá :

$$E = \left\{ -\frac{-i^{-102}}{-i^{80}} \right\} \div \left\{ -\frac{-i^{370}}{-i^{-1368}} \right\}$$

Reduciendo en cada llave :

$$E = \left\{ -i^{-182} \right\} \div \left\{ -i^{1738} \right\}$$

Ahora presentamos el cociente :

$$E = \frac{-i^{-182}}{-i^{1738}}$$

Efectuando nos queda :

$$E = i^{-1920}$$

Observando que : $-1920 = \overset{\circ}{4}$, el equivalente será : $E = i^{4k} = \mathbf{1}$ **RPTA. B**

4.- La suma de los siguientes números complejos :

$$(1+i)+(2+i^2)+(3+i^3)+\ldots\ldots+(4n+i^{4n}) \text{ , es :}$$

A) n(2n + 1) *B) 2n(4n + 1)* *C) 0* *D) n(4n + 1)* *E) 2n(4n - 1)*

UNI 85 - I

Resolución.-

Si T es la suma pedida, ésta se podrá agrupar de la siguiente manera :

$$T = (1+2+3+\ldots\ldots+4n) + \underbrace{(i+i^2+i^3+\ldots\ldots+i^{4n})}$$

De acuerdo al item 13.3 (Propiedad I) en la expresión señalada existen "n" agrupaciones de 4 términos cada una, donde en cada agrupación se obtiene una suma igual a cero, en consecuencia al reducir la expresión señalada se obtendrá : Cero. Finalmente la suma pedida será :

$$T = 1+2+3+\ldots\ldots\ldots+4n$$

Por tratarse de la suma de los $4n$ primeros números naturales, se tendrá :

$$T = \frac{4n(4n+1)}{2}$$

Luego de reducir nos queda : $\mathbf{T = 2n\,(4n+1)}$ **RPTA. B**

5.- Al reducir : $i^{9^{10^{11^{12}}}} + i^{13^{14^{15^{16}}}} + i^{17^{18^{19^{20}}}}$ ***, se obtiene :***

A) i *B) -i* *C) 3i* *D) -3i* *E) 3*

<u>Resolución</u>.-

Para la resolución de este problema se tendrá en cuenta a la siguiente relación aritmética :

$$\left(\overset{\circ}{n} + a\right)^{m} = \overset{\circ}{n} + a^{m} \text{ , donde : } \overset{\circ}{n} = \text{múltiplo de } n$$

Designando como T a la forma reducida de la expresión dada, procederemos así :

Trabajando con la primera base : $T = i^{(8+1)^{10^{11^{12}}}} + i^{(12+1)^{14^{15^{16}}}} + i^{(16+1)^{18^{19^{20}}}}$

Es decir : $T = i^{(4k+1)^{10^{11^{12}}}} + i^{(4k+1)^{14^{15^{16}}}} + i^{(4k+1)^{18^{19^{20}}}}$

Según la propiedad anterior : $T = i^{4k+1^{10^{11^{12}}}} + i^{4k+1^{14^{15^{16}}}} + i^{4k+1^{18^{19^{20}}}}$

Reduciendo en el exponente, obtenemos : $T = i^{4k+1} + i^{4k+1} + i^{4k+1} = 3i^{4k+1}$

Finalmente por el item 13.3, se tiene : $\mathbf{T = 3}\boldsymbol{i}$ **RPTA. C**

6.- Siendo i la unidad imaginaria, calcular el valor de la expresión :

$$T = \frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots\ i^{1003}}{2 - i + i^2 - i^3}$$

A) -1 *B) 1* *C) 1/2* *D) -1/2* *E) (1/2)i* ***UNI 89***

<u>Resolución</u>.-

Teniendo en cuenta la propiedad I del item 13.3, se puede establecer que :

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots + i^{4n} = 0 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

Si T es el valor de la expresión dada, se plantea : $T = \dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots + i^{1003}}{2 - i + i^2 - i^3}$

Con la finalidad de utilizar la relación anterior se sumará y restará al numerador el término i^{1004} : $T = \dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots + i^{1004} - i^{1004}}{2 - i + i^2 - i^3}$

Debemos observar que al reducir la expresión señalada se obtendrá cero, en consecuencia nos queda : $T = \dfrac{-i^{1004}}{2 - i + i^2 - i^3}$

Sustituyendo las potencias por sus equivalentes : $T = \dfrac{-1}{2 - i - 1 + i} = \dfrac{-1}{1}$

Finalmente el valor será : **T = -1** **RPTA. A**

7.- Si : $A = \dfrac{\left(\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{a}{3i}\right)(i+3+a)}{\left(-1 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{3i}\right) + \dfrac{a^2}{9}}$, ***donde :*** $i = \sqrt{-1}$ ***; calcular :*** $A^4 + 1$.

A) $i + 1$ *B)* $80i + 1$ *C)* 81 *D)* 82 *E)* $a + 81$ ***UNI 91***

Resolución.-

Efectuando operaciones con las fracciones en el numerador y denominador, se tendrá :

$$A = \frac{3(3+i-a)\,(i+3+a)}{-9i+i+6+a^2 i}$$

Agrupando convenientemente : $A = \dfrac{3\overbrace{[(3+i)-a]\,[(3+i)+a]}}{-8i+6+a^2 i}$

De este modo la expresión señalada equivale a una diferencia de cuadrados :

$$A = \frac{3[(3+i)^2 - a]}{-8i+6+a^2 i}$$

Desarrollando el binomio : $A = \dfrac{3[9+6i-1-a^2]}{-8i+6+a^2 i}$

Reduciendo en el corchete nos queda : $A = \dfrac{3(8+6i-a^2)}{-8i+6+a^2 i}$

Multiplicando al numerador y denominador de esta expresión por el término i ,obtendremos :

$$A = \frac{3(i)\,(8+6i-a^2)}{\underbrace{(i)\,(-8i+6+a^2 i)}}$$

Efectuando la multiplicación indicada : $A = \dfrac{3i\,\cancel{(8+6i-a^2)}}{\cancel{8+6i-a^2}}$

Luego de simplificar, el valor de A será : $A = 3i$

Finalmente : $A^4 + 1 =$ **82** **RPTA. D**

13.4) NUMERO COMPLEJO (Z)

Se denomina así al par ordenado $(x\,;y)$, donde x e y son números reales. Frecuentemente a un número complejo se le representa por la letra Z

$$Z = (x\,;y) = x + yi \;/\; \{x\,;y\} \subset \mathbb{R}$$

donde : x es la parte real del complejo que se representa así : $x = R_{e\{Z\}}$

e : y es la parte imaginaria del complejo que se representa así : $y = I_{m\{Z\}}$

Ejemplo.- *Reconocer las partes reales e imaginarias de los siguientes números complejos :*

$$Z_1 = 3 - 4i \;\wedge\; Z_2 = -\sqrt{2} + i$$

<u>Resolución</u>.-

Para Z_1 : $R_{e\{Z_1\}} = 3$, e , $I_{m\{Z_1\}} = -4$

Para Z_2 : $R_{e\{Z_2\}} = -\sqrt{2}$, e , $I_{m\{Z_2\}} = 1$

13.4A NUMEROS COMPLEJOS ESPECIALES.

Consideremos al complejo : $Z = x + yi \;/\; \{x\,;y\} \subset \mathbb{R}$ para el tenemos :

I) Si : $y = 0 \Rightarrow Z = x$: Número real

II) Si : $x = 0 \Rightarrow Z = yi$: Número Imaginario Puro

III) Si : $x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow Z = 0$: Complejo Nulo

13.4B IGUALDAD DE NUMEROS COMPLEJOS.

Si se dan los complejos : $Z_1 = a + bi$, y , $Z_2 = m + ni$, y se establece que $Z_1 = Z_2$ es decir : $a + bi = m + ni$; se cumple que : $a = m$, y , $b = n$

Ejemplo.- *Calcular : $m + n$ de la siguiente igualdad :* $(m - 2) + 3i = 2 - ni$

<u>Resolución</u>.-

A partir de la igualdad : $(m - 2) + 3i = 2 - ni$, se cumplirá que :

$$m - 2 = 2 \;\Rightarrow m = 4$$

$$3 = -n \;\Rightarrow\; n = -3$$

Finalmente : $m + n = 1$

13.5) CLASIFICACION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

I) Complejos Conjugados.- Son aquellos que se diferencian en el signo de su parte imaginaria. Dado un complejo Z, su conjugado se denota por $\bar{Z}$, tal que :

$$Z = x + y\,i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{Z} = x - y\,i} \quad \text{(conjugado de Z)}$$

II) Complejos Opuestos.- Son aquellos que se diferencian tanto en el signo de su parte real como en el signo de su parte imaginaria. Si Z es un complejo, su complejo opuesto se denota por Z_{op}, tal que :

$$Z = x + yi \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{op} = -x - yi} \quad \text{(opuesto de Z)}$$

Ejemplo.- *Dado el complejo : Z = 2 - 3 i , encontrar su conjugado y su opuesto.*

<u>Resolución</u>.-

Para el número complejo : $Z = 2 - 3\,i.$

Su conjugado será : $\bar{Z} = 2 + 3\,i$

Y su correspondiente opuesto es : $Z_{op} = -2 + 3\,i$

13.6) OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

13.6A REGLAS BASICAS

Dados los complejos : $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = m + ni$ con $Z_2 \neq 0$, se podrán realizar las siguientes operaciones.

I) Suma y Resta.- Se procede así : $\boxed{Z_1 \pm Z_2 = (a \pm m) + (b \pm n)\,i}$

II) Multiplicación.- Se procede así : $\boxed{Z_1 \,.\, Z_2 = (am - bn) + (an + bm)\,i}$

III) División.- Para esta operación se procede así :

Se multiplica al numerador y denominador por el conjugado de este último :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{m+ni} = \frac{(a+bi)}{(m+ni)} \cdot \frac{(m-ni)}{(m-ni)}$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas y reagrupando, finalmente nos queda :

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{am+bn}{m^2+n^2}\right) + \left(\frac{bm-an}{m^2+n^2}\right)i}$$

IV) Potenciación.- Para efectuar esta operación se tendrá en cuenta al binomio de Newton, podemos citar como ejemplo a :

$$Z_1^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_1^2 = \left(a^2 - b^2\right) + 2\,bi}$$

V) Radicación.- Se tendrá en cuenta que la raíz de un número complejo es otro número complejo, razón por la cual se deberá plantear la siguiente igualdad :

$$\sqrt[n]{Z_1} = c + di \quad , \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Luego se procederá a eliminar el signo radical para finalmente utilizar la igualdad de números complejos (item 13.4B).

Ejemplo.- *Considerando a :* $Z_1 = 2 + i$, $\wedge$, $Z_2 = 3 - 2i$; *encontrar los complejos.*

I) $Z_1 + Z_2$ II) $Z_2 - Z_1$ III) $Z_1 . Z_2$

Resolución.-

A partir de los datos de Z_1 y Z_2 , se prodecerá así :

I) $Z_1 + Z_2 = (2 + 3) + (1 - 2)i \quad \Rightarrow \quad Z_1 + Z_2 = 5 - i$

II) $Z_2 - Z_1 = (3 - 2) + (-2 - 1)i \quad \Rightarrow \quad Z_1 \cdot Z_2 = 1 - 3i$

III) $Z_1 \cdot Z_2 = (2 + i)(3 - 2i)$

$= (2)(3) + (2)(-2i) + (i)(3) + (i)(-2i)$

$= 6 - 4i + 3i + 2$

Finalmente : $Z_1 \cdot Z_2 = 8 - i$

Ejemplo.- *Si :* $Z_1 = 1 + i$; $Z_2 = 1 - i$ $\wedge$ $Z_3 = 5 + 12i$, *se pide encontrar :*

I) $Z_1 \cdot Z_2$ II) Z_1/Z_2 III) $Z_1^2 \wedge Z_2^2$ IV) $\sqrt{Z_3}$

Resolución.-

Para (I).- Haciendo : $Z_1 \cdot Z_2 = (1 + i)(1 - i)$

efectuando esta suma por diferencia, se tendrá : $Z_1 \cdot Z_2 = 1^2 - i^2 = 2$

Observación.- En adelante se deberá recordar que : $\boxed{(1 + i)(1 - i) = 2}$

Para (II).- Efectuando : $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{1+i}{1-i}$

De acuerdo al item 13.6A : $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1-i)} = \dfrac{2i}{2} = i$

Observación.- En adelante se recordará que : $\boxed{\dfrac{1+i}{1-i} = i}$

Asimismo : $\boxed{\dfrac{1-i}{1+i} = -i}$

Para (III).- $Z_1^2 = (1+i)^2 = (1)^2 + 2(1)(i) + (i)^2 = 2i$

$$Z_2^2 = (1-i)^2 = (1)^2 - 2(1)(i) + (i)^2 = -2i$$

***Observación**.- En adelante deberás recordar que :* $\boxed{(1 \pm i)^2 = \pm 2i}$

En general : $\boxed{(1 \pm i)^{2n} = \pm (2i)^n}$

Para (IV).- Se tiene que : $\sqrt{Z_3} = c + di$, como $Z_3 = 5 + 12i$

Se tendrá : $\sqrt{5+12i} = c + di$

Elevando al cuadrado a ambos miembros obtenemos : $5 + 12i = (c^2 - d^2) + (2cd)i$

De acuerdo al item 13.4B se debe cumplir que : $c^2 - d^2 = 5 \quad \wedge \quad 2cd = 12$

Resolviendo el sistema se obtiene : $c = \pm 3 \quad \wedge \quad d = \pm 2$

En consecuencia : $\sqrt{5+12i} = c + di = \pm(3 + 2i)$

13.6B PROPIEDADES AUXILIARES.

Siendo Z, Z_1, y , Z_2 números complejos se cumple :

a) $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

b) $\overline{Z_1 - Z_2} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$

c) $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$

d) $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = \dfrac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$; $Z_2 \neq 0$

e) $\overline{(\bar{Z})} = Z$

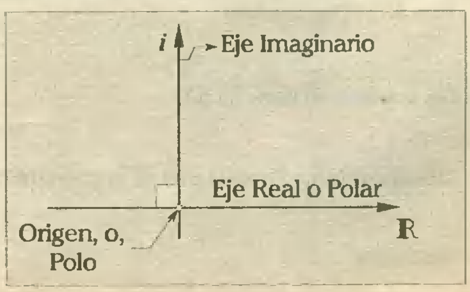
f) $Z + \bar{Z} = 2\,R_{e\{Z\}}$

g) $Z - \bar{Z} = 2i\,I_{m\{Z\}}$

h) Si : $\bar{Z} = Z \Rightarrow Z \in \mathbb{R}$

13.7 PLANO COMPLEJO

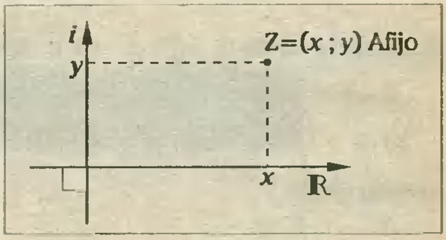
Es aquel sistema bidimensional que se determina mediante la intersección de dos rectas : Una vertical y la otra horizontal, denominándose a la primera Eje Imaginario (i) y a la segunda Eje Real ($\mathbb{R}$).



A este sistema también se le conoce con el nombre de plano de Gaüss , o , diagrama de Argan'd.

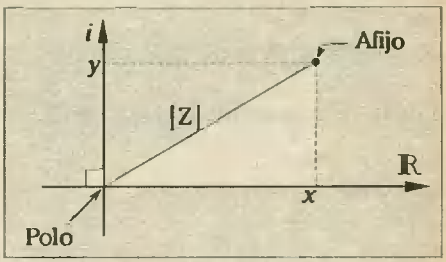
13.8) REPRESENTACION GRAFICA DE Z

El número complejo : $Z = x + yi$ se representa en el plano complejo por un punto denominado *afijo* cuyas coordenadas son : $(x ; y)$ donde a la primera componente x se le ubica en el Eje Real y a la segunda componente y en el Eje Imaginario.



13.8A MODULO DE UN NUMERO COMPLEJO

Se denomina así a la distancia que existe desde el polo hasta el afijo de un número complejo: $Z = x + yi$



Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo indicado, el módulo del número complejo Z se podrá calcular así :

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nota.- Módulo de Z = Mod (Z) = |Z|

13.8B PROPIEDADES REFERIDAS AL MODULO.

Considerando a los números complejos : Z, Z_1 y Z_2 , tal que $Z_2 \neq 0$, se cumple :

I) $|Z| \geq 0$, pero si : $|Z| = 0 \Rightarrow Z = 0$

II) $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

III) $|Z| = |\overline{Z}| = |Z_{op}|$

IV) $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$

V) $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

VI) $\text{Nor}(Z) = |Z|^2 = Z.\overline{Z}$

Observación.- Nor(Z) se conoce con el nombre de *Norma del número complejo Z* y viene a ser el cuadrado del módulo de Z.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

8.- El equivalente de : $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ es T. Si la raíz cuadrada del número complejo : $1 + i$ es : $x + yi$ ¿Cuál es ese valor de T?

A) 0 *B) 1* *C)2* *D) 3* *E) 4*

Resolución.-

Según el enunciado se podrá plantear lo siguiente : $\sqrt{1+i} = x + yi$

Elevando al cuadrado a ambos miembros, tenemos : $1 + i = x^2 - y^2 + 2xyi$

De acuerdo al item 13.4B se cumple : $x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = 1$ .... (1)

A partir de esta última igualdad podemos decir que : $xy = \frac{1}{2}$

Por condición del problema : $T = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ .... (2)

Finalmente reemplazamos (1)en (2) y obtenemos : **T = 2** **RPTA. C**

9.- La expresión : $\frac{(1+i)^2.(1+3i)}{i-3}$, donde : $i = \sqrt{-1}$, equivale a :

A) 1 - 3i *B) -2* *C) 10* *D) 2* *E) -10* ***UNI 83 - II***

Resolución.-

Si T es el equivalente de la expresión, se plantea : $T = \frac{(1+i)^2 \ (1+3i)}{i-3}$

Recordando que $(1 + i)^2 = 2i$ .... (item 13.6), se tendrá : $T = \frac{2i(1+3i)}{i-3}$

Efectuando la multiplicación : $T = \frac{2(i-3)}{i-3}$

Finalmente simplificando se tendrá : **T = 2** **RPTA. C**

10.- El equivalente de : $\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-i}}}}}$, es :

A) 1 - i *B) 1* *C) 0* *D) 1 + i* *E) i*

Resolución.-

Recordemos la propiedad indicada en el item 13.6A : $\frac{1+i}{1-i} = i$

Si ahora se observa con atención a la expresión dada, en el problema, se podrá apreciar que al reemplazar sucesivamente de abajo hacia arriba $\frac{1+i}{1-i}$ por i., la expresión que finalmente nos queda es :

i **RPTA. E**

11.- Sean los números complejos : $m = 1 + yi \wedge n = u + vi$, donde : $i = \sqrt{-1}$, tal que $\{y ; u ; v\} \subset \mathbb{Z}^+$, cumpliéndose además : $m + n = a + 7i$, y , $mn = -7 + 11i$, siendo «a» un número entero comprendido entre 2 y 8.

Calcule : $a^2 + y^2 + u^2 + v^2$

A) 48 B) 50 C) 52 D) 54 E) 56 UNI 86

Resolución.-

Sumando m y n obtenemos : $m + n = (u + 1) + (y + v)i$

Sustituyendo : $m + n$, por la condición dada : $(u + 1) + (y + v)i = a + 7i$

Por tratarse de una igualdad de complejos, se tendrá que : $u + 1 = a \wedge y + v = 7$ .... (I)

Multiplicando m y n obtenemos : $m.n = (1 + yi) . (u + vi)$

Efectuando operaciones , tendremos : $m.n = (u - yv) + (yu + v)i$

Sustituyendo $m.n$ por la condición dada : $(u - yv) + (yu + v)i = -7 + 11i$

Y por tratarse de una igualdad de complejos, se cumplirá que :

$$u - yv = -7 \Rightarrow u = yv - 7 \quad \text{......................} \quad \text{(II)}$$

$$yu + v = 11 \Rightarrow u = \frac{11 - v}{y} \quad \text{......................} \quad \text{(III)}$$

Igualando los segundos miembros de (II) y (III) se obtendrá : $y^2v - 7y = 11 - v$ ..... (IV)

De la relación (I) despejamos : v , y reemplazamos, en (IV) : $y^2 (7 - y) - 7y = 11 - (7 - y)$

Efectuando y transponiendo términos, se obtiene : $y^3 - 7y^2 + 8y + 4 = 0$

Resolviendo esta ecuación se obtiene : $y = 2$ (único valor $\mathbb{Z}^+$).

Finalmente reemplazamos : $y = 2$ sucesivamente en (I) y (II) : $v = 5 \wedge u = 3 \wedge a = 4$

Con lo cual : $a^2 + y^2 + u^2 + v^2 =$ **54** **RPTA. D**

12.- Si Z es un número complejo y satisface $\left|\dfrac{1-Z}{1+Z}\right| = 1$, entonces :

A) $R_{e\{Z\}} > 0$ *B)* $I_{m\{Z\}} \geq 0$ *C) Z es un número real*

D) Z es un número imaginario puro *E)* $R_{e\{Z\}} < 0$ ***UNI 94-I***

Resolución.-

Teniendo en cuenta que : $Z \neq -1$, en la igualdad dada utilizaremos la propiedad (V) expuesta en el item 13.8B $\dfrac{|1-Z|}{|1+Z|} = 1$

Esta última igualdad que es equivalente a : $|1 - Z| = |1 + Z|$ .... (I)

Consideremos al complejo : $Z = x + yi \ / \ \{x \, ; y\} \subset \mathbb{R}$, luego en la relación (I) se obtendrá : $|(1 - x) - yi| = |(1 + x) + yi|$

Y de acuerdo con el item 13.8A se cumple : $\sqrt{(1-x)^2+y^2} = \sqrt{(1+x)^2+y^2}$

Resolviendo cuidadosamente esta igualdad, se obtendrá : $x = 0$

En consecuencia el número complejo será : $\mathbf{Z = yi}$ **RPTA. D**

13.- En $\mathbb{C}$ los valores de $x \wedge y$ al resolver la siguiente ecuación : $\dfrac{xi}{1+yi} = \dfrac{3x+4i}{x+3y}$, son :

A) $x = \pm 1$, $y = \pm 3/4$ *B)* $x = \pm 2$, $y = \pm 3/2$ *C)* $x = \pm 3$, $y = \pm 4/3$

D) $x = \pm 3$, $y = \pm 2/3$ *E)* $x = \pm 2$, $y = \pm 5/4$ ***UNI 95-II***

Resolución.-

Debemos tener en cuenta que $\mathbb{C}$ representa al conjunto de los números complejos.

De la igualdad mostrada se tiene : $(xi)(x + 3y) = (1 + yi)(3x + 4i)$

Efectuando operaciones : $(x^2 + 3xy)i = (3x - 4y) + (3xy + 4)i$

Igualando las partes reales : $3x - 4y = 0$

Despejando y nos queda $y = \dfrac{3x}{4}$ .... (I)

Igulando las partes imaginarias :. $x^2 + 3xy = 3xy + 4$

Reduciendo términos semejantes , se establece que : $x^2 = 4$ .... (II)

De (II) extraemos raíz cuadrada y se obtiene : $x = \pm 2$

Finalmente reemplazando en (I) concluimos que : $\mathbf{y = \pm 3/2}$ **RPTA. B**

14.- Reducir : $T = \frac{1+2i}{2-i} + \frac{3+4i}{4-3i} + \frac{5+6i}{6-5i} + \ldots\ldots\ldots$ ***1997 términos***

A) 1997 ***B) 1998i*** ***C) -1997i*** ***D) -1997*** ***E) 1997i***

Resolución.-

Hallemos el equivalente de cada sumando :

Para el primero : $\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)i}{(2-i)i} = \frac{(1+2i)i}{2i-i^2} = \frac{(1+2i)i}{2i+1} \Rightarrow \frac{1+2i}{2-i} = i$

Para el segundo : $\frac{3+4i}{4-3i} = \frac{(3+4i)i}{(4-3i)i} = \frac{(3+4i)i}{4i-3i^2} = \frac{(3+4i)i}{4i+3} \Rightarrow \frac{3+4i}{4-3i} = i$

Para el tercero : $\frac{5+6i}{6-5i} = \frac{(5+6i)i}{(6-5i)i} = \frac{(5+6i)i}{6i-5i^2} = \frac{(5+6i)i}{6i+5} \Rightarrow \frac{5+6i}{6-5i} = i$

Observar que el equivalente de cada sumando resulta ser siempre : i , en consecuencia la adición pedida será :

$$T = i + i + i \ldots\ldots \text{ 1997 términos}$$

Finalmente se obtiene : $\mathbf{T = 1997\,i}$ **RPTA. E**

15.- El siguiente número complejo : $\frac{3-2ai}{4-3i}$ ***, equivale a un número real; en consecuencia el valor real de «a» es :***

A) 8/9 ***B) 9/8*** ***C) 3/4*** ***D) 4/3*** ***E) -9/8***

Resolución.-

Multiplicando por el conjugado del denominador : $\frac{3-2ai}{4-3i} = \frac{(3-2ai)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $= \frac{(12+6a)+(9-8a)i}{25}$

Reduciendo términos concluímos que : $\frac{3-2ai}{4-3i} = \left(\frac{12+6a}{25}\right) + \left(\frac{9-8a}{25}\right)i$

Por condición del problema el número complejo obtenido es un número Real. Luego, de acuerdo con el item 13.4A se deberá cumplir que : $\frac{9-8a}{25} = 0 \Rightarrow 9 - 8a = 0$

Es decir : $a = 9/8$ **RPTA. B**

16.- Para qué valor de «n» se cumple la siguiente igualdad : $(1+i)^n + \sqrt{2i}^{\,n} = 64i$

A) 10 ***B) 5*** ***C) 1/10*** ***D) 1/5*** ***E) 3***

Resolución.-

De acuerdo con la propiedad general vista en el item 13.6 se sabe que : $2i = (1+i)^2$

De este modo la igualdad dada queda así : $(1+i)^n + \sqrt{(1+i)^2}^{\,n} = 64i$

Eliminando el radical ; $(1+i)^n + (1+i)^n = 64i$

Reduciendo y simplificando obtenemos : $(1+i)^n = 32i$

Recordando que $i = i^5$, tendremos : $(1+i)^n = 2^5 i^5 = (2i)^5$

Sustituyendo $2i$ por $(1+i)^2$, la igualdad anterior quedará así : $(1+i)^n = [(1+i)^2]^5$

Efectuando operaciones en los exponentes : $(1+i)^n = (1+i)^{10}$

De esta última igualdad se concluye que : $\boldsymbol{n = 10}$ **RPTA. A**

17.- Halle el módulo del número complejo Z , si : $Z = (3+4i)(5-12i)(2\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{3}\,i)$

A) 170 *B) 250* *C) 390* *D) 420* *E) 510*

Resolución.-

Se pide $|Z|$ es decir : $|Z| = |(3+4i)(5-12i)(2\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{3}\,i)|$

Utilizando la propiedad (IV) expuesta en el item 13.8B, la igualdad anterior se podrá escribir así: $|Z| = |(3+4i)| \cdot |(5-12i)| \cdot |(2\sqrt{2}+i)| \cdot |1+\sqrt{3}\,i|$

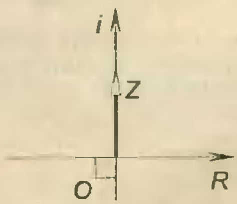
Y de acuerdo con el item 13.8A, encontramos el módulo de cada complejo : $|Z| = \left(\sqrt{3^2+4^2}\right)\left(\sqrt{5^2+12^2}\right)\left(\sqrt{[2\sqrt{2}]^2+1^2}\right)\left(\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\right)$

Efectuando, encontramos : $|Z| = (5)(13)(3)(2)$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{|Z| = 390}$ **RPTA. C**

18.- Si la gráfica del número complejo : $Z = \dfrac{1+ai}{1-ai}$, $a \in \mathbb{R}$, es el que se muestra en la figura; encontramos el valor de "a" es :

A) 4 *B) -2* *C) 1* *D) -1* *E) 2* *UNI 96 - I*



Resolución.-

Observando la figura, podemos reconocer que el número complejo Z es imaginario puro, pues dado que su parte real es cero $\left(R_{e\{Z\}} = 0\right)$.

En consecuencia nuestra estrategia consistirá en efectuar la división que representa al número complejo Z con la finalidad de encontrar un equivalente de la forma : $x + y\,i$ para Z y en él, poder utilizar la condición deducida : $R_{e\{Z\}} = 0$. Veamos :

Multiplicando Z por el conjugado del denominador : $Z = \dfrac{1+ai}{1-ai} = \dfrac{(1+ai)\,(1+ai)}{(1-ai)\,(1+ai)}$

Efectuando la multiplicación : $Z = \dfrac{(1-a^2)+2ai}{1+a^2}$

Separando en dos sumandos : $Z = \left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right) + \left(\dfrac{2a}{1+a^2}\right)i$ ... (*)

Y ahora, empleando la condición deducida, tendremos : $\dfrac{1-a^2}{1+a^2} = 0 \;\Rightarrow\; 1 - a^2 = 0$

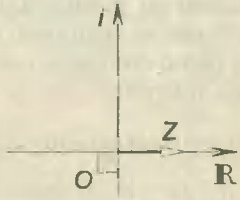
De esta última igualdad concluimos que : $a = \pm 1$

Debemos observar, que si : $a = -1$. al reemplazar en la división dada para Z, resulta un número real (Z = 1) lo cual contradice a su gráfica , sin embargo ello no ocurre cuando $a = +1$. Por lo tanto el único valor que puede adquirir "a" es 1.

RPTA. C

19.- Con respecto al problema anterior : Si la gráfica dada hubiera sido como la que se indica ¿Qué valor asumiría «a» ?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) -2



Resolución.-

Al igual que en el problema anterior, de la gráfica se puede deducir que el número complejo Z es un número real, por tal razón analizamos la expresión (*), obtenida en la resolución anterior:

$$Z = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right) + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)i$$

De acuerdo con la condición del problema se debe cumplir que : $I_{m\{z\}} = 0$, luego :

$$\frac{2a}{1+a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a = 0$$

Finalmente : $\boldsymbol{a = 0}$ **RPTA. B**

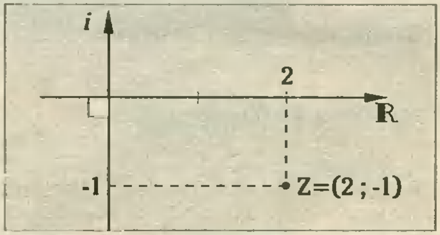
13.9) FORMA RECTANGULAR O CARTESIANA DE Z

Conociendo al número complejo $Z = x + yi$ / $\{x ; y\} \subset \mathbb{R}$, su forma rectangular o cartesiana estará dada así : $\mathbf{Z = (x ; y)}$ / $\{x ; y\} \subset \mathbb{R}$ .El número Z queda representado en el plano complejo como el punto de coordenadas: x e y

Ejemplo.- *Representar en forma rectangular al número complejo.* $Z = 2 - i$

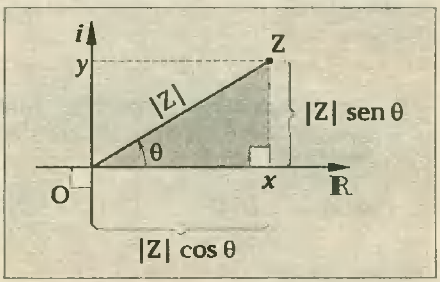
<u>**Resolución**</u>.-

El número : $Z = 2 - i$ expresado en forma rectangular será : $Z = (2 ; -1)$ .De este modo en el plano complejo se le ubicará según como se muestra en el gráfico adjunto.



13.10) FORMA POLAR O TRIGONOMETRICA DE Z

Esta se deduce a partir de la forma rectangular de Z para lo cual será necesario considerar a un ángulo θ llamado *argumento principal*, el cual será medido en sentido antihorario a partir del eje real hasta el segmento de recta que une el polo del plano complejo con el afijo del número complejo indicado.



Consideremos al número complejo :

$Z = x + yi$ / $\{x ; y\} \subset \mathbb{R}$, luego su forma rectangular será : $Z = (x ; y)$. En el plano complejo mostrado en la figura se ha sombreado el triángulo rectángulo, donde se puede deducir que :

$$x = |Z| \cos\theta \wedge y = |Z| \operatorname{sen}\theta \qquad \text{.........} \quad \text{(I)}$$

Pero : $$Z = x + yi \qquad \text{.........} \quad \text{(II)}$$

Luego reemplazando (I) en (II), se tendrá : $Z = |Z| \cos\theta + i|Z| \operatorname{sen}\theta$

De donde podemos concluir que :

$$\mathbf{Z = |Z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}$$ *Forma polar o trigonométrica de Z.*

Frecuentemente se suele utilizar la siguiente notación : $\mathbf{|Z| = cis\ \theta}$, para indicar que el número complejo Z está representado en forma polar o trigonométrica, a la cual se le llama : *Forma abreviada*.

El ángulo θ se obtiene de la siguiente relación :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \text{ , es decir : } \quad \boldsymbol{\theta = \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

θ es el menor ángulo medido en sentido antihorario cuya tangente es y/x

Ejemplo.- *Expresar al número complejo :* $Z = 1 + \sqrt{3}\ i$ *, en su forma polar.*

<u>**Resolución**</u>.-

La forma polar de Z será : $Z = |Z|\ \text{cis}\theta$

Hallemos $|Z|$ según el item 13.8A : $|Z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

Para hallar "θ" se plantea : $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Debemos tener en cuenta que : $Z = 1 + \sqrt{3}\,i = (1\ ;\ \sqrt{3}\,)$

Dado que este punto está ubicado en el primer cuadrante, deducimos que "θ" está en el primer cuadrante, y dado que :

$\text{tg}\,\theta = \sqrt{3}$, podemos deducir que : $\theta = 60^\circ$

Finalmente la forma polar del número complejo Z será : $Z = 2\ \text{cis}\ 60^\circ$

Observación.- Para el ángulo θ llamado argumento principal del número complejo Z, se debe tener en cuenta la siguiente notación : $\theta = \text{Arg}\,(Z)$

13.10A TEOREMAS.

Si $Z_1 = |Z_1|\ \text{cis}\ \theta_1 \ \wedge\ Z_2 = |Z_2|\ \text{cis}\theta_2$, son dos números complejos tal que $Z_2 \neq 0$, se cumple que :

I) Multiplicación.- $\boxed{Z_1 \,.\, Z_2 = |Z_1|.|Z_2|\ \text{cis}\ (\theta_1 + \theta_2)}$

II) División.- $\boxed{\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}\ \text{cis}\ (\theta_1 - \theta_2)}$

De los teoremas anteriores se pueden deducir las siguientes propiedades referidas al argumento :

a) $\text{Arg}\,(Z_1 \,.\, Z_2) = \text{Arg}\,(Z_1) + \text{Arg}\,(Z_2)$

b) $\text{Arg}\,(Z_1/Z_2) = \text{Arg}\,(Z_1) - \text{Arg}\,(Z_2)$

Considerando al número complejo: $Z = |Z|\ \text{cis}\ \theta$ y al número entero positivo "n", tenemos.

III) Potencia.- $\boxed{Z^n = [\,|Z|\ \text{cis}\ \theta]^n = |Z|^n\ \text{cis}\ (n\,\theta)}$

Solo en el caso que $|Z| = 1$, "n" podrá ser cualquier número entero.

IV) Radicación.- $\boxed{\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{|Z|\text{cis}\ \theta} = \sqrt[n]{|Z|}\ \text{cis}\left(\dfrac{2k\pi + \theta}{n}\right)}$

Donde "θ" debe estar expresado en *radianes* y el parámetro "k" podrá asumir los siguientes valores :

$k = 0; 1; 2; 3; \ldots\ldots\ldots\ldots; (n - 1)$ (valores notables)

13.11) FORMA FASORIAL DE Z

Dado el número complejo : $Z = x + yi \ / \ \{x \,;\, y\} \subset \mathbb{R}$, su forma fasorial será :

$$\boxed{Z = |Z| \underline{/\theta}} \quad , \quad \theta = \text{Argumento principal de } Z = \text{Arg}(Z)$$

Ejemplo.- *Expresar en forma fasorial al número complejo* $Z = 1 + i$

Resolución.-

Para expresar al número complejo Z en su forma fasorial, será necesario conocer su módulo y su argumento principal. Veamos :

Para el módulo tendremos : $|Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Para el argumento principal θ , se sabe que : $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1$

Observar que $Z = 1 + i$, se encuentra ubicado en el primer cuadrante, en consecuencia : $\theta = 45^\circ$

Finalmente la forma fasorial del número complejo Z será : $Z = |Z| \underline{/\theta} = \sqrt{2}\ \underline{/45^\circ}$

13.12) FORMA EXPONENCIAL DE Z

Dado el número complejo : $Z = x + yi \ / \ \{x \,;\, y\} \subset \mathbb{R}$, su forma exponencial será :

$$\boxed{Z = |Z|\, e^{\theta i}} \quad , \quad \text{donde : } e \approx 2{,}7182$$

Además "θ" se debe expresar en *radianes*.

Ejemplo.- *Expresar en su forma exponencial al número complejo :* $Z = \sqrt{3} + i$

Resolución.-

La forma exponencial de Z será : $Z = |Z|\, e^{\theta i}$ .... (I)

Del dato hallamos el módulo de Z : $|Z| = \sqrt{\sqrt{3}^{\,2} + 1^2} = 2$ .... (item 13.8A)

Ahora hallamos su argumento principal : θ $\quad \text{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Observar las coordenadas de Z $(\sqrt{3}\ ;\ 1)$, deducimos que se encuentra ubicado en el primer cuadrante, en consecuencia :

$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Finalmente en (I) se tendrá : $Z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ *Forma exponencial de Z*

13.12A RELACION ENTRE LAS FORMAS: EXPONENCIAL Y POLAR.

Consideramos al número complejo : $Z = x + yi \ / \ \{x ; y\} \subset \mathbb{R}$

Luego su forma exponencial será : $Z = |Z|\, e^{\theta i}$ .... (I)

Recordemos que la forma polar de Z viene dada así : $Z = |Z|\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ .... (II)

Igualando los segundos miembros de (I) y (II), se tendrá : $|Z|\, e^{\theta i} = |Z|\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

Es decir : $$e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Relación comúnmente conocida con el nombre de su descubridor : *Fórmula de Euler*

Observación.- *Teniendo en cuenta la relación anterior también se podrá deducir esta nueva relación :*

$$e^{-\theta i} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$$

13.12B TEOREMAS.

Consideremos a los números complejos : $Z_1 = |Z_1|\, e^{\theta_1 i} \ \wedge \ Z_2 = |Z_2|\, e^{\theta_2 i}$, tal que : $Z_2 \neq 0$, se tendrá :

I) Multiplicación : $$Z_1 . Z_2 = |Z_1| . |Z_2|\, e^{(\theta_1 + \theta_2)i}$$

II) División : $$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}\, e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$$

Para el número complejo : $Z = |Z|\, e^{\theta i}$ y el número entero positivo "n" , tenemos :

III) Potencia : $$Z^n = \left[|Z| e^{\theta i}\right]^n = |Z|^n\, e^{n\theta i}$$

Solo en el caso de que : $|Z| = 1$, "n" podrá ser cualquier número entero.

Observaciones.- *Para la resolución de algunos problemas se deberá tener en cuenta las siguientes propiedades :*

a) $e^{\theta i} . e^{-\theta i} = e^{0i} = 1$

b) $\dfrac{1}{e^{\theta i}} = e^{-\theta i}$

c) $e^{n\pi i} = (-1)^n$ .... $\forall\, n \in \mathbb{Z}$

d) Si : $e^{\theta_1 i} = e^{\theta_2 i} \ \Rightarrow \ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ .... $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

13.13) RAICES CUBICAS DE LA UNIDAD

Consideremos al número complejo: $Z = 1$ el cual se podrá escribir así :

$$Z = 1 + 0i = 1$$

Para poder utilizar el teorema (IV) expuesto en el item 13.10A será necesario expresar Z en su forma polar, luego : $Z = \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ = 1$

Extrayendo raíz cúbica a ambos miembros obtenemos : $\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ}$

Aplicando el teorema IV del item 13.10, tendremos : $\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi + 0}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi + 0}{3}\right)$

Luego de hacer reducciones , nos queda : $\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

De aquí obtenemos las tres raíces cúbicas de la unidad, así :

Si $k = 0$: $\sqrt[3]{1} = \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\sqrt[3]{1} = 1}$

Si $k = 1$: $\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

Si $k = 2$: $\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

Convencionalmente a la expresión : $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, se le representa con la letra w es decir : $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = w$ .... (α)

Si ambos miembros de la relación (α) se elevan al cuadrado se obtendrá : $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = w^2$

Razón por la cual se concluye que las tres raíces cúbicas de la unidad son : $1 , w \wedge w^2$

13.13A PROPIEDADES DE LAS RAICES CUBICAS DE LA UNIDAD.

I) $\mathbf{1 + w + w^2 = 0}$

II) $\mathbf{w^{3k} = 1}$ .... $\forall k \in \mathbb{Z}$

III) $\mathbf{w^{3k+n} = w^n}$ .... $\forall \{k ; n\} \subset \mathbb{Z}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

20.- El equivalente de : $Z = \dfrac{1+\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}$; $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ **es :**

A) $e^{-\theta i}$ B) $e^{\theta i}$ C) $e^{-\frac{\theta}{2}i}$ D) $e^{\frac{\theta}{2}i}$ E) 1

Resolución.-

Recordar las siguientes transformaciones trigonométricas : $\mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\theta}{2}\,.\,\cos\,\dfrac{\theta}{2}$

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

Ahora reemplazando en la expresión dada se tendrá : $Z = \dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2} + i.2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2} - i.2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}$

Extrayendo factor común de ambos términos : $Z = \dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)}$

Simplificando tenemos : $Z = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}$

Luego ,utilizando las fórmulas dadas en el item 13.12A ,al número complejo Z se le podrá expresar así : $Z = \dfrac{e^{\frac{\theta}{2}i}}{e^{-\frac{\theta}{2}i}}$

Finalmente de acuerdo al teorema (II) expuesto en el item 13.12B, se tendrá :

$$Z = e^{\theta i}$$

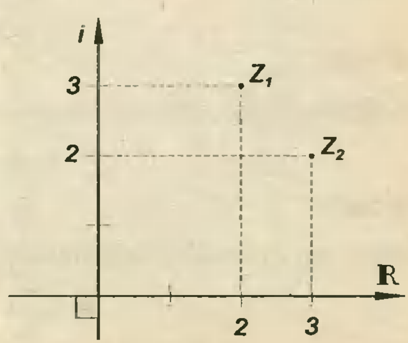
RPTA. B

21.- En base al diagrama adjunto , proporcionar Z_1/Z_2

A) $12 + 5i$ B) $\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i$

C) $5 + 12i$ D) $\dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}i$

E) $\dfrac{12}{13} - \dfrac{5}{13}i$



Resolución.-

Observar que la fórmula rectangular de los números complejos $Z_1 \wedge Z_2$ son :

$$Z_1 = (2\,;3) \Rightarrow Z_1 = 2+3i$$

$$Z_2 = (3\,;2) \Rightarrow Z_2 = 3+2i$$

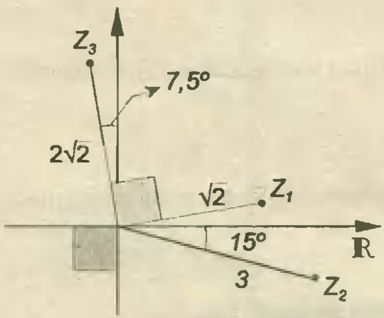
Se pide : $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{2+3i}{3+2i}$

De acuerdo al item 13.6A, debemos proceder así :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12+5i}{13} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$$

RPTA. D

22.- A partir del gráfico adjunto , proporcionar el valor de : $\dfrac{Z_1.Z_2}{Z_2}$



A) $\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{2}i$

B) $-\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$

C) $\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2}i$

D) $-\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{2}i$

E) $-\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$

Resolución.-

Teniendo en cuenta al item 13.10 los números complejos Z_1, $Z_2 \wedge Z_3$, se podrán expresar así :

$$Z_1 = |Z_1|\,(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$$

Del gráfico: $Z_1 = \sqrt{2}\,[\cos(7{,}5^\circ) + i\,\text{sen}\,(7{,}5^\circ)]$

$$Z_2 = |Z_2|\,(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

Del gráfico : $Z_2 = 3[\cos(345^\circ) + i\,\text{sen}\,(345^\circ)]$

$$Z_3 = |Z_3| = (\cos\theta_3 + i\,\text{sen}\,\theta_3)$$

Del gráfico : $Z_3 = 2\sqrt{2}\,[\cos(97{,}5^\circ) + i\,\text{sen}\,(97{,}5^\circ)]$

Hallemos : $Z_1.Z_3$, utilizando el teorema (I) expuesto en el item 13.10A.

$$Z_1.Z_3 = 4\,[\cos(105^\circ) + i\,\text{sen}\,(105^\circ)]$$

También : $Z_2 = 3\,[\cos(345^\circ) + i\,\text{sen}\,(345^\circ)]$

Dividiendo ambas relaciones miembro a miembro se tendrá :

$$\frac{Z_1.Z_3}{Z_2} = \frac{4[\cos(105^\circ)+i\,\text{sen}(105^\circ)]}{3[\cos(345^\circ)+i\,\text{sen}(345^\circ)]}$$

Utilizando el teorema (II) del item 13.10A se obtiene :

$$\frac{Z_1.Z_3}{Z_2} = \frac{4}{3}\,[\cos(-240^o) + i\,\text{sen}\,(-240^o)]$$

Reduciendo los ángulos negativos al primer cuadrante tenemos :

$$\frac{Z_1.Z_3}{Z_2} = \frac{4}{3}\,(-\cos 60^o + i\,\text{sen}\,60^o)$$

Finalmente : $$\frac{Z_1.Z_3}{Z_2} = -\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$$ **RPTA. B**

23.- Si : $I_{m\{Z\}} = \frac{\pi}{3}$, calcular : $T = \dfrac{e^{R_{e(Z)}} + e^{R_{e(\bar{Z})}}}{e^{Z} + e^{\bar{Z}}}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 5* *E) 1/2*

Resolución.-

Consideramos al número complejo : $Z = x + yi\ /\ \{x\,;y\} \subset \mathbb{R}$, observamos que :

$$\bar{Z} = x - yi \ \wedge\ R_{e\{Z\}} = R_{e\{\bar{Z}\}} = x$$

En consecuencia la expresión a calcular será : $$T = \frac{e^x + e^x}{e^{x+yi} + e^{x-yi}}$$

$$T = \frac{2e^x}{e^x.e^{yi} + e^x.e^{-yi}}$$

Factorizando y simplificando e^x del numerador y denominador de la expresión, obtendremos : $$T = \frac{2}{e^{yi} + e^{-yi}}$$

Utilizando en el denominador las fórmulas expuestas en el item 13.12A, se tendrá : $$T = \frac{2}{2\cos y} = \frac{1}{\cos y} \quad \text{........... (I)}$$

Ahora debemos recordar que : $$y = I_{m\{Z\}} = \frac{\pi}{3} \quad \text{.............. (II)}$$

Finalmente reemplazando (II)en (I), tendremos : $$T = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

De lo cual se concluye que : **T = 2** **RPTA. B**

24.- Determinar una de las raíces cúbicas del número complejo : Z = - i

A) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i$ *B)* $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *C)* $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ *D)* $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ *E)* $\sqrt{3} + i$

Resolución.-

Para poder utilizar el teorema (IV) expuesto en el item 13.10A será necesario expresar al número complejo $Z = -i$, en su forma polar. Para ello debemos reconocer que : $|Z| = 1 \ \wedge \ \theta = \frac{3\pi}{2}$

En consecuencia : $Z = -i$, en forma polar será : $Z = |Z| \text{ cis } \theta = 1 \text{ cis } \frac{3\pi}{2}$

Extrayendo raíz cúbica se tiene : $\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{\text{cis} \frac{3\pi}{2}} = \text{cis}\left(\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right)$ ....(*)

Si : $k = 0$: $\sqrt[3]{Z} = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = \cos\frac{\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{\pi}{2} = i$

Si : $k = 1$: $\sqrt[3]{Z} = \text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = \cos\frac{7\pi}{6} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Si : $k = 2$: $\sqrt[3]{Z} = \text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = \cos\frac{11\pi}{6} + i \text{ sen } \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ **RPTA. C**

25.- Hallar "n" de : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n = -i$, si es el menor entero positivo de 4 cifras.

A) 1000 *B) 1002* *C) 1005* *D) 1007* *E)1012*

Resolución.-

Empleando la notación expuesta en el item 13.12 , expresaremos en su forma exponencial a ambos miembros de la igualdad : $e^{\frac{n\pi i}{6}} = e^{\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)i}$

En virtud a las observaciones del Teorema III del item 13.12B, podemos establecer que : $\frac{n\pi}{6} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

Despejando "n" se obtiene : $n = 12k + 9$ .... (I)

Ahora por condición del problema "n" debe ser el menor entero positivo de 4 cifras, esto significa que : $n \geq 1000$ .... (II)

Reemplazando (I) en (II) se obtiene : $k \geq 82{,}583$ .... (III)

De la relación (II) notamos que si "n" es mínimo, "k" también será mínimo, en consecuencia : $k_{\text{mín}} = 83$ .....($k \in \mathbb{N}$)

Finalmente reemplazando en la relación (I) se concluye que el menor valor de n será. $n_{\text{mín}} = 12 \cdot 83 + 9$

$n_{\text{mín}} = 1\,005$ **RPTA. C**

26.- Si : 1, $w \wedge w^2$ son las tres raíces cúbicas de la unidad; hallar el equivalente de :

$$(1 + w - w^2)(1 + w^2 - w^4)(1 + w^4 - w^8)(1 + w^8 - w^{16}) \ldots\ldots\ldots \text{"}6n\text{" factores}$$

A) 32n *B) 32^n* *C) 64n* *D) 64^n* *E) 2^n*

Resolución.-

Sea T el equivalente de la expresión dada :

$$T = (1 + \omega - \omega^2)(1 + \omega^2 - \omega^4)(1 + \omega^4 - \omega^8)(1 + \omega^8 - \omega^{16}) \ldots\ldots\ldots \text{"}6n\text{" factores}$$

Empleando la propiedad (III) expuesta en el item 13.13A, en cada factor de la expresión T se tendrá :

$$T = (1 + \omega - \omega^2)(1 + \omega^2 - \omega)(1 + \omega - \omega^2)(1 + \omega^2 - \omega) \ldots\ldots\ldots \text{"}6n\text{" factores}$$

Observar que en la multiplicación solo intervienen alternadamente los factores :

$$(1 + \omega - \omega^2)(1 + \omega^2 - \omega^4)$$

Como en total son "6n" Factores , fácilmente podemos deducir que los factores :

$(1 + \omega - \omega^2)$ y $(1 + \omega^2 - \omega)$ se repiten "3n" veces cada uno.

$$T = \underbrace{(1 + \omega - \omega^2)(1 + \omega - \omega^2) \ldots\ldots\ldots}_{3n \text{ factores}} \underbrace{(1 + \omega^2 - \omega)(1 + \omega^2 - \omega) \ldots\ldots\ldots}_{3n \text{ factores}}$$

Utilizando los teoremas de exponentes obtenemos :

$$T = (1+\omega-\omega^2)^{3n} \cdot (1+\omega^2-\omega)^{3n} = [(1+\omega-\omega^2)(1+\omega^2-\omega)]^{3n} \quad \ldots. (\alpha)$$

Recordando la propiedad de las raices cúbicas de i expuesta en el item 13.13A, tendremos :

$$1 + \omega + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 + \omega = -\omega^2 \\ 1 + \omega^2 = -\omega \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Reemplazando (β) en(α) se tendrá : $T = [(-2\omega^2)(-2\omega)]^{3n} = (4\omega^3)^{3n}$

Recordando que : $\omega^{3k} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, la expresión final para T será : $T = (4.1)^{3n} = (4)^{3n} = (4^3)^n$

$$\therefore \quad T = 64^n \qquad \textbf{RPTA. D}$$

MISCELANEA

27.- Simplificando la expresión : $T = \dfrac{(1+i)^3+(1-i)^3}{(1+i)^3-(1-i)^3}$ ***, nos queda :***

A) i *B) -i* *C) 2i* *D) -2i* *E) 3i*

Resolución.-

Desarrollando la potencia : $(1+i)^3 = (1+i)^2\,(1+i) = (2i)\,(1+i) = 2i-2$ .... (I)

Del mismo modo encontramos : $(1-i)^3 = (1-i)^2\,(1-i) = (-2i)\,(1-i) = -2i-2$ .... (II)

Efectuando (I) + (II) : $(1+i)^3 + (1-i)^3 = -4$

Efectuando (I) - (II) : $(1+i)^3 - (1-i)^3 = 4i$

Finalmente reemplazando en "T", se tendrá : $T = \dfrac{-4}{4i} = -\dfrac{1}{i} = -(-i) \Rightarrow$ **T= *i*** **RPTA. A**

28.- El equivalente de : $\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$ ***, es***

A) i *B) 1 - i* *C) 1 + i* *D) -i* *E) 1*

Resolución.-

Haciendo que "T" sea el equivalente de la expresión dada, emplearemos la tabla de equivalencias del item 13.3 : $T = \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i^5}}}}$

Luego de simplificar la potencia y el radical nos queda : $T = \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+i}}}$

Efectuando la adición indicada : $T = \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}}$

Sustituyendo $2i$ por su equivalente binómico $(1+i)^2$: $T = \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{(1+i)^2}}}$

Simplificando la potencia con el radical : $T = \sqrt{2\sqrt{i-(1+i)}} = \sqrt{2\sqrt{-1}}$

Si sustituimos $\sqrt{-1}$ por i, la expresión se reduce a : $T = \sqrt{2i} = \sqrt{(1+i)^2}$

Finalmente , al simplificar el radical con el exponente : $\mathbf{T = 1 + i}$

RPTA. C

29.- Halle los valores de "a" y "b" tal que : $\frac{1}{a+bi}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 1+i$ ***. Indicar por respuesta :*** $a+2b$

A) 1 ***B) -1*** ***C) 0*** ***D) 2*** ***E) -2***

Resolución.-

Hallemos el equivalente de $\frac{1+i}{1-i}$, para lo cual multiplicaremos y dividiremos por $(1+i)$:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

Ahora en la igualdad dada se tendrá : $\frac{1}{a+bi} + (i)^2 = 1+i$ ....(1)

Asimismo debemos recordar que : $i^2 = -1$ ....(2)

Luego reemplazamos (2) en (1): $\frac{1}{a+bi} + (-1) = 1+i$

Transponiendo -1 al 2do miembro : $\frac{1}{a+bi} = 2+i$

Intercambiando los términos de la igualdad : $\frac{1}{2+i} = a+bi$ ....(3)

Transformando el 1er miembro : $\frac{2-i}{(2+i)\,(2-i)} = \frac{2-i}{2^2-i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ ...(4)

Reemplazando (4) en (3) , tendremos : $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i = a+bi$

Y de acuerdo al item 13.4B debe cumplirse que : $a = \frac{2}{5} \wedge b = -\frac{1}{5}$

Finalmente : $a + 2b = 0$ **RPTA. C**

30.- Reducir : $T = (11+2i)^{17} + (1+2i)^{51} + 1$

A) 1 ***B) - 1*** ***C) i*** ***D) -i*** ***E) 2***

Resolución.-

Reduciendo la potencia : $(1+2i)^{51}$: $(1+2i)^{51} = \left[(1+2i)^3\right]^{17}$

Desarrollando el binomio al cubo : $(1+2i)^{51} = \left[1^3+3(1)^2(2i)+3(1)(2i)^2+(2i)^3\right]^{17}$

Efectuando las potencias y multiplicaciones : $(1+2i)^{51} = [1+6i-12-8i]^{17}$

Reduciendo en el corchette se tendrá : $(1+2i)^{51} = [-11-2i]^{17} = [-(11+2i)]^{17}$

Esto significa que : $(1+2i)^{51} = -(11+2i)^{17}$

Finalmente reemplazando lo obtenido en la expresión "T", obtenemos : $T = (11+2i)^{17} - (11+2i)^{17} + 1$

$\therefore$ **T = 1** **RPTA. A**

31.- A partir de : $\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{i+1}\right)\left(1+\frac{1}{i+2}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{i+99}\right) = a+bi$***, calcular : "a - b"***

A) 99 ***B) 100*** ***C) 101*** ***D) -100*** ***E) -101***

Resolución.-

Si efectuamos la operación indicada en cada paréntesis la igualdad será : $\left(\cancel{\frac{i+1}{i}}\right)\left(\frac{i+2}{\cancel{i+1}}\right)\left(\frac{i+3}{i+2}\right)\ldots\ldots\ldots\left(\frac{i+100}{i+99}\right) = a+bi$

Simplificando cuidadosamente en el 1er miembro : $\frac{i+100}{i} = a+bi$

Multiplicando ambos miembros por i : $100 + i = ai + bi^2$

Reemplazando i^2 por -1 , la igualdad queda así : $100 + i = -b + ai$

De esta igualdad se cumple que : $100 = -b \Rightarrow b = -100 \wedge a = 1$

Finalmente , lo solicitado queda así: $a - b =$ **101** **RPTA. C**

32.- Si : $F(a+bi) = \frac{a+i}{1-bi}$ ***, halle un equivalente de :*** $F(\sqrt{i})$

A) 1 ***B) -1*** ***C) i*** ***D) -i*** ***E) 2***

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en hallar alguna relación de : $F(\sqrt{i})$ con $F(a+bi)$; para ello seguiremos el siguiente proceso :

Dada la siguiente igualdad : $i = 0 + i$

La expresaremos en su forma exponencial : $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ .... $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

Extrayendo a ambos miembros signo radical de índice 2 : $\sqrt{i} = \sqrt{e^{\frac{\pi}{2}i}} \Rightarrow \sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i}$

Utilicemos la fórmula de Euler en el 2do miembro : $\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}$

Remplazando los valores trigonométricos, tendremos : $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ......(*)

De (*) se puede afirmar que : $F(\sqrt{i}) = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ ......(**)

Para poder aplicar el dato: $F(a+bi) = \frac{a+i}{1-bi}$ en (**), debemos reconocer que : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. y,

$b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego : $F(\sqrt{i}) = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \dfrac{\sqrt{2}+2i}{2-\sqrt{2}i}$

Para efectuar la división, multiplicamos al numerador y denominador por $2 + \sqrt{2}\,i$: $F(\sqrt{i}) = \dfrac{(\sqrt{2}+2i)\,(2+\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}-2i)\,(2+\sqrt{2}i)}$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $F(\sqrt{i}) = \dfrac{6i}{2^2 - (\sqrt{2}i)^2}$

Después de efectuar, nos queda : $F(\sqrt{i}) = i$ **RPTA. C**

33.- Calcular |Z| si : $Z = \dfrac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)i}{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)i}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) $\sqrt{2}$* *E) $\sqrt{3}$*

Resolución.-

Por definición de módulo de un complejo, tendremos que : $|Z| = \left|\dfrac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)i}{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)i}\right|$

Aplicando ahora la propiedad V del item 13.8 referida al cociente de dos números complejos, tendremos : $|Z| = \dfrac{|(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)i|}{|(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)i|}$

Encontramos los módulos por separado : $|Z| = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2}}$

Finalmente : $|Z| = 1$ **RPTA. A**

34.- Expresar en forma cartesiana al complejo :

$$Z = \frac{(\cos 17^\circ + i\,\mathrm{sen}\,17^\circ)^3\,[\sqrt{2}(\cos 28^\circ + i\,\mathrm{sen}\,28^\circ)]^2}{(\cos 7^\circ + i\,\mathrm{sen}\,7^\circ)^{11}}$$

A) $(\sqrt{2}\ ;\ 1)$ *B) $(\sqrt{3}\ ;\ -1)$* *C) $(\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3})$* *D) $(\sqrt{3}\ ;\ 1)$* *E) $(1\ ;\ \sqrt{3})$*

Resolución.-

Expresemos a cada complejo en su forma exponencial : $Z = \dfrac{\left(e^{i17^\circ}\right)^3 . \left(\sqrt{2}e^{i28^\circ}\right)^2}{\left(e^{i7^\circ}\right)^{11}}$

Efectuando operaciones en los exponentes : $Z = \dfrac{\left(e^{i51^\circ}\right).\left(2e^{i56^\circ}\right)}{\left(e^{i77^\circ}\right)}$

Luego de aplicar los teoremas de exponentes, tendremos : $Z = 2.e^{i51^\circ}.e^{i56^\circ}.e^{-i77^\circ} = 2.e^{i30^\circ}$

De acuerdo con el item 13.12A, esta expresión equivale a : $Z = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$

Sustituyendo los valores trigonométricos, tendremos : $Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

Finalmente, nos queda : $Z = \sqrt{3} + i = (\sqrt{3}\ ;\ 1)$ **RPTA. D**

35.- Halle un número complejo cuyo conjugado multiplicado por : (1 + i) da el número complejo :

$$\frac{870}{11+13i}$$

A) 3 + 36i B) 3 - 36i C) -3 - 36i D) -3 + i E) -3 + 36i

Resolución.-

Sea $\bar{Z}$ el conjugado del número buscado, entonces : $\bar{Z}(1+i) = \frac{870}{11+13i}$

Transformando el 2do miembro obtenemos : $\bar{Z}.(1+i) = \frac{870}{11+13i}\frac{(11-13i)}{(11-13i)}$

Efectuando las operaciones indicadas : $\bar{Z}.(1+i) = \frac{870(11-13i)}{11^2-(13i)^2}$

Luego de operar y simplificar, nos queda : $\bar{Z}.(1+i) = 3(11-13i)$

Transponiendo términos, tendremos : $\bar{Z} = \frac{3(11-13i)}{1+i}$

Transformando el 2do miembro se tendrá : $\bar{Z} = \frac{3(11-13i)}{1+i}\frac{(1-i)}{(1-i)}$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $\bar{Z} = \frac{3(-2-24i)}{2}$

Luego de simplificar nos queda : $\bar{Z} = -3 - 36i$

Ahora tomamos el conjugado a ambos miembros : $\overline{(\bar{Z})} = \overline{(-3-36i)}$

Y por propiedad de conjugados, obtendremos : $\mathbf{Z = -3 + 36i}$ **RPTA. E**

36.- El equivalente de : $\left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^4 + \left(\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^4$ ***, es :***

A) i B) $\sqrt{7}\,i$ C) -i D) $-\sqrt{7}\,i$ E) 1

Resolución.-

Sea "T" es el equivalente de la expresión luego se tendrá : $T = \dfrac{(1+\sqrt{7}i)^4 + (1-\sqrt{7}i)^4}{16}$

Transformando el numerador así : $T = \dfrac{[(1+\sqrt{7}i)^2]^2 + [(1-\sqrt{7}i)^2]^2}{16}$

Desarrollando cada binomio entre corchetes se tendrá : $T = \dfrac{(-6+2\sqrt{7}i)^2 + (-6-2\sqrt{7}i)^2}{16}$

Dando forma al numerador para poder aplicar la equivalencia de Legendre : $T = \dfrac{(2\sqrt{7}i-6)^2 + (2\sqrt{7}i+6)^2}{16}$

Por la equivalencia de Legendre : $T = \dfrac{2[(2\sqrt{7}i)^2 + 6^2]}{16}$

Efectuando las potencias, tendremos : $T = \dfrac{-28+36}{8}$

Finalmente luego de simplificar, obtenemos : $\boxed{T = 1}$ **RPTA. E**

37.- ¿Cuál es el menor valor de "n" que verifica : $(1 + i)^n = 32i$

A) 5 *B) 6* *C) 10* *D) 4* *E) 8*

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en dar forma de una potencia de $(1 + i)$ al 2^{do} miembro, veamos : $32\,i - 2^5\,i = 2^5\,i^5 = (2\,i)^5$

De acuerdo con lo expuesto en el item 13.6 podemos sustituir : $2\,i$ por $(1 + i)^2$. En consecuencia es válido plantear : $32\,i = \left[(1+i)^2\right]^5 = (1+i)^{10}$

Asi pues la igualdad dada se podrá escribir asi : $(1+i)^n = (1+i)^{10}$

Finalmente por comparación podemos deducir fácilmente que : $\boxed{n = 10}$ **RPTA. C**

38.- Si "w" es una de las tres raíces cúbicas de la unidad , mostrar el equivalente de :

$$\sqrt[3]{\frac{(1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4)(1+w^5)}{(1+w-w^2)^3 + (1-w+w^2)^3}}$$

A) -1/8 *B) 1/4* *C) -1/2* *D) 1/6* *E) 1/2*

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en aplicar todas las propiedades vistas para las raices cúbicas de 1 expuestas en el item 13.13A. Veamos :

Recordando que $\omega^3=1$, tendremos : $$T = \sqrt[3]{\frac{(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1+\omega)(1+\omega^2)}{(1+\omega-\omega^2)^3+(1-\omega+\omega^2)^3}}$$

Efectuando nos queda : $$T = \sqrt[3]{\frac{(1+\omega)^2(2)(1+\omega^2)^2}{(1+\omega-\omega^2)^3+(1-\omega+\omega^2)^3}} \quad ....(1)$$

Asimismo recordemos que : $1+\omega+\omega^2=0 \Rightarrow 1+\omega=-\omega^2 \wedge 1+\omega^2=-\omega$ ......(2)

Reemplazando (2)en (1), se tendrá : $$T = \sqrt[3]{\frac{(-\omega^2)^2(2)(-\omega)^2}{(-\omega^2-\omega^2)^3+(-\omega-\omega)^3}}$$

Efectuando y reduciendo, nos queda : $$T = \sqrt[3]{\frac{2\omega^6}{-8\omega^6-8\omega^3}} \quad ....(*)$$

Teniendo en cuenta que : $\omega^{3k}=1 \ \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \omega^3=1 \wedge \omega^6=1$ ....(**)

Reemplazando (**) en (*), el valor de "T" será : $$T = \sqrt[3]{\frac{2(1)}{-8(1)-8(1)}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$$

$\therefore$ **T = - 1/2** **RPTA. C**

39.- ¿Para qué valores de "n" se cumple la siguiente igualdad : $\sqrt[n!+1]{\frac{(i^{n!})^{n!}}{i^{12n!+1}}} = i$ ***? Dar por respuesta la suma de dichos valores .***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Recordando que : $i^{4k+m} = i^m$, diremos que $i^{12\cdot n!+1} = i$, de este modo la igualadad queda así : $\sqrt[n!+1]{\frac{(i^{n!})^{n!}}{i}} = i$

Reduciendo la expresión subradical, tendremos : $\sqrt[n!+1]{i^{(n!)^2-1}} = i$

Por diferencia de cuadrados, se tendrá : $\sqrt[n!+1]{i^{(n!+1)(n!-1)}} = i$

Simplificando el exponente con el índice del radical : $i^{n!-1} = i$

Y puesto que $i = i^{4k+1}$, tendremos : $i^{n!-1} = i^{4k+1}$

Igualando los exponentes, se tendrá : $n! - 1 = 4k + 1$

Transponiendo términos obtenemos : $n! = 4k + 2$ ....(*)

Debemos reconocer que : $n!$ = múltiplo de 4 $\Leftrightarrow$ $n \geq 4$. Pero de (*), diremos también que $n!$ debe ser un múltiplo de 4 más 2 ,y si revisamos la tabla de factoriales concluiremos que esto solo puede ocurrir cuando : $n < 4$. A partir de esta conclusión y dando valores a k , deduciremos todos los valores de "n" que verifican esta última desigualdad :

Si : $k = 0 \Rightarrow n! = 2 \quad \therefore \quad n = 2$

Si : $k = 1 \Rightarrow n! = 6 \quad \therefore \quad n = 3$

Finalmente : $\boxed{\Sigma n = 5}$ **RPTA. E**

40.- Si $\{Z ; w\} \subset \mathbb{C}$ proporcionar el equivalente de : $T = R_{e\left\{\frac{Z}{Z+w}\right\}} + R_{e\left\{\frac{w}{w+Z}\right\}}$

A) 0 B) 1 C) -i D) i E) F.D

<u>Resolución</u>.-

Sean : $Z_1 \wedge Z_2 \subset \mathbb{C}$ / $Z_1 = x_1 + y_1 i \;\wedge\; Z_2 = x_2 + y_2 i$. Ahora podemos establecer que :

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

De aquí podemos observar que : $R_{e\{Z_1+Z_2\}} = R_{e\{Z_1\}} + R_{e\{Z_2\}}$

En nuestro problema "T" se podrá escribir así : $T = R_{e\left\{\frac{Z}{Z+w} + \frac{w}{w+Z}\right\}}$

Efectuando el contenido entre las llaves, tendremos : $T = R_{e\{1\}}$

$\therefore \quad \boxed{T = 1}$ **RPTA. B**

41.- Si $Z \subset \mathbb{C}$ / $|Z + 9| = 3\,|Z + 1|$; calcular $|Z|$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

<u>Resolución</u>.-

Consideremos al complejo : $Z = x + yi$, donde su módulo estará dado así :

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{..................(1)}$$

En la igualdad dada : $|Z + 9| = 3|Z + 1|$

Reemplazando Z por $(x + yi)$: $|x + yi + 9| = 3\,|x + yi + 1|$

Agrupando las partes reales : $|(x + 9) + yi| = 3|(x + 1) + yi|$

Por definición de módulo : $\sqrt{(x+9)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado se tendrá : $(x + 9)^2 + y^2 = 9[(x+1)^2 + y^2]$

Efectuando y simplificando obtenemos : $x^2 + y^2 = 9$ ....(2)

Finalmente de (2) en (1) : $\boxed{|Z| = 3}$ **RPTA. C**

42.- Entre los números complejos Z que satisfacen la condición : |Z - 5i| = 3 . Hallar el número complejo que tiene argumento positivo mínimo

A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ *B)* $\frac{12}{5}-\frac{16}{5}i$ *C)* $\frac{3}{5}+\frac{16}{5}i$ *D)* $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ *E)* $\frac{12}{5}+\frac{16}{5}$

Resolución.-

Consideremos al número complejo : $Z = x + yi \;/\; \{x\,;\,y\} \subset \mathbb{R}$. Ahora reemplazando esta expresión en la condición dada se tendrá :

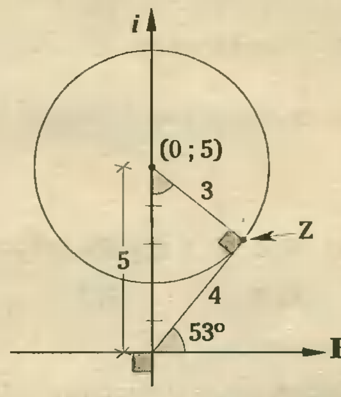
$$|x + (y-5)i| = 3$$

Aplicando la propiedad de módulo y elevando al cuadrado a ambos miembros obtenemos :

$$x^2 + (y-5)^2 = 3^2.$$

Debemos reconocer que la ecuación obtenida corresponde a la Ecuación de una circunferencia de centro en: (0 ; 5) y radio : 3 . Este resultado se interpreta así :" Todos los números complejos $Z / |Z - 5i| = 3$, se encuentran en una circunferencia de radio 3 y centro en (0;5) ubicados en el plano complejo".

Observar que el afijo del número complejo de menor argumento positivo queda determinado por la intersección de la tangente trazada a la circunferencia y la perpendicular trazada desde el centro: (0 ; 5)



Finalmente con la ayuda del gráfico podemos deducir que :

$|Z| = 4 \wedge \text{Arg}(Z) = 53°$, con lo cual el número complejo Z se podrá expresar en forma polar así :

$$Z = 4(\cos 53° + i \text{ sen } 53°) = 4\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)$$

En consecuencia el número complejo pedido será :

$$Z = \frac{12}{5} + \frac{16}{5}i$$

RPTA. E

43.- Halle el módulo máximo de aquel número complejo Z que satisface : |Z - Z⁻¹| = 2

A) $\sqrt{2}-1$ *B)* $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ *C)* $\sqrt{3}+1$ *D)* $\sqrt{2}+1$ *E)* $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Resolución.-

A partir de la condición tendremos que :

$$\left|\frac{Z^2-1}{Z}\right| = 2$$

Utilizando la V Propiedad del item 13.8B, nuestra igualdad quedará así :

$$\frac{|Z^2-1|}{|Z|} = 2$$

Multiplicando ambos miembros por $|Z|$: $|Z^2-1| = 2|Z|$ .... (1)

Utilizando la expresión polar de Z : $Z = |Z|\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

La relación (1) nos sugiere elevar al cuadrado a ambos miembros, obteniéndose : $Z^2 = |Z|^2\,(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$ ...(2)

Luego reemplazando (2) en (1), se tendrá : $\left|\,|Z|^2\,(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) - 1\right| = 2|Z|$

Efectuando la multiplicación indicada : $\left|(\,|Z|^2 \cos 2\theta - 1) + i\,|Z|^2 \operatorname{sen} 2\theta\right| = 2|Z|$

Utilizando la definición de módulo de un complejo, el 1^er^ miembro quedará así :

$$\sqrt{(|Z|^2 \cos 2\theta - 1)^2 + (|Z|^2 \operatorname{sen} 2\theta)^2} = 2|Z|$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros, efectuando y reduciendo, se obtiene :

$$|Z|^4 - 2|Z|^2\,(\cos 2\theta + 2) + 1 = 0$$

Utilizando la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática tendremos :

$$|Z|^2 = \frac{2(\cos 2\theta + 2) \pm \sqrt{4(\cos 2\theta + 2)^2 - 4}}{2}$$

Efectuando y simplificando, obtenemos :

$$|Z|^2 = (\cos 2\theta + 2) \pm \sqrt{(\cos 2\theta + 2)^2 - 1}$$

Como se pide $|Z|$ máximo solo se considera la solución positiva :

$$|Z|^2 = (\cos 2\theta + 2) + \sqrt{(\cos 2\theta + 2)^2 - 1}$$

Observa que : $|Z|^2$ es máximo si y solo si $\cos 2\theta$ es también máximo, por lo tanto $\cos 2\theta = 1$. Luego :

$$|Z|^2_{máx} = 3 + \sqrt{8}$$

Extrayendo raíz cuadrada, tendremos :

$$|Z|_{máx} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

Finalmente aplicando transformaciones de radicales dobles a simples, se concluye :

$$|Z|_{máx} = \sqrt{2} + 1$$

RPTA. D

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- No representa una expresión imaginaria :

A) $\sqrt{-2}$ B) $\sqrt[98]{-5}$ C) $\sqrt[1992]{-1}$

D) $\sqrt[3]{-2}$ E) $\sqrt{-1}$

2.- No es un número complejo

A) 2 B) $3i$ C) $1 - i$ D) $5+\sqrt{3}\ i$ E) N.A.

3.- Si $\overline{Z}$ representa al conjugado de Z, con respecto a la adición $\overline{Z} + Z$, es correcto afirmar que :

A) Tiene módulo igual a 1

B) Es un número imaginario puro

C) Es un número real

D) Es el complejo nulo

E) Tiene argumento igual a : $\frac{\pi}{2}$

4.- Si : $Z = -i$, su forma polar es :

A) $e^{\frac{\pi}{2}i}$ B) $2e^{\frac{3\pi}{2}i}$ C) $\underline{/\frac{3\pi}{2}}$

D) $\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ E) $\text{cis}\ \frac{\pi}{2}$

5.- Marcar verdadero (V) o falso (F) :

I) $i^{3k} = 1\ ;\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$ .... ( )

II) $w^{4k} = 1\ ;\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$ .... ( )

III) $i^{444} + w^{333} = 2$ .... ( )

A) FFF B) VVV C) VVF D) FVF E) FFV

6.- Si el complejo : $Z = 2 + 3i$, se lleva al plano de Gauss; nos representa :

A) Un radio vector D) Una recta

B) Una circunferencia E) N.A.

C) Un punto

7.- Reducir :

$$E = \frac{2}{i} + \frac{3}{i^2} + \frac{4}{i^3} + \dots\dots\dots + \frac{1001}{i^{1000}}$$

A) $500(1+i)$ B) 500 C) $250i$

D) $250(i-1)$ E) 250

8.- El equivalente de :

$$\frac{\left|\frac{Z+\overline{Z}}{2}+\sqrt{Z.\overline{Z}}\right| + \left|\frac{Z+\overline{Z}}{2}-\sqrt{Z.\overline{Z}}\right|}{|Z| + |\overline{Z}|}\ \text{, es :}$$

A) -1 B) 1 C) 0 D) -1/2 E) 2

9.- Siendo 1, $w \wedge w^2$ las tres raíces cúbicas de la unidad; simplificar.

$$\frac{1+w+w^2+w^3+\dots\dots+w^{25}}{\left(1-w^5+w^{10}-w^{15}+\dots\dots+w^{220}\right)^{-1}}$$

A) 1 B) w C) $-w$ D) $2w$ E) -1

10.- Si $\{x\,;y\} \subset \mathbb{R}$, simplificar.

$$\frac{\sqrt{-(x-\sqrt{-y})}+i\sqrt{-(x+\sqrt{-y})}}{\sqrt{-(x+\sqrt{-y})}-i\sqrt{-(x-\sqrt{-y})}}$$

A) 1 B) -1 C) $-i$ D) i E) xyi

11.- Al reducir : $(1+i)^{41} + (1-i)^{41}$, se obtiene :

A) 2^{18} B) 2^{19} C) 2^{20}

D) 2^{21} E) 2^{22}

12.- Proporcionar el argumento principal de :

$$Z = 1 + \cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ$$

A) 20° B) 80° C) 40° D) 5° E) 10°

13.- El equivalente de :

$$-(-\sqrt{-1})^{4n+3} \quad ; \; n \in \mathbb{N} \text{ es :}$$

A) 1 B) -1 C) i D) $-i$ E) $2i$

14.- Calcular "$n + k$" a partir de :

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots\ldots + 10i^{10} = n + ki$$

A) 1 B) -2 C) 0 D) -1 E) 2

15.- Calcular : $E = \sqrt{Z}^{n} + \sqrt{2n}^{2Z}$, si Z es un número real donde :

$$Z = \frac{3+ni}{6+4i}$$

A) 3/2 B) 5/2 C) 1/2 D) 2 E) 1

16.- Si . $Z = 2 + 3i$, halle Ud. $I_{m\{Z_1\}}$, siendo :

$$Z_1 = \frac{Z-\bar{Z}}{3Z-Z^2}$$

A) 3 B) 2 C) $\frac{3}{221}$ D) $\frac{2}{221}$ E) $\frac{1}{21}$

NIVEL B

17.- Expresar en forma polar al número complejo :

$$Z = \left(\frac{(\sqrt{2}i)^3 + \sqrt{8}i^6}{i^9 - i^4}\right)^2$$

A) 8 cis π B) 4 cis π C) 2 cis π

D) -16 cis π E) cis π

18.- Calcular Arg (Z) , si :

$$\left|\frac{Z+1}{Z-3}\right| = 1 \wedge |Z+2+3i| = 5 \text{ , } I_{m(Z)>0}$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

19.- Calcular el resto de la siguiente división :

$$\frac{(\cos\theta + x \operatorname{sen}\theta)^n - \cos n\theta - x \operatorname{sen} n\theta}{x^2+1}$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) i E) $i+2$

20.- Simplifíquese :

$$\frac{(1+2i)^{12} + 4(1+2i)^8 + 4(i-2)^4}{(2-i)^8 + 4(2-i)^4 + 4}$$

A) $7 - 24i$ B) $7 + 24i$ C) $-7 - 24i$

D) $-7 + 24i$ E) $24 - 7i$

21.- Si w es una de las tres raíces cúbicas de la unidad ($w \neq 1$); reducir.

$$E = w^{7^{71}} + w^{(71)^7} + w^{-7^{71}} + w^{(-7)^{71}}$$

A) 1 B) w^2 C) w D) -1 E) 0

22.- Si : $i^{3257} - i^{2638} + i^{8193} - i^{11984} = \sqrt[3]{ni}$;

Entre qué valores se encuentra "n"

A) $-9 < n < -7$ B) $-8 < n < -5$ C) $-4 < n < -5$

D) $-7 < n < 1$ E) F.D.

23.- Si : $\sqrt{3} + (2w + 1)i = 0$, proporcionar el equivalente de : w^{10}

A) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

C) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D) i E) -1

24.- Si : $\frac{a+bi}{1+ci}$ es imaginario y $\frac{c-ai}{b+i}$ es real; calcular « $b^2 + a^{-2} . c^2$ »

A) 1 B) 3 C) 4 D) 8 E) 2

25.- Proporcionar el argumento del siguiente número complejo :

$$Z=\frac{(3-4i)^2(-3+3\sqrt{3}i)}{-\sqrt{5}-\sqrt{5}i}$$

A) 37° B) 53° C) 59° D) 60° E) 67°

26.- Si : $Z \subset \mathbb{C} / Z = x + yi \wedge y \neq 0$, $1 + Z^2 \neq 0$;

entonces para que el número : $Z_1 = \dfrac{Z}{1+Z^2}$

sea real, el módulo de Z debe ser :

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) 3

27.- A partir de :

$$(1+i)^2 + (1+i)^4 + (1+i)^6 + (1+i)^8 = x + yi \ ;$$

calcular : $\dfrac{x+y}{x-y}$

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/5 D) 1/6 E) 1/3

28.- Mostrar el equivalente de :

$$\frac{[4(\cos 23^\circ + i \operatorname{sen} 23^\circ)]^5\ [8(\cos 12^\circ + i \operatorname{sen} 12^\circ)]^2}{[2(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)]^7\ [128(\cos 4^\circ + i \operatorname{sen} 4^\circ)]}$$

A) $2+\sqrt{3}i$ B) $2(\sqrt{3}+i)$ C) $\sqrt{3}+2i$

D) $2+i$ E) i

29.- ¿Para cuántos valores de dos cifras la expresión.

$$iC_1^n + i^2 C_2^n + i^3 C_3^n + \ldots\ldots\ldots\ldots + i^n C_n^n \ ,$$

se reduce a : $\sqrt{2}^{\,n-1} - 1 - i\sqrt{2}^{\,n-1}$?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

30.- Si : $1, w \wedge w^2$, son las raíces de la ecuación :

$$w^3 = 1 \ \wedge \ x = a + b \ \wedge$$

$$y = a^2 w + b^2 w^2 \ \wedge$$

$$z = a w^2 + bw \ ;$$

simplificar : $\dfrac{x^2 + y^2 - z^2 + 2ab}{x^2}$

A) 1 B) 0 C) $2ab$ D) 3 E) ab

31.- El equivalente de : $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{-217}$, es :

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ B) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ E) N.A

NIVEL C

32.- Calcular $\left(I_{m(Z)}\right)^2$, si :

$$Z = \left[\frac{34}{(1-4i)\ (5+3i)}\right]^2$$

A) 2 B) -4 C) 4 D) -1 E) 1

33.- Calcular el mínimo valor de $(n!)!$ a partir de : $i^{(n+1)!} + i^{n!} = 0$

A) 1 B) 2 C) 720 D) 5 040 E) N.A.

34.- El número de valores enteros y positivos de "n" de dos cifras que hacen que la expresión :

$$C_0^n + C_1^n w + C_2^n w^2 + C_3^n w^3 + \ldots + C_n^n w^n \ ;$$

se reduzca a la unidad es :

A) 17 B) 14 C) 15 D) 16 E) 13

35.- Si : $w \subset \mathbb{C} / w^n = 1 \ \wedge \ w \neq 1$; reducir :

$$1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \ldots\ldots n w^{n-1} \ ; n \in \mathbb{N}^*$$

A) $w-1$ B) $\dfrac{n}{w-1}$ C) $\dfrac{2n}{1+w}$

D) $\dfrac{n}{1+w}$ E) $w+1$

36.- Si : $\dfrac{a+2i}{b-3i}$ y $\dfrac{b+(a+8)i}{a+bi}$ son respectivamente un número real y un imaginario puro; el valor del primero de ellos es :

A) 2/5 B) 5/2 C) 1/5 D) 5/3 E) 2/3

37.- Siendo 1 , $w \wedge w^2$ las tres raíces cúbicas de la unidad; simplificar :

$$\frac{(x+y+Z)^3+(x+wy+w^2Z)^3+(x+w^2y+wZ)^3}{(x+y+Z)\,(x+wy+w^2Z)\,(x+w^2y+wZ)+9xyZ}$$

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E) 3

38.- Al resolver el sistema en $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} Z^2+2iZ=5 \\ (1+i)Z^2+2+60i=(7+13i)Z \end{cases}$$

indicar cuál no es la raíz de las ecuaciones anteriores.

A) $i-2$ B) $3+5i$ C) $7-2i$

D) $-i-2$ E) $-i+2$

39.- Si $\{Z; w\} \subset \mathbb{C}$, calcular :

$$I_m\left\{\frac{Z}{Z+w}\right\} + I_m\left\{\frac{w}{w+Z}\right\}$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 1/2 E) 2

40.- Si : $n \in \mathbb{N}^*$, halle el equivalente de :

$$\frac{(1+i\,\text{tg}\,\theta)^n\,(1-i\,\text{tg}\,n\theta)}{(1+i\,\text{tg}\,n\theta)\,(1-i\,\text{tg}\,\theta)^n}$$

A) - 1 B) n C) $-n$ D) n^2 E) 1

41.- Si $w^2+w+1=0$, simplificar :

$$\frac{(a+b)^3+(aw+bw^2)^3+(aw^2+bw)^3}{a^3+b^3}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

42.- Hallar el menor valor de k , tal que :

$$\left|\frac{Z-w}{1-\bar{Z}w}\right| \leq k \;\ldots\ldots\; \forall\{Z\,;w\} \subset \mathbb{C}$$

A) 4 B) 2 C) 1/9 D) 1 E) 1/2

43.- Si :

$$Z_1+Z_2+Z_3=0 \wedge |Z_1|=|Z_2|=|Z_3|=1\,;$$

luego : Z_1 ; $Z_2 \wedge Z_3$ son los vértices de un triángulo:

A) Equilátero B) Rectángulo

C) Escaleno D) Obtusángulo E) N.A

44.- Hallar la suma de todos los números complejos que sean conjugados con su cubo.

A) 0 B) 1 C) $2i+1$ D) $2i$ E) i

45.- El equivalente de : $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-3}.i^i.e^{\frac{\pi}{2}}$, es :

A) 0 B) -1 C) $\sqrt{e}$ D) 1 E) F.D

46.- Si : $Z \subset \mathbb{C}$ / $|Z|=5$; calcular :

$$E=|1+Z|^2+|1-Z|^2$$

A) 52 B) 50 C) 48 D) 2 E) 32

47.- Hallar Z de : $\left|\dfrac{Z-12}{Z-8i}\right|=\dfrac{5}{3} \wedge \left|\dfrac{Z-4}{Z-8}\right|=1$

A) $6+17i$ B) $4+9i$ C) $6+10i$

D) $6+8i$ E) $A \cup B$

48.- ¿Cuándo el módulo de la suma de dos números complejos es igual a la diferencia de los módulos de los sumandos?

A) Cuando la diferencia de los argumentos es igual a : $(2k\pi+\pi)$ / k es entero.

B) Cuando la suma de los argumentos es igual a $(2k\pi+\pi)$ / k es entero.

C) Cuando la diferencia de los argumentos es igual a : $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ / k es entero.

D) Cuando la suma de los argumentos es igual a : $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$ / k es entero.

E) N.A

49.- La suma de dos números complejos es : $(-2 - 6i)$ la parte real de uno de ellos es : -4 y el cociente es imaginario puro. Halle la diferencia de las partes imaginarias de los números complejos.

A) $2i$ B) $-6i$ C) $-8i$ D) $16i$ E) i

50.- Una solución de la ecuación :

$$x^{x^{x+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}\right)} \text{, es :}$$

A) e B) e^2 C) i D) $\sqrt{i}$ E) $-i$

51.- Resolver :

$$(Z+1)^n - (Z-1)^n = 0 \ ; \ Z \subset \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{N}^*$$

A) $\dfrac{1+e}{1-e}$ B) $\dfrac{1-e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}{1+e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}$

C) $\dfrac{1+e^{2k\pi i}}{1-e^{2k\pi i}}$ D) $\dfrac{1+e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}{1-e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}$

E) $\dfrac{1-e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}{-1-e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}}$

52.- Si el cuadrado de un número complejo es igual a la semisuma de su complejo conjugado y su complejo opuesto; este número complejo:

A) Tiene parte real igual a 1.

B) No tiene parte real.

C) El cuadrado de su parte real es igual al cuadrado de su imaginaria.

D) No existe tal número.

E) N.A

53.- Halle un número complejo cuyas cuatro raíces cuartas se encuentran sobre la circunferencia de radio: $R = 2$, con centro en el origen. Una de éstas raíces tiene argumento igual a : $7\pi/12$.

A) $8(i+\sqrt{3})$ B) $4(1+\sqrt{3}\,i)$

C) $8(1+\sqrt{3}\,i)$ D) $1+\sqrt{3}\,i$

E) $8(1-\sqrt{3}\,i)$

54.- Si al reducir :

$$(1+i)^{5n} + \binom{n}{1}(1+i)^{5n-5}(1-i)^5 + \binom{n}{2}(1+i)^{5n-10}(1-i)^{10} + \dots\dots\dots + (1-i)^{5n} ,$$

obtenemos, $2^{33}.\cos 11\pi$ ¿Qué valor asume "n"?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

55.- Halle el equivalente de :

$$\frac{1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+x^3\cos 3\theta+\dots\dots}{x\,\mathrm{sen}\,\theta+x^2\,\mathrm{sen}\,2\theta+x^3\,\mathrm{sen}\,3\theta+\dots\dots}$$

A) $\csc\theta - \mathrm{ctg}\,\theta$ B) $x\csc\theta - \mathrm{ctg}\,\theta$

C) $x\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{ctg}\,\theta$ D) $x^{-1}\csc\theta - \mathrm{ctg}\,\theta$

E) N.A

56.- ¿Cuál es el lugar geométrico de la siguiente igualdad :

$$|Z - i| = |Z + 1| \ ?$$

A) Parábola B) Circunferencia

C) Punto D) Recta E) N.A

14 Ecuaciones de 1er Grado

DEFINICION 1.

La ecuación es una igualdad condicional que se verifica para valores particulares asignados a sus incognitas.

Por ejemplo : $2x + 1 = x+2$ es una igualdad que solo se cumple si : $x = 1$; por lo tanto la igualdad dada es una ecuación.

14.1) SOLUCION DE UNA ECUACION

Recibe este nombre el valor o valores que asume la ó las incógnitas con la característica de verificar la ecuación.

Si una ecuación está en función de una sola incógnita, a su solución también se le podrá llamar *Raíz*.

Por ejemplo para la ecuación : $3x - 1 = x + 5$, su solución o raíz es $x = 3$; pues al reemplazar en la ecuación dada se tiene que : $3\,(3) - 1 = 3 + 5$

La verifica : $8 = 8$

14.2) CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES

14.2A ATENDIENDO A SU POSIBILIDAD DE SOLUCION

Las ecuaciones podran ser :

I) Ecuación Compatible.- Es aquella que admite solución; ésta a su vez podrá ser :

a) *Determinada*.- Si presenta un número limitado de soluciones.

b) *Indeterminada*.- Si presenta un número ilimitado de soluciones.

II) Ecuación Incompatible.- Es aquella que no admite solución; frecuentemente se le dá el nombre de *Ecuación Absurda*.

14.2B ATENDIENDO A LA NATURALEZA DE LAS EXPRESIONES QUE INTERVIENEN EN LA IGUALDAD

Las ecuaciones podran ser :

I) Ecuación Algebraica.- Es aquella donde en ambos miembros de la igualdad solo intervienen expresiones algebraicas. Una ecuación algebraica puede ser :

a) *Ecuación Algebraica Racional*.- Es aquella en donde la incógnita solo podrá tener como exponentes a números enteros, estas ecuaciones a su vez podrán ser enteras o fraccionarias.

Podemos citar como ejemplo a :

1) $2x - 1 = x^2 - 4$ .... es una ecuación algebraica racional entera llamada también *Ecuación Polinomial*.

2) $x + 3 = 2 - \frac{1}{x}$ .... es una ecuación algebraica racional fraccionaria.

b) *Ecuación Algebraica Irracional*.- Es aquella en donde la incógnita se encuentra afectada de algún signo radical.

Podemos citar como ejemplos a :

1) $3x + 2 + \sqrt{x-1} = 2\left(3 - \sqrt{x-2}\right)$

2) $2x + 1 = \sqrt[3]{2x+3} - x^2$

II) Ecuación Trascendente.- Es aquella donde al menos uno de los miembros de la igualdad es una expresión trascendente.

Podemos citar como ejemplos a :

$$2^x + x = x^2 + 2$$

$$\operatorname{sen} 2x - 1 = 0$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots = 2$$

$$2^{x+1} = 6$$

$$\log 3x + 2 = x$$

14.2C ATENDIENDO A SUS INCOGNITAS

Las ecuaciones podrán ser de una, dos, tres o más incognitas. Podemos citar como ejemplos a :

1) $2x - 4 = x + 1$ .... ecuación con una sola incógnita (x)

2) $x - 2y = 1$ .... ecuación con dos incógnitas ($x \wedge y$)

14.2D ATENDIENDO A SU GRADO

Las ecuaciones podran ser de primer grado (o lineales), de segundo grado (o cuadráticas), de tercer grado (o cúbicas), ... etc.

14.3) CRITERIOS DE RESOLUCION

Al resolver una ecuación se tendrá en cuenta lo siguiente :

1er) *Si la ecuación presenta a la incógnita en el denominador se deberá cuidar que su solución* no anule *al denominador*.

Por ejemplo antes de resolver :

$$\frac{2}{x-1} + 3 = x - 2\ , \text{ se hará cumplir que : } x - 1 \neq 0\ , \text{ es decir : } x \neq 1$$

2do) *Si la ecuación presenta su incógnita afectada de algún signo radical de índice par, se deberá proceder así :*

Ecuación : $\sqrt[2n]{F(x)} = G(x)$ .... $n \in \mathbb{N}^*$

Entonces se deberá cumplir que : $F(x) \geq 0 \quad \wedge \quad G(x) \geq 0$

Esto significa que $F(x)$ y $G(x)$ deben ser no negativos .

3er) *Llamaremos* Ecuaciones Equivalentes *a aquellas ecuaciones que presentan las mismas soluciones, es decir las soluciones de una, también son las soluciones de la otra.*

Por ejemplo las ecuaciones :

$2x + 1 = x + 2 \quad \Rightarrow \quad$ solución : $x = 1$

$5x + 4 = 3(x + 2) \quad \Rightarrow \quad$ solución : $x = 1$

Son ecuaciones equivalentes pues ambas presenta la misma solución.

Pero las ecuaciones :

$3x - 1 = x + 5 \quad \Rightarrow \quad$ solución : $x = 3$

$x^2 - 2x = 3 \quad \Rightarrow \quad$ solución : $x = -1 \;\vee\; x = 3$

No son equivalentes pues : $x = -1$ no es solución de la primera ecuación.

14.4) ECUACION DE 1er GRADO

Es aquella cuya forma general es :

$$\boxed{ax + b = 0} \quad .... \ (*)$$

donde a las letras a y b se les dá el nombre de parámetros tal que $\{a ; b\} \subset \mathbb{R}$ y a x incógnita.

14.4A SOLUCION DE LA ECUACION

Despejando x de la relación (*), obtenemos la solución de la ecuación de 1er grado :

$$x = -b/a$$

14.4B DISCUSION DE LA SOLUCION

$ax = -b$ .... igualdad que permite analizar los siguientes casos :

I) Si : $b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, la ecuación es compatible determinada.

II) Si : $b = 0 \;\wedge\; a = 0$, la ecuación es compatible indeterminada.

III) Si : $b \neq 0 \;\wedge\; a = 0$, la ecuación es incompatible.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Halle la raíz de la siguiente ecuación : $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{2x-2} - \dfrac{3}{2x+2} = 0$

A) -1 *B) -2* *C) 2* *D) 1/2* *E) -1/2*

Resolución.-

Utilizando el 1er Criterio de Resolución, diremos que :

$$(x-1)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$$
$$2x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$$
$$2x + 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -1$$

Pasando el 3er sumando al 2do miembro y multiplicando a ambos miembros de la igualdad dada por el M.C.M. de los denominadores : $2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1)$, se obtendrá :

$$2(x+1) - 3(x-1)(x+1) = -3(x-1)^2$$

Efectuando las operaciones indicadas : $2(x+1) - 3(x^2-1) = -3(x^2-2x+1)$

Reduciendo los paréntesis : $2x + 2 - 3x^2 + 3 = -3x^2 + 6x - 3$

Eliminando términos semejantes : $8 = 4x$

Finalmente la raíz de la ecuación será : $x = 2$ **RPTA. C**

2.- Resolver : $1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x}}} = 2$

A) 2/3 *B) 3/2* *C) 5/2* *D) 2/5* *E) 7/2*

Resolución.-

En base al 1er Critero de Resolución, diremos que : $x \neq 0$

La igualdad mostrada se podrá escribir así : $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x}}} = 2 - 1$

Esto significa que : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x}} = 1$

Llevando $\dfrac{1}{2}$ al 2do miembro se obtiene : $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}$

Efectuando la multiplicación en aspa se consigue : $2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$

Pasando $\frac{1}{2}$ al 1^{er} miembro, se obtiene : $2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

Operando en el 1^{er} miembro nos queda : $\frac{3}{2} = \frac{1}{x}$

Finalmente invirtiendo a ambos miembros se tendrá : $x = \frac{2}{3}$ **RPTA. A**

3.- Proporcionar la solución de la ecuación : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x-2\right)-2\right)-2\right)-2=0$

A) 156 ***B) 1650*** ***C) 1056*** ***D) 1 560*** ***E) 1260***

Resolución.-

Transponiendo el primer 2 al 2^{do} miembro, nos queda : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x-2\right)-2\right)-2\right)=2$

Transponiendo el primer 5 al 2^{do} miembro : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x-2\right)-2\right)-2=10$

Transponiendo el segundo 2 al 2^{do} miembro : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x-2\right)-2\right)=12$

Transponiendo el segundo 5 al 2^{do} miembro : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x-2\right)-2=60$

Transponiendo el tercer 2 al 2^{do} miembro : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x-2\right)=62$

Transponiendo el tercer 5 al 2^{do} miembro : $\frac{1}{5}x-2=310$

Transponiendo el cuarto 2 al 2^{do} miembro : $\frac{1}{5}x=312$.

Finalmente la solución de la ecuación será : $x = 1560$ **RPTA. C**

4.- Hallar el valor de "x" que verifica : $\sqrt[3]{14+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{14-\sqrt{x}} = 4$

A) 179 ***B) 165*** ***C) 170*** ***D) 169*** ***E) 150*** ***UNI 83-I***

Resolución.-

Con la finalidad de eliminar el signo radical, será necesario elevar a ambos miembros de la igualdad al cubo, para lo cual debemos recordar la equivalencia de Cauchy :

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(ab)(a+b)$$

Ahora en el problema : $\left(\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}\right)^3=(4)^3$

Desarrollando : $\left(14+\sqrt{x}\right)+\left(14-\sqrt{x}\right)+3\left(\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}\,.\,\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}\right)\underbrace{\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}\right)}_{(*)}=64$

Reduciendo y sustituyendo el dato en (*) : $28+3\sqrt[3]{\left(14+\sqrt{x}\right)\left(14-\sqrt{x}\right)}\;(4)=64$

Transponiendo términos y efectuando dentro del radical : $12\sqrt[3]{(14)^2-\sqrt{x}^2}=36$

Dividiendo por 12 a ambos miembros : $\sqrt[3]{196-x}=3$

Elevando nuevamente al cubo : $196-x=27$

Finalmente transponemos términos y obtenemos : $\boldsymbol{x=169}$ **RPTA. C**

5.- Resolver : $\left[\dfrac{x^2-2x+14}{x^2+4x+2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\dfrac{x^2+4x+2}{x^2-2x+14}\right]^{\frac{1}{2}}=2$

A) 1 *B) 2* *C) 5/2* *D) 3* *E) 7/2*

Resolución.-

Hagamos el siguiente cambio de variable : $\left[\dfrac{x^2-2x+14}{x^2+4x+2}\right]^{\frac{1}{2}}=m$ .... (*)

Ahora la igualdad dada será : $m+\dfrac{1}{m}=2$ .... $(m\neq 0)$

Multiplicando por m a ambos miembros : $m^2+1=2m$

Por transposición de términos se obtiene : $(m-1)^2=0$

Resulta evidente que la solución de esta ecuación es : $m=1$

Luego en la relación (*) se tendrá : $\left[\dfrac{x^2-2x+14}{x^2+4x+2}\right]^{\frac{1}{2}}=1$

Elevando al cuadrado a ambos miembros : $\dfrac{x^2-2x+14}{x^2+4x+2}=1$

Transponiendo términos, obtenemos : $x^2-2x+14=x^2+4x+2$

Reduciendo tenemos : $12=6x$

Finalmente la solución de la ecuación es : $\boldsymbol{x=2}$ **RPTA. C**

6.- Resolver la ecuación : $\sqrt{x+\sqrt{x}} - a\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{x-\sqrt{x}}$; $x \neq 0$

A) $x = \left(\dfrac{a^2-2a+2}{2a-2}\right)^2$ B) $x = -\left(\dfrac{a^2+2a-2}{2a-2}\right)^2$ C) $x = (a-1)^2+1$

D) $x = (a+1)^2+1$ E) $x = \dfrac{a+1}{a-1}$ UNI 85-I

<u>Resolución</u>.-

Multiplicando a ambos miembros de la igualdad dada por el M.C.M. del denominador : $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, obtenemos : $\sqrt{x+\sqrt{x}}^{\,2} - a\sqrt{x} = \sqrt{x+\sqrt{x}} \;.\; \sqrt{x-\sqrt{x}}$

Agrupando en un solo radical al 2do miembro : $x + \sqrt{x} - a\sqrt{x} = \sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)}$

Efectuando la suma por la diferencia : $x + \sqrt{x} - a\sqrt{x} = \sqrt{x^2-x}$ .... (*)

Con la finalidad de eliminar al signo radical, será necesario elevar al cuadrado a ambos miembros de la igualdad, para lo cual se tendrá que recordar el desarrollo de un trinomio al cuadrado :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Ahora en la expresión (*) se tendrá : $\left(x+\sqrt{x}-a\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2-x}\right)^2$

Desarrollando se tendrá : $x^2 + x + a^2x + 2x\sqrt{x} - 2ax\sqrt{x} - 2ax = x^2 - x$

Reduciendo términos semejantes obtenemos : $2x + a^2x + 2x\sqrt{x} - 2ax\sqrt{x} - 2ax = 0$

Sacando factor común x, se tiene : $x\left(2+a^2+2\sqrt{x}-2a\sqrt{x}-2a\right) = 0$

Puesto que : $x \neq 0$, deducimos que : $2 + a^2 + 2\sqrt{x} - 2a\sqrt{x} - 2a = 0$

Reacomodando esta última ecuación : $a^2 - 2a + 2 = 2a\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

Sacando factor común $\sqrt{x}$, se tendrá : $a^2 - 2a + 2 = (2a-2)\sqrt{x}$

Transponiendo términos : $\dfrac{a^2-2a+2}{2a-2} = \sqrt{x}$

Finalmente, elevando al cuadrado se tendrá : $x = \left(\dfrac{a^2-2a+2}{2a-2}\right)^2$

RPTA. A

7.- ¿Cuál es el valor de "x" que satisface : $\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}}} = 6$

y también satisface la igualdad : $\frac{4-2x}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1}$?

A) 0 ***B) 2*** ***C) 1***

D) No existe tal valor ***E) Cualquier número diferente de 1.*** ***UNI 90***

Resolución.-

Salta a la vista que en I^ra^ ecuación se obtendrá un valor de $x \in \mathbb{R}^+$, por ello iniciaremos la resolución hallando el valor de "x" a partir de la segunda igualdad : $\frac{4-2x}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1}$

En base al 1^er^ criterio de resolución, se debe cumplir que : $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ ......(*)

Ahora transponiendo términos en la igualdad dada se tendrá : $\frac{4-2x}{x-1} - \frac{2}{x-1} = 1$

Efectuando operaciones con las fracciones : $\frac{4-2x-2}{x-1} = 1$

Transponiendo términos, se obtiene : $2 - 2x = x - 1$

Haciendo una última transposición de términos, obtenemos : $3 = 3x$

De aquí se consigue : $x = 1$

Pero de acuerdo a la relación (*) : $x \neq 1$, por lo tanto

Se concluye que no existe un valor x que satisfaga ambas ecuaciones. **RPTA. D**

8.- La ecuación : $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x+5}{x-2} = \frac{2x^2-x-11}{x^2-5x+6}$

A) Admite como solución : x = 3 ***B) Admite como solución : x = 1***

C) Admite como solución : x = 2 ***D) Admite múltiples soluciones***

E) No admite solución ***UNI 91***

Resolución.-

Aplicando el 1^er^ Criterio de Resolución en la ecuación dada se deberá cumplir que :

1) $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

2) $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

A continuación multiplicamos a ambos miembros por el M.C.M. de los denominadores, esto es : $(x - 3)(x - 2)$, por lo cual se tendrá :

$$(x + 1)(x - 2) + (x - 3)(x + 5) = 2x^2 - x - 11$$

Efectuando obtenemos : $x^2 - x - 2 + x^2 + 2x - 15 = 2x^2 - x - 11$

Transponiendo y reducienco términos, encontramos : $2x = 6$

De aquí se obtiene que : $x = 3$

Pero : $x \neq 3$, en consecuencia la ecuación no admite solución . **RPTA. E**

9.- Hallar el valor de x de la siguiente ecuación :

$$10(a+b)(b+x)(a+x)+ab = 10(a+b+x)(ab+ax+bx)$$

A) 1/10 *B) 10* *C) ab* *D) a + b* *E) N.A.* *UNI 91*

Resolución.-

Seleccionando en la ecuación dada :

$$10(a+b)\underbrace{(b+x)(a+x)} + ab = 10(a+b+x)(ab+\underbrace{ax+bx})$$

Multiplicando y factorizando en las expresiones indicadas se tendrá :

$$10(a+b)\left[x^2+(a+b)x+ab\right] + ab = 10\,(a+b+x)\,[ab+(a+b)x] \ldots (1)$$

La reiterada presencia de la suma : $a + b$, nos sugiere hacer el siguiente cambio de variable : $a + b = m$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1) tendremos : $10m\left(x^2+mx+ab\right) + ab = 10(m+x)(ab+mx)$

Efectuando la multiplicación indicada en cada miembro, obtendremos :

$$10mx^2 + 10m^2x + 10mab + ab = 10mab + 10m^2x + 10abx + 10mx^2$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes, se obtiene : $ab = 10\,abx$

Simplificando finalmente y despejando, se obtiene : $\boldsymbol{x = \frac{1}{10}}$ **RPTA. A**

10.- Encontrar la incognita "x" de la siguiente ecuación : $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$

A) $\frac{(2a-b)^3+27a^2b}{27b}$ *B)* $\frac{(2a+b)^3+9ab}{27b}$ *C)* $\frac{(2a+b)^3}{27b}$ *D)* $27\frac{a}{b}$ *E) a + b*

Resolución.-

Con la finalidad de eliminar el signo radical elevaremos al cubo a ambos miembros de la igualdad al cubo : $\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{b}\right)^3$ ... (*)

Ahora recordando la equivalencia de Cauchy : $\mathbf{(m+n)^3 = m^3 + n^3 + 3(mn)(m+n)}$

Aplicando esta equivalencia en (*) : $2a + 3\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{x}\right)\left(a-\sqrt{x}\right)}\ \underbrace{\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right)}_{(**)} = b$

Sustituimos (*) en (**), así también transponemos términos y efectuamos la suma por la diferencia indicada, obteniéndose : $3\sqrt[3]{a^2-x}\ \left[\sqrt[3]{b}\right] = b - 2a$

Elevando al cubo ambos miembros se consigue : $27b\left(a^2-x\right) = (b-2a)^3$

Efectuando en el 1er miembro : $27a^2b - 27bx = (b-2a)^3$

Transponiendo términos : $-27bx = (b-2a)^3 - 27a^2b$

Factorizando el signo negativo del segundo miembro : $-27bx = -\left[(2a-b)^3 + 27a^2b\right]$

Finalmente la incógnita será : $x = \dfrac{(2a-b)^3 + 27a^2b}{27b}$ **RPTA. A**

11.- Para qué valor de "x" se verifica : $\sqrt{x+44+14\sqrt{x-5}} + \sqrt{x+59+16\sqrt{x-5}} = 17$

A) 6 *B) 5* *C) 4* *D) 2* *E) 0,5*

Resolución.-

Para evitarnos una resolución prolongada y tediosa, nuestra estrategia consistitrá en hacer evaluaciones numéricas. Teniendo en cuenta el segundo criterio de resolución, se debe cumplir que :

$$x - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 5$$

Debemos observar que si reemplazamos $x = 5$ en la igualdad dada , en el primer miembro se obtiene un valor numérico menor que el que indica el segundo miembro : 17 . Por esta razón podemos afirmar que si existe un valor para "x" que verifica la igualdad dada, dicho valor deberá ser mayor que 5.

Reemplazando $x = 6$ en la igualdad mostrada, en el primer miembro se obtiene por valor numérico 17.

Debemos observar también que si reemplazamos $x = 7$ en la igualdad mostrada, en el primer miembro se obtiene un valor numérico mayor que el que indica el segundo miembro (17). Por esta razón podemos afirmar que si existe un valor para "x" que verifica la igualdad dada dicho valor deberá ser menor que 7.

Finalmente se concluye que : $5 < x < 7$

Esto significa que el valor de "x" que verifica la igualda es : $x = 6$ **RPTA. A**

12.- Si la ecuación : $\dfrac{2mx-3}{x-1} + \dfrac{3mx-2}{x+1} = 2m+3$ ***, se reduce a una ecuación de primer grado en "x" ¿qué valor asume el parámetro "m"?***

A) -1 *B) 2* *C) 1* *D) -2* *E) 4*

Resolución.-

Teniendo en consideración en primer criterio de resolución, diremos que de los denominadores de la ecuación dada, se deduce que :

$$x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq -1$$

Reconociendo que el M.C.M. de los denominadores es : $(x-1)(x+1)$

Ahora multipliquemos a ambos miembros de la igualdad por el M.C.M. de los denominadores :

$$(2mx-3)(x+1)+(3mx-2)(x-1)=(x-1)(x+1)(2m+3)$$

Efectuando cada multiplicación indicada y reduciendo en cada miembro, se obtendrá :

$$5mx^2-(m+5)x-1=(2m+3)x^2-(2m+3)$$

Haciendo transposición de términos y agrupando, tenemos :

$$(5m-2m-3)\,x^2-(m+5)x-1+2m+3=0$$

Reduciendo nos queda : $(3m-3)\,x^2-(m+5)x+2m+2=0$ ..... (*)

Por condición del problema, la ecuación obtenida en la relación (*) debe ser de primer grado, por lo tanto deberá cumplirse que :

$$3m-3=0 \Rightarrow m=1$$

Finalmente el valor que asume el parámetro m es : **1** **RPTA. C**

13.- Con respecto al problema anterior ¿Cuál es la solución de la ecuación?

A) $\frac{3}{2}$ *B)* $\frac{3}{2}$ *C)* $\frac{5}{2}$ *D)* $\frac{2}{5}$ *E)* $\frac{3}{4}$

Resolución.-

Sustituyendo $m=1$ en la relación (*) obtenida en la resolución anterior, tendremos : $0x^2-6x+2(1)+2=0$

Finalmente la solución de la ecuación es : $x=\frac{2}{3}$ **RPTA. B**

14.- ¿Qué valor de "x" satisface la igualdad : $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}=\dfrac{x+a}{x+c}$ ***?***

A) $\frac{ad-bc}{b-d}$ *B)* $\frac{ad}{bc}$ *C)* $\frac{ad+bc}{b+d}$ *D)* $\frac{d}{d}$ *E)* $\frac{a}{b}$

Resolución.-

Considerando que $x \neq 0$, multiplicaremos al numerador y denominador del segundo miembro por "x" : $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}=\dfrac{x^2+ax}{x^2+cx}$ ... (*)

Ahora recordemos la siguiente propiedad : $\dfrac{m}{n}=\dfrac{r}{s} \Rightarrow \dfrac{m \pm r}{n \pm s}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{r}{s}$

Aplicando esta propiedad en la relación (*), se tendrá : $\dfrac{(x^2+ax+b)-(x^2+ax)}{(x^2+cx+d)-(x^2+cx)} = \dfrac{x^2+ax}{x^2+cx}$

Eliminando paréntesis reducimos y simplificamos : $\dfrac{b}{d} = \dfrac{x+a}{x+c}$

Multiplicando en aspa, obtenemos : $b\,(x+c) = d\,(x+a)$

Efectuando cada multiplicación indicada y transponiendo términos otra vez, se consigue : $(b-d)\,x = ad - bc$

Finalmente el valor de x es : $\boldsymbol{x = \dfrac{ad-bc}{b-d}}$ **RPTA. A**

15.- Resolver la siguiente ecuación : $\dfrac{(x\sqrt{x}-8)(x-\sqrt{x}-6)}{x\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-12} = 6$

A) 2 *B) 10* *C) 4* *D) 3* *E) Absurda*

Resolución.-

De acuerdo con el 2^{do} Criterio de Resolución diremos que : $x \geq 0$, luego la ecuación se podrá escribir del siguiente modo :

$$\frac{\left(\sqrt{x}^3-2^3\right)\left(\sqrt{x}^2-\sqrt{x}-6\right)}{\left(\sqrt{x}^3-2^3\right)-\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4\right)} = 6 \quad ......(1)$$

Reconociendo la diferencia de cubos : $\sqrt{x}^3 - 2^3 = \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4\right)$ .....(2)

Y factorizando por aspa simple : $\sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 6 = \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$ .....(3)

Luego reemplazando (2) y (3) en (1), se obtendrá :

$$\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\underbrace{\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4\right)}-\underbrace{\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4\right)}} = 6$$

Factorizando lo indicado, tedremos :

$$\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\cancel{\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4\right)}\cancel{\left(\sqrt{x}-3\right)}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\cancel{\left(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4\right)}\cancel{\left(\sqrt{x}-3\right)}} = 6$$

Simplificando se obtiene : $\overbrace{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = 6$

Sustituyendo lo indicado por la diferencia de cuadrados : $x - 4 = 6$

Finalmente : $\boldsymbol{x = 10}$ **RPTA. B**

MISCELANEA

16.- Resolver la ecuación en "x" : $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$; $abc \neq 0$

Indique por respuesta el equivalente de : $\frac{x-c}{a+b} + \frac{x-b}{a+c} + \frac{x-a}{b+c}$

A) 3 B) -3 C) 6 D) - 6 E) 1

Resolución.-

Efectuando en ambos miembros de la ecuación dada, se tendrá :

$$\frac{a(x-a)+b(x-b)+c(x-c)}{abc} = \frac{2(bc+ac+ab)}{abc}$$

Dado que $abc \neq 0$, multiplicamos ambos miembros por abc y luego de agrupar en el 1er miembro nos queda :

$$ax + bx + cx - a^2 - b^2 - c^2 = 2(ab + bc + ac)$$

Factorizando en lo señalado y transponiendo términos, obtenemos :

$$(a + b + c)\,x = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

Debemos observar que el 2do miembro de la ecuación es el desarrollo de un trinomio al cuadrado por lo tanto la ecuación queda así :

$$(a + b + c)\,x = (a+b+c)^2$$

Al simplificar encontramos que : $x = a + b + c$ ....(1)

Finalmente si "T" es el equivalente pedido, se tendrá : $T = \frac{x-c}{a+b} + \frac{x-b}{a+c} + \frac{x-a}{b+c}$ ....(2)

Sustituyendo (1)en (2) : $T = \frac{a+b+c-c}{a+b} + \frac{a+b+c-b}{a+c} + \frac{a+b+c-a}{b+c}$

Simplificando concluímos que : $T = \frac{a+b}{a+b} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+c}{b+c} = 3$ **RPTA. A**

17.- Para qué valor de "x" se verifica la siguiente igualdad :

$$\frac{\sqrt{x}+b}{\sqrt{x}-b} + \frac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}+a} = \frac{\sqrt{x}-b}{\sqrt{x}+b} + \frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a} \quad ; \; x \neq 0$$

A) a + b B) a - b C) ab D) - ab E) 1

Resolución.-

Por transposición de términos, se tendrá : $\frac{\sqrt{x}+b}{\sqrt{x}-b} - \frac{\sqrt{x}-b}{\sqrt{x}+b} = \frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a} - \frac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}+a}$

Efectuando operaciones en cada miembro : $\dfrac{\left(\sqrt{x}+b\right)^2-\left(\sqrt{x}-b\right)^2}{\left(\sqrt{x}-b\right)\left(\sqrt{x}+b\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+a\right)^2-\left(\sqrt{x}-a\right)^2}{\left(\sqrt{x}-a\right)\left(\sqrt{x}+a\right)}$

Utilizando los productos notables obtenemos : $\dfrac{4\left(\sqrt{x}\right)(b)}{\sqrt{x}^2-b^2}=\dfrac{4\left(\sqrt{x}\right)(a)}{\sqrt{x}^2-a^2}$

Para simplificar $\sqrt{x}$ de ambos miembros asumiremos que : $x > 0$, luego acomodando se tendrá : $b\left(x-a^2\right)=a\left(x-b^2\right)$

Efectuando la multiplicación indicada : $-ax+bx=a^2b-ab^2$

Factorizando en ambos miembros : $-x(a-b)=ab(a-b)$

Simplificando los términos entre paréntesis : $-x=ab$

Finalmente, concluímos que : $\boldsymbol{x=-ab}$ **RPTA. D**

18.- Al resolver la ecuación : $\dfrac{1}{\sqrt{x}+a}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+b}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-a}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-b}$

Se observa que "a" y "b" verifican :

A) $a>b$ ***B)*** $a<b$ ***C)*** $ab>0$ ***D)*** $ab<0$ ***E)*** $ab\geq 0$

<u>Resolución</u>.-

Transponiendo términos, la ecuación dada se puede escribir así : $\dfrac{1}{\sqrt{x}+a}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-a}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-b}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+b}\ ;\ x\geq 0\ \ ...(*)$

Efectuando operaciones en cada miembro : $\dfrac{\left(\sqrt{x}-a\right)-\left(\sqrt{x}+a\right)}{\left(\sqrt{x}+a\right)\left(\sqrt{x}-a\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+b\right)-\left(\sqrt{x}-b\right)}{\left(\sqrt{x}-b\right)\left(\sqrt{x}+b\right)}$

Reduciendo términos : $\dfrac{-a-a}{\sqrt{x}^2-a^2}=\dfrac{b+b}{\sqrt{x}^2-b^2}$

Simplificando y acomodando : $2a\left(x-b^2\right)=2b\left(x-a^2\right)$

Efectuando operaciones : $-ax+ab^2=bx-a^2b$

Transponiendo términos : $ab^2+a^2b=ax+bx$

Factorizando convenientemente : $ab(a+b)=(a+b)x$

Finalmente simplificamos y se obtiene : $x=ab$

Pero de (*) se sabe que : $x\geq 0$; por lo tanto : $\boldsymbol{ab\geq 0}$ **RPTA. E**

19.- La solución de la ecuación : $\dfrac{21}{2}+\dfrac{21}{6}+\dfrac{21}{12}+\dfrac{21}{20}+\ldots\ldots+\dfrac{21}{x+x^2}=20$ ***, es :***

A) 18 ***B) 19*** ***C) 20*** ***D) 21*** ***E) 22***

Resolución.-

Factorizando y acomodando el 1er miembro de la ecuación dada, se tendrá :

$$21\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots\ldots+\frac{1}{x(x+1)}\right]=20$$

Para efectuar la adición entre corchetes, será necesario recordar que :

$$\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b} \quad ; \quad b>a \qquad \ldots.(*)$$

En base a (*) la adición señalada se efectúa así :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} &= \frac{2-1}{1\cdot 2} = 1-\frac{1}{2}\\
\frac{1}{2\cdot 3} &= \frac{3-2}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\
\frac{1}{3\cdot 4} &= \frac{4-3}{3\cdot 4} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\
&\vdots\\
\frac{1}{x(x+1)} &= \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}
\end{aligned}\right\} = 1-\frac{1}{x+1}$$

Con lo cual la ecuación dada será : $21\left[1-\dfrac{1}{x+1}\right]=20$

Efectuando y transponiendo términos : $\dfrac{x+1-1}{x+1}=\dfrac{20}{21}$

Simplificando, nos queda : $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{20}{21}$

Efectuando el producto en aspa : $21x=20x+20$

Finalmente concluímos que : $x=20$ **RPTA. C**

20.- Resolver la ecuación en "x" : $\dfrac{a}{b}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)+\dfrac{b}{a}\left(1-\dfrac{b}{x}\right)=1$

A) a + b ***B) ab*** ***C) a - b*** ***D) a^2 + ab + 1*** ***E) 1***

Resolución.-

Efectuando en el 1er miembro : $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a^2}{bx}+\dfrac{b}{a}-\dfrac{b^2}{ax}=1$

Agrupando y transponiendo términos convenientemente : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1=\dfrac{a^2}{bx}+\dfrac{b^2}{ax}$

Efectuando las operaciones indicadas : $\dfrac{a^2+b^2-ab}{ab} = \dfrac{a^3+b^3}{abx}$

Simplificando y acomodando : $x\left(a^2-ab+b^2\right) = a^3 + b^3$

Y recordando por productos notables que : $a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Entonces la ecuación dada quedará así : $x\left(a^2-ab+b^2\right) = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Luego de simplificar concluímos que : $x = a + b$ **RPTA. A**

21.- Resolver la siguiente ecuación en "x" : $\dfrac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)} - \dfrac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)} = \dfrac{5}{84}$

A) 9 ***B) -16*** ***C) -25*** ***D) 21*** ***E) 14***

Resolución.-

Debemos reconocer que : $\dfrac{5}{84} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{12}$

Por tal razón la ecuación dada quedará así : $\dfrac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)} - \dfrac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{12}$

Transponiendo términos : $\dfrac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)} - \dfrac{1}{7} = \dfrac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)} - \dfrac{1}{12}$

Factorizando obtenemos : $\dfrac{1}{7}\left[\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-5)} - 1\right] = \dfrac{1}{12}\left[\dfrac{(x+4)(x-7)}{(x+5)(x-8)} - 1\right]$

Luego de realizar operaciones en cada corchete, obtenemos :

$$\frac{1}{7}\left[\frac{(x+2)(x-4)-(x+3)(x-5)}{(x+3)(x-5)}\right] = \frac{1}{12}\left[\frac{(x+4)(x-7)-(x+5)(x-8)}{(x+5)(x-8)}\right]$$

Efectuamos las multiplicaciones indicadas y reduciendo, nos queda :

$$\frac{1}{7}\left[\frac{7}{x^2-2x-15}\right] = \frac{1}{12}\left[\frac{12}{x^2-3x-40}\right]$$

Simplificando y transponiendo términos, obtenemos : $x^2 - 3x - 40 = x^2 - 2x - 15$

Finalmente luego de reducir términos semejantes, encontramos : $x = -25$ **RPTA. C**

22.- Halle "x" en la siguiente ecuación : $\dfrac{a}{x}\left(\dfrac{1+x}{b}\right) + \dfrac{b}{x}\left(\dfrac{1-x}{a}\right) = 1$

A) $a^2+a^2b^2+b^2$ ***B)*** $\dfrac{a+b}{ab}$ ***C)*** $\dfrac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$ ***D)*** $\dfrac{a^2+b^2}{ab-a^2+b^2}$ ***E)*** $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-ab-b^2}$

Resolución.-

Realizando la multiplicación indicada en el 1er miembro : $\dfrac{a+ax}{bx} + \dfrac{b-bx}{ax} = 1$

A continuación efectuamos la adición de fracciones : $\dfrac{a^2+a^2x+b^2-b^2x}{abx} = 1$

Multiplizando a ambos miembros por abx : $a^2 + a^2x + b^2 - b^2x = abx$

Acomodando todos los términos que contienen a x en el 2do miembro : $a^2 + b^2 = b^2x - a^2x + abx$

Factorizando x en el 2do miembro : $a^2 + b^2 = \left(b^2 - a^2 + ab\right)x$

Finalmente, despejando x nos queda : $x = \dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2+ab}$ **RPTA. D**

23.- Resolver : $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x}$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución.-

Debemos recordar que al resolver una ecuación irracional de la forma : $\sqrt[2n]{F(x)} = G(x)$, se debe cumplir que : $F(x) \geq 0 \ \wedge \ G(x) \geq 0$.

Por tanto, luego de hallar el valor (o valores) de la incognita (x), se deberá reemplazar en la ecuación dada para verificar si satisface la igualdad. De ocurrir ésto último se podrá afirmar que el valor encontrado para la incógnita es la solución de la ecuación. Veamos :

En el problema : $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x}$

Acomodemos los términos dados así : $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+5} + \sqrt{3x}$

Elevando al cuadrado con la finalidad de eliminar al signo radical, se tendrá : $5x+5+2\sqrt{2x+3}\,.\,\sqrt{3x+2} = 5x+5+2\sqrt{2x+5}\,.\,\sqrt{3x}$

Reduciendo y simplificando, obtenemos : $\sqrt{(2x+3)(3x+2)} = \sqrt{(2x+5)(3x)}$

Elevando nuevamente al cuadrado y efectuando cada producto, se tendrá : $6x^2 + 13x + 6 = 6x^2 + 15x$

Reduciendo términos semejantes : $6 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Esta solución si verifica la igualdad dada. **RPTA. C**

24.- Resolver la siguiente ecuación en "x" : $\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1} = \sqrt[6]{x-1}$

A) 1 *B)* $\frac{5}{4}$ *C)* $\frac{5}{2}$ *D) 3* *E) N.A.*

Resolución.-

Teniendo en cuenta el 2do Criterio de Resolución se debe cumplir que : $x - 1 \geq 0$, esto significa que : $x \geq 1$

A continuación elevamos al cubo a la ecuación dada : $\left(\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{x-1}\right)^3$

Sustituyendo el 1er miembro por la equivalencia de Cauchy, se tendrá :

$$2 - 3\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}\ \underbrace{\left(\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}\right)}_{*} = \sqrt{x-1}$$

Reemplazando (*) por la ecuación original : $2 - 3\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\cdot\sqrt[6]{x-1} = \sqrt{x-1}$

Efectuando la diferencia de cuadrados dentro del radical :

$$2 - 3\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[6]{x-1} = \sqrt{x-1}$$

Transformando el primer radical, tendremos : $2 - 3\sqrt[3\cdot 2]{x-1}^{2}\ \sqrt[6]{x-1} = \sqrt{x-1}$

Efectuando la multiplicación en el índice del radical :

$$2 - 3\underbrace{\sqrt[6]{x-1}^{2}\cdot\sqrt[6]{x-1}} = \sqrt{x-1}$$

Reduciendo lo indicado, nos queda : $2 - 3\sqrt[6]{x-1}^{3} = \sqrt{x-1}$

Simplificando exponentes e índice de radical : $2 - 3\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1}$

Por transposición y simplificación, obtenemos : $1 = 2\sqrt{x-1}$

Elevando al cuadrado : $1 = 4(x-1)$

Efectuando y transponiendo términos : $5 = 4x$ $\therefore$ $x = \frac{5}{4}$ **RPTA. B**

25.- Resolver : $\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1} = \dfrac{91}{37}$

A) 1 *B) 3* *C) 7* *D) 9* *E) 11*

Resolución.-

Dado que los términos del primer miembro corresponden al desarrollo del cubo de un binomio, utilizaremos la propiedad de proporciones aplicada en el prob. 14, de este modo nuestra ecuación quedará así :

$$\frac{\left(x^3+3x\right)+\left(3x^2+1\right)}{\left(x^3+3x\right)-\left(3x^2+1\right)} = \frac{91+37}{91-37}$$

Efectuando operaciones nos queda : $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \dfrac{128}{54}$

Reconociendo los productos notables del 1er miembro : $\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = \dfrac{\cancel{128}}{\cancel{54}}$

Simplificando y acomodando, nuestra ecuación equivale a : $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = \frac{64}{27}$

Extrayendo signo radical de índice 3, obtenemos : $\frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{3}$

De aquí : $3x + 3 = 4x - 4$ $\therefore$ $\mathbf{x = 7}$ **RPTA. C**

26.- Para qué valor de "x" se verifica la siguiente igualdad : $\frac{\sqrt[n]{x+2}}{2} + \frac{\sqrt[n]{x+2}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{3}$

A) $\dfrac{2}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1}$ *B)* $1+\sqrt[n]{n+1}$ *C)* $\sqrt[n+1]{3^n} - 1$ *D)* $\dfrac{2}{1+\sqrt[n+1]{3^n}}$ *E)* $\sqrt[n+1]{3^n}$

<u>Resolución</u>.-

Factorizando $\sqrt[n]{x+2}$ en el 1^er miembro de la ecuación dada, nos queda : $\sqrt[n]{x+2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt[n]{x}}{3}$

Efectuando y transponiendo términos, obtenemos : $\sqrt[n]{x+2}\;(x+2) = 2x\,\frac{\sqrt[n]{x}}{3}$

Elevando al exponente "n" se tendrá : $(x+2)\,(x+2)^n = 2^n \cdot x^n \cdot \frac{x}{3^n}$

Agrupando bases iguales, obtenemos : $(x+2)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x^{n+1}$

Asi mismo esta ecuación puede ser escrita así : $\frac{(x+2)^{n+1}}{x^{n+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Aplicando teoremas de exponentes en el 1^er miembro : $\left(\frac{x+2}{x}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Extrayendo signo radical de índice "$n+1$" , tendremos : $\frac{x+2}{x} = \sqrt[n+1]{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Multiplicando por x a ambos miembros : $x + 2 = \sqrt[n+1]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \cdot x$

Transponiendo x al 2^do miembro : $2 = \sqrt[n+1]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \cdot x - x$

Factorizando x, nos queda : $2 = \left(\sqrt[n+1]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1\right) x$

Finalmente, al despejar x, obtenemos : $x = \dfrac{2}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1}$ **RPTA. A**

27.- Resolver la ecuación irracional : $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 2$

A) 1 *B)* $\frac{3}{2}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)* 2 *E)* ϕ

Resolución.-

La ecuación : $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 2$

Aplicando el 2do Criterio de Resolución, se deberá cumplir que : $x \geq 0$

Es decir si existe un "x" que verifica la igualdad, ésta deberá ser mayor o igual a cero.

Analicemos con el menor valor que podría tomar "x", es decir con $x = 0$. Luego el 1er miembro de la ecuación original se tendrá :

$$0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} \approx 2{,}41$$

Podemos observar que el resultado obtenido fue mayor que el 2do miembro, es decir, si reemplazamos un $x > 0$ en el 1er miembro, obtenemos siempre un mayor valor que el 2do miembro, con lo cual se concluye que la ecuación dada es absurda :

$$\therefore \quad x = \phi$$ **RPTA. E**

28.- Resolver la siguiente ecuación en "x" : $\dfrac{x-ab}{a+b} + \dfrac{x-ac}{a+c} + \dfrac{x-bc}{b+c} = a+b+c$

A) $a^2 + b^2 + c^2$ *B)* $ab + bc + ac$ *C)* $a + b + c$ *D)* $a + 2b + 3c$ *E)* abc

Resolución.-

Transponiendo los términos del 2do miembro, la ecuación dada se podrá escribir así :

$$\frac{x-ab}{a+b} - c + \frac{x-ac}{a+c} - b + \frac{x-bc}{b+c} - a = 0$$

Efectuando convenientemente : $\dfrac{x-ab-bc-ac}{a+b} + \dfrac{x-ac-bc-ab}{a+c} + \dfrac{x-bc-ab-ac}{b+c} = 0$

Factorizando los numeradores : $(x - ab - bc - ac)\left[\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c}\right] = 0$

Analizando, los factores dados, deducimos que : $x - ab - bc - ac = 0$

Finalmente, al despejar nos queda : $x = ab + bc + ac$ **RPTA. B**

29.- Resolver para "x" : $\dfrac{\sqrt[n]{x+a} + \sqrt[n]{x-a}}{\sqrt[n]{x+a} - \sqrt[n]{x-a}} = \dfrac{a+1}{a-1}$

A) $\dfrac{a(a^n+1)}{a^n-1}$ *B)* $\dfrac{a^n+1}{a^n-1}$ *C)* $\dfrac{a}{a^n+1}$ *D)* $\dfrac{a(a^n-1)}{a^n+1}$ *E)* $a^n + a + 1$

Resolución.-

En la ecuación : $$\frac{\sqrt[n]{x+a}+\sqrt[n]{x-a}}{\sqrt[n]{x+a}-\sqrt[n]{x-a}}=\frac{a+1}{a-1}$$

Aplicando propiedad de proporciones, utilizada en el Prob. 14, la ecuación dada se reduce a : $$\frac{\sqrt[n]{x+a}}{\sqrt[n]{x-a}}=\frac{a}{1}$$

Reduciendo el 1^{er} miembro a un solo radical, nos queda : $$\sqrt[n]{\frac{x+a}{x-a}}=a$$

Elevando al exponente "n" , obtenemos : $$\frac{x+a}{x-a}=a^n$$

Nuevamente aplicamos la misma propiedad de proporciones y obtenemos : $$\frac{x}{a}=\frac{a^n+1}{a^n-1}$$

Finalmente despejamos y obtenemos : $$x=\frac{a\left(a^n+1\right)}{a^n-1}$$

RPTA. A

30.- Para qué valor real del parámetro "n" la ecuación de 1^{er} grado en "x" :

$$(2n-1)x+2=nx-3n^2$$ ***, será compatible y determinada :***

A) $\forall\, n\in\mathbb{R}$ *B)* 2   *C)* 3   *D)* $\forall\, n\in\mathbb{R}^*$ *E)* $\forall\, n\in\mathbb{R}-\{1\}$

Resolución.-

La ecuación dada es : $$(2n-1)x+2=nx-3n^2$$

Transponiendo todos los términos en x al 1^{er} miembro : $$(2n-1)x-nx=-2-3n^2$$

Factorizando x, nos queda : $$(n-1)\,x=-2-3n^2$$

Finalmente despejamos y obtenemos : $$x=-\frac{2+3n^2}{n-1}$$

Aplicando el 1^{er} Criterio de Resolución, diremos que la ecuación será compatible determinada si y solo si : $n-1\neq 0$, es decir : $n\neq 1$

Luego la ecuación dada será compatible y determinada para cualquier valor real de "n" diferente de la unidad.

RPTA. E

31.- Calcular el valor de : $m+n+\alpha+x$; si $P(x)=0$ es una ecuación lineal donde :

$$P(x)\equiv\left(\frac{m}{20}+\frac{m}{30}+\frac{m}{60}-1\right)x^{\frac{n}{8}+\frac{n}{12}+\frac{n}{24}+11}+\frac{\alpha}{10}+\frac{\alpha}{15}+\frac{\alpha}{30}+\alpha\ ;$$

siendo 14 y -42 el coeficiente principal y el término independiente respectivamente de P(x).

A) -51 ***B) -52*** ***C) -53*** ***D) -54*** ***E) 78***

Resolución.-

Como la ecuación : $P(x) = 0$, es lineal (1^{er} grado), se deberá cumplir que :

$$\frac{n}{8} + \frac{n}{12} + \frac{n}{24} + 11 = 1$$

Efectuando la adición, obtenemos : $\frac{3n+2n+n}{24} = -10$

Reduciendo y despejando, encontramos : $n = 40$

Si 14 es el coeficiente principal de $P(x)$ se deberá cumplir que :

$$\frac{m}{20} + \frac{m}{30} + \frac{m}{60} - 1 = 14$$

Efectuando la adición, obtenemos : $\frac{3m+2m+m}{60} = 15$

Reduciendo y despejando, encontramos : $m = 150$

Asimismo -42 es el términos independiente de $P(x)$, planteamos :

$$\frac{\alpha}{10} + \frac{\alpha}{15} + \frac{\alpha}{30} + \alpha = -42$$

Efectuando la adición, obtenemos : $\frac{3\alpha+2\alpha+\alpha+30\alpha}{30} = -42$

Reduciendo y despejando, encontramos : $\alpha = -35$

Ahora de acuerdo con el enunciado del problema la ecuación dada es lineal, luego :

$$P(x) = 14x - 42 = 0$$

De aqui al despejar, obtenemos : $x = 3$

Finalmente el valor pedido será : $m + n + \alpha + x = -40 + 150 - 35 + 3$

$$\therefore \quad m + n + \alpha + x = \mathbf{78}$$ **RPTA. E**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Una ecuación compatible :

A) Tiene 2 incógnitas

B) No tiene solución

C) Tiene un número finito de soluciones

D) Tiene un número infinito de soluciones

E) C v D

2.- Toda ecuación lineal presenta :

A) 1 solución D) 4 soluciones

B) 2 soluciones E) N.A.

C) 3 soluciones

3.- Una ecuación se llama incompatible si :

A) Tiene infinitas soluciones

B) Tiene 3 incógnitas

C) Tiene un número finito de soluciones

D) Es irracional

E) No admite solución

4.- El grado de una ecuación fraccionaria es :

A) 1^ro B) 2^do C) 3^ro

D) 4^to E) Tal ecuación carece de grado.

5.- Si la ecuación : $(n-2)x^2+3x+1=0$, es de 1^er grado en x, es necesario que "n" sea :

A) 1 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

6.- Marcar verdadero (V) o falso (F)

I) Si : $\sqrt{x-2}=-2 \Rightarrow x=6$ ....( )

II) Si : $\sqrt[3]{2x+1}=-1 \Rightarrow x=\phi$ ....( )

III) Si : $ax+2=0 \Rightarrow x=-2-a$ ....( )

A) FFF B) VFF C) VVF D) FVF E) FFV

7.- Se le llama ecuación polinomial a la :

A) Ecuación algebraica racional entera

B) Ecuación algebraica racional fraccionaria

C) Ecuación trascendente

D) Ecuación irracional

E) N.A.

8.- Es característica particular de una ecuación polinomial :

A) las raíces D) Los coeficientes

B) El grado E) N.A.

C) Las soluciones

9.- La ecuación : $x^3+\sqrt{x}+3x-1=0$, es de :

A) 1^er grado B) 2^do grado C) 3^er grado

D) 4^to grado E) carece de grado

10.- Resolver :

$$\frac{2-x}{3}+\frac{3-x}{4}+\frac{3}{4}=\frac{x-4}{5}\quad\frac{x-5}{6}$$

A) -4 B) 8 C) -8 D) 4 E) 12

11.- Despeje "x" de :

$$\frac{2x+a}{b}-\frac{b-x}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$$

A) b B) a C) ab D) $2a$ E) $2b$

12.- Resolver : $\dfrac{5}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$

A) 10 B) -10 C) 4 D) -4 E) 8

13.- ¿Para qué valor de "x" se verifica :

$$(n+1+x)^2-(n+x)^2=2n+199\ ?$$

A) 66 B) 99 C) 39 D) 90 E) 96

14.- Resolver :

$$5\,[x+10-(2x+1)] = 3\,(x-1)-4\,(2x+5)$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 2 E) Absurda

15.- Resolver :

$$\frac{1}{x^2+3x-28} - \frac{1}{x^2+12x+35} = \frac{3}{x^2+x-20}$$

A) 4 B) -3 C) 3 D) 1 E) -4

16.- ¿Qué valor de "x" verifica la siguiente igualdad : $x - \sqrt{x^2-21} = 7$?

A) 5 B) -3 C) 7
D) -4 E) No existe tal valor

17.- Resolver :

$$\sqrt{12-\sqrt{112}} - \sqrt{3-\sqrt{7}}\;x + \sqrt{27-\sqrt{567}} = 0$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

18.- ¿Qué valor "x" satisface :

$$\frac{x-a}{x-a-1} - \frac{x-a-1}{x-a-2} = \frac{x-b}{x-b-1} - \frac{x-b-1}{x-b-2}\ ?$$

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{a+b}{3}$ C) $\frac{a+b+3}{2}$
D) $\frac{a+b+3}{2}$ E) $\frac{a+2b}{3}$

19.- Resolver para "x" :

$$\frac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-3b-c} = \frac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-b-3c}$$

A) $\frac{ab}{c}$ B) abc C) $\frac{c}{ab}$ D) $\frac{ac}{b}$ E) $\frac{bc}{a}$

NIVEL B

20.- Resolver : $\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x+\dfrac{3}{4}}} = \dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x+\dfrac{3}{5}}}$

A) 1 B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 0 E) $\nexists\ x$

21.- ¿Para qué valor de "x" se verifica la igualdad:

$$\sqrt{x-4a+16} = 2\sqrt{x-2a+4} - \sqrt{x}\ ?$$

A) a^2 B) $2\,a^2$ C) $\frac{a^2}{4}$ D) a E) a^2+1

22.- Resolver : $\sqrt{4x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{x+2+2\sqrt{x}}$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

23.- Resolver : $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{1-\dfrac{x+1}{x-1}} = \dfrac{1}{2}$

A) -0,2 B) -0,5 C) -0,25 D) 0.25 E) 0.6

24.- La solución de la ecuación :

$$\sqrt[3]{5+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{5-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{25}\ \text{, es :}$$

A) 10 B) 15 C) 20 D) 30 E) 5

25.- Al despejar "x" :

$m^2\,x + n\,(m-n) = (m-n)\,(3\,m+4\,n) + n^2\,x$;

se obtiene :

A) 3 B) m C) n D) $3m$ E) $m+n$

26.- Resolver :

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-5}{x-6} + \frac{x-2}{x-3}$$

A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 5,5 E) 6,5

27.- ¿Para qué valor de "x" se cumple :

$$\frac{2x+2}{9x^2-4} - \frac{x-2}{9x^2+12x+4} = \frac{x+4}{9x^2-4}\ ?$$

A) $-\frac{2}{3}$ B) -2 C) 2 D) 4 E) $\frac{2}{3}$

28.- Si la ecuación : $\frac{a}{b}\,(x-a) = \frac{b}{a}\,(x-b)$;
es incompatible, es correcto que :

A) $2a-b=0$ B) $a-b=0$ C) $a+b=0$

D) $a^2-3b=0$ E) $a+2b=0$

29.- Resolver la ecuación : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$; para luego indicar el valor recíproco de su raíz.

A) 0,4 B) 0,6 C) 0,8 D) 1,25 E) 1,5

NIVEL C

30.- Resolver : $\dfrac{x^2-6x+10}{x^2+8x+17}=\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^{-2}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{4}$

31.- Sobre la ecuación :

$$\frac{3}{x+2}-\frac{5x}{x^2-4}=\frac{3}{x-2}+\frac{x}{x^2-4}$$

se puede afirmar que :

A) Admite solución $x=2$

B) Admite solución $x=-2$

C) Es indeterminada

D) Es incompatible

E) Tiene una solución diferente de 2 y -2

32.- Resolver :

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{5x-4}+\sqrt{4x-3}$$

indicando luego la naturaleza de la raíz :

A) Primo B) Par C) Irracional

D) Impar E) Fracción

33.- Halle "x" de :

$$\frac{(x-3)(x+5)}{5(x-5)(x+7)}-\frac{(x-4)(x+2)}{4(x-6)(x+4)}=-\frac{1}{20}$$

A) $\frac{11}{4}$ B) $\frac{13}{2}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{13}{4}$ E) $\frac{7}{4}$

34.- La solución de la ecuación :

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$$

es :

A) 7 B) 13 C) 15 D) 5 E) 16

35.- Calcular : x^2+ax+a^2 , si "x" es la solución de :

$$\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\frac{4x-a}{2a}$$

A) $\frac{15}{16}a^2$ B) $\frac{61}{16}a^2$ C) $\frac{5}{4}a^2$

D) $\frac{9}{16}a^2$ E) $\frac{61}{25}a^2$

36.- ¿Para qué valor del parámetro "n" la ecuación : $\dfrac{2nx-3}{x-1}+\dfrac{3nx-2}{x+1}=2n+1$; se reduce a una de 1er grado en "x" ?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{3}$

37.- ¿Cuál es la solución de la ecuación reducida del problema anterior?

A) $\frac{11}{3}$ B) $-\frac{11}{3}$ C) $\frac{1}{13}$ D) $-\frac{1}{13}$ E) $\frac{12}{13}$

38.- Resolver la ecuación de 1er grado en "x" :

$$\sqrt[n^2-1]{x\sqrt[n]{x}}+n^2=n$$

A) 1 B) -1 C) n D) $-n$ E) F.D.

39.- Resolver :

$$\sqrt{4x^2+x+\sqrt{9x^2+5x+\sqrt{x^2+7}}}=1+2x$$

A) 6 B) 9 C) 2 D) 3 E) 5

40.- Halle la incógnita "x" de la ecuación :

$$\sqrt{(x+m)\left(x^2+m\right)}+2\sqrt{(x-m)\left(x^2-m^2\right)}$$

$$=2\sqrt{\left(x^2+m\right)(x-m)}+\sqrt{(x+m)^2(x-m)}$$

A) $2m$ B) $\frac{5m}{3}$ C) $5m$ D) $\frac{5m}{2}$ E) $3m$

41.- Despejar "x" de :

$$\frac{x^3+mx^2+nx+p}{x^3+ax^2+bx+p} = \frac{x^2+mx+n}{x^2+ax+b}$$

A) $\frac{b-m}{n-a}$ B) $\frac{b+n}{m+a}$ C) $\frac{b-n}{m-a}$

D) $\frac{b+n}{m-a}$ E) $\frac{b-n}{m+a}$

42.- Resolver :

$$\sqrt[3]{2\sqrt{5}+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{2\sqrt{5}-\sqrt{x}} = \sqrt[6]{20-x}$$

A) 4 B) 1 C) 9 D) 16 E) 12

43.- ¿Qué valor de "x" verifica la igualdad :

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = -\sqrt{2a+x} \quad ?$$

A) $\frac{3a}{2}$ B) $-\frac{3a}{2}$ C) $\frac{2a}{3}$

D) $-\frac{2a}{3}$ E) N.A.

44.- Resolver para "x" :

$$\frac{ax-1}{a} + \frac{bx-1}{b} = (2-a-b)\,x$$

A) $a+b$ B) ab C) $-\frac{1}{ab}$

D) $a+b-2$ E) $a-b$

45.- Luego de resolver :

$\sqrt{6x+1} + \sqrt{11x+3{,}5} = 5$; calcular : $(18x)^x$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

46.- Resolver : $\frac{3}{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\sqrt{9-\frac{36}{x}}}$

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

47.- Resolver :

$$\sqrt{2a-b+3x} + \sqrt{2b-a-3x} = \sqrt{2(a+b)}$$

A) $\frac{a-b}{4}$ B) $\frac{a+b}{3}$ C) $\frac{b-a}{4}$

D) $\frac{a+b}{2}$ E) $\frac{b-a}{2}$

48.- Resolver :

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x+12-5\sqrt{2x-1}} = 19\sqrt{2}$$

A) 121 B) 211 C) 112 D) 221 E) 17

49.- Resolver :

$$\sqrt{\frac{x+16}{4}} + \sqrt{\frac{x+17}{3}} + \sqrt{\frac{x+14}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{x+27}{5}} + \sqrt{\frac{x+20}{6}} + \sqrt{\frac{x+51}{7}} \; ;$$

para luego indicar la característica de la solución :

A) Primo B) Par C) Impar

D) Fraccionario E) N.A.

50.- ¿Para qué valor del parámetro "n" la ecuación en x :

$$8nx + 2n - 9 = nx + 2\,(x+n+7)\,;$$

será incompatible?

A) 7/2 B) -7/2 C) 2/7

D) -2/7 E) 3/7

15 Ecuaciones de 2^{do} Grado

DEFINICION 1.

Se llama ecuación de 2^{do} grado a toda ecuación que admite ser reducida a la siguiente forma :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \; \{a; b; c\} \subset \mathbb{R} \;/\; a \neq 0$$

Frecuentemente a dicha ecuación se le llama : Ecuación Cuadrática y se caracteriza por presentar 2 soluciones (su incognita x asume dos valores).

15.1) METODOS DE RESOLUCION DE LA ECUACION

Toda ecuación de 2^{do} grado podrá resolverse por al menos una de las siguientes formas :

15.1A POR FACTORIZACION

Este método se aplica únicamente si el trinomio : $ax^2 + bx + c$ es factorizable, para lo cual se debe tener en cuenta la siguiente propiedad :

$$\textbf{Si :} \quad m \,.\, n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \vee n = 0$$

Ejemplo.- *Resolver la siguiente ecuación* : $x^2 - x - 12 = 0$

<u>**Resolución**</u>.-

La ecuación dada es : $x^2 - x - 12 = 0$

Factoricemos al trinomio : $x^2 - x - 12$

Según el criterio del aspa simple tendremos :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - x - 12 \equiv (x-4)(x+3) \\ x \qquad -4 \\ x \qquad\; 3 \end{array}\right.$$

Luego la ecuación dada será : $(x-4)(x+3) = 0$

Finalmente de acuerdo a la propiedad señalada en el item 15.1A; se tendrá :

$$x - 4 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \vee \quad x = -3$$

Es decir el conjunto solución de la ecuación : $x^2 - x - 12 = 0$, es : C.S. = $\{4 ; -3\}$

15.1B POR LA FORMULA DE CARNOT

Dada la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0$, sus raíces se obtie-nen utilizando la fórmula deducida por Sadi Carnot :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde las raíces son : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ejemplo.- *Resolver la siguiente ecuación :* $x^2 + 3x - 1 = 0$

<u>Resolución</u>.-

De la ecuación se deduce que : $a = 1 \wedge b = 3 \wedge c = -1$

Reemplazando en la fórmula tenemos : $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

Efectuando y reducienco : $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Finalmente las raíces de la ecuación son : $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$

En consecuencia el conjunto solución es : $\text{C.S.} = \left\{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} ; \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right\}$

15.2) ANALISIS DE LA ECUACION

Para la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0$, se tiene :

I) Si : $a \neq 0 \wedge \{b ; c\} \subset \mathbb{R}$, la ecuación es : Compatible Determinada.

II) Si : $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$, la ecuación es : Compatible Indeterminada.

III) Si : $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0$, la ecuación es : Incompatible.

15.3) NATURALEZA DE LA RAICES

15.3A DISCRIMINANTE (Δ)

Llamamos discriminante a la expresión subradical contenida en la fórmula de Carnot, es decir :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

De este modo la fórmula que dá solución auna ecuación de 2do grado queda así :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

15.3B ANALISIS DEL DISCRIMINANTE

Observando la relación anterior, resulta previsible que el valor y/o signo del discriminantes determinará la naturaleza de las raíces de una ecuación de 2do grado. Veamos los siguientes casos :

Primero.- **Si : $\Delta > 0$**

En este caso las raíces de la ecuación serán reales y diferentes.

Segundo.- **Si : $\Delta = 0$**

En este caso las raíces de la ecuación serán reales e iguales. Este caso se presenta cuando el trinomio "$ax^2 + bx + c$" es un cuadrado perfecto.

Tercero.- **Si : $\Delta < 0$**

En este caso las raíces de la ecuación serán imaginarias y conjugadas. Debe notarse que las raíces imaginarias siempre se presentan en parejas, siendo una la conjugada de la otra.

Cuarto.- **Si : $\Delta = k^2$ (cuadrado perfecto)**

Siendo $a, b \wedge c$ números racionales, las raíces de la ecuación seran reales racionales. Pero si $\Delta \neq k^2$, las raíces de la ecuación serán reales irracionales y conjugadas.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Indicar la mayor raíz de la ecuación : $x^2 - 3x + 2,16 = 0$

A) 1,2 *B) 0,8* *C) 1,8* *D) 0,3* *E) 1,2*

Resolución.-

Debemos tener en cuenta que : $2,16 = \frac{216}{100} = \frac{54}{25}$

De este modo la ecuación dada queda así : $x^2 - 3x + \frac{54}{25} = 0$

Multiplicando por 25 a toda la ecuación, obtenemos : $25x^2 - 75x + 54 = 0$

Aplicando el método del aspa simple en el 1^{er} miembro : $(5x - 9)\ (5x - 6) = 0$

Finalmente al aplicar el criterio expuesto en el item 15.1A, concluímos que :

$$x_1 = 1,8 \quad ; \quad x_2 = 1,2$$ **RPTA. C**

2.- Una de las raíces de la ecuación : $\frac{x(x-2a)}{\sqrt{bc}} + \frac{a-x}{\sqrt{c}} - \frac{a-x}{\sqrt{b}} = 1 - \frac{a^2}{\sqrt{bc}}$, es :

A) $a + \sqrt{c}$ *B) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$* *C) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$* *D) $1 - \sqrt{b}$* *E) $a - \sqrt{c}$*

Resolución.-

Multiplicando a ambos miembros de la igualdad por el M.C.M. de los denominadores, obtenemos :

$$x(x - 2a) + \sqrt{b}\ (a - x) - \sqrt{c}\ (a - x) = \sqrt{b}\sqrt{c} - a^2$$

Transponiendo todos los términos al 1er miembro, se obtiene :

$$x^2 - \left(2a+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)x + \overbrace{a\sqrt{b} - a\sqrt{c} - \sqrt{b}\sqrt{c} + a^2} = 0 \quad \text{..... (1)}$$

Recociendo los factores comunes en la expresión indicada : $\underline{a\sqrt{b}} - \underline{a\sqrt{c}} - \underline{\sqrt{b}\sqrt{c}} + \underline{a^2}$

Factorizando, obtenemos : $a\left(a+\sqrt{b}\right) - \sqrt{c}\left(a+\sqrt{b}\right)$

A continuación factorizamos $\left(a+\sqrt{b}\right)$: $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{c}\right)$ ..... (2)

Reemplazando (2) en (1) : $x^2 - \left(2a+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)x + \left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{c}\right) = 0$

Factorizando por aspa simple, tendremos : $\left[x-\left(a+\sqrt{b}\right)\right]\left[x-\left(a-\sqrt{c}\right)\right] = 0$

Por último aplicamos el criterio expuesto en el item 15.1A :

$$x_1 = a+\sqrt{b} \quad ; \quad x_2 = a-\sqrt{c}$$

RPTA. E

3.- En la siguiente ecuación : $\dfrac{x^2+x-2}{x+1} + \dfrac{2y^2-y-1}{y^2-1} = \dfrac{5}{2}$ ***, determine el valor de "y" ; si*** $x=1$

A) 1 *B)* 0,1 *C)* 0 *D)* -3 *E)* A ∨ D

Resolución.-

Reemplazando $x = 1$ la ecuación quedará reducida a : $\dfrac{2y^2-y-1}{y^2-1} = \dfrac{5}{2}$

Teniendo en cuenta que, $y^2 - 1 \neq 0$; es decir : $y \neq \{-1 ; 1\}$,
multiplicamos por $\left(y^2-1\right)$ a ambos miembros de la ecuación : $2\left(2y^2-y-1\right) = 5\left(y^2-1\right)$

Efectuando operaciones y transponiendo todos los términos a un solo miembro, se obtiene : $y^2 + 2y - 3 = 0$

Descomponiendo el 1er miembro en dos factores, nos queda : $(y-1)(y+3) = 0$

Aplicando el método expuesto en el Item 15.1A, obtenemos : $y_1 = 1 \; ; \; y_2 = -3$

Pero como : $y \neq \{-1 , 1\}$, la solución de la ecuación, será : $y = -3$ **RPTA. D**

4.- Una raíz de : $abx^2 + (3a+2b)x + 6 = 0$ ***, es :***

A) $\dfrac{2}{a}$ *B)* $\dfrac{b}{3}$ *C)* $-\dfrac{2}{a}$ *D)* $\dfrac{3}{b}$ *E)* $-\dfrac{2}{a}$

Resolución.-

Descomponiendo el 1er miembro en dos factores, tendremos :

$$abx^2 + (3a + 2b)x + 6 \equiv (ax + 2)(bx + 3)$$

$$\begin{array}{ll} a\,x & 2 \\ b\,x & 3 \end{array}$$

A continuación la ecuación queda así : $(ax + 2)\ (bx + 3) = 0$

Finalmente aplicando el criterio expuesto en el item 15.1A, las raíces de la ecuación serán :

$$x_1 = -\frac{2}{a} \quad ; \quad x_2 = -\frac{3}{b}$$ **RPTA. E**

5.- Si : $x = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{2+....}}}$ ***, puede decirse que :***

A) $x = \sqrt{3}$ ***B)*** $0 < x < 1$ ***C)*** $x > 2$ ***D)*** $x = 2$ ***E) x es infinitamente grande***

Resolución.-

Sustituyamos con "y" a una parte de la expresión dada como condición : $x = \sqrt{1+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+......}}}_{y}}$ ..... (I)

A continuación hallemos el valor de la expresión "y" : $y = \sqrt{2+\sqrt{2+.....}}$ ..... (II)

Elevando ambos miembros al cuadrado y considerando que $y \geq 0$, obtenemos : $y^2 = 2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+.....}}}_{y}$

Observar que la expresión señalada corresponde a la relación (II), en consecuencia se podrá establecer la siguiente igualdad : $y^2 = 2 + y$

Es decir, se puede formar la ecuación : $y^2 - y - 2 = 0$

Descomponiendo el 1er miembro en dos factores : $(y - 2)\ (y + 1) = 0$

Aplicando ahora el criterio expuesto en el Item 15.1A : $y_1 = 2\ ;\ y_2 = -1$

Pero como $y \geq 0$, consideramos solo a : $y = 2$ ...... (III)

Finalmente reemplazando (III) en la relación (I), se tendrá : $x = \sqrt{1+y} = \sqrt{1+2}$

$$\therefore \quad x = \sqrt{3}$$ **RPTA. A**

6.- Resolver la siguiente ecuación : $(a - b)x + \dfrac{(a^2+b^2)^2}{(a+b)x} = \dfrac{2a(a^2+b^2)}{a+b}\ ;\ a \neq -b$

A) $x_1 = a + b$; $x_2 = a - b$ *B)* $x_1 = a^2 + b^2$; $x_2 = a^2 - b^2$

C) $x_1 = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$; $x_2 = \dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ *D)* $x_1 = \dfrac{a}{b}$; $x_2 = \dfrac{b}{a}$ *E) N.A.*

Resolución.-

Multiplicando a ambos miembros de la igualdad por el M.C.M. de los denominadores, obtendremos :

$$\underbrace{(a-b)(a+b)}\, x^2 + \left(a^2+b^2\right)^2 = 2a\left(a^2+b^2\right)x$$

Reconociendo la diferencia de cuadrados y transponiendo todo al 1er miembro :

$$\left(a^2-b^2\right)x^2 - 2a\left(a^2+b^2\right)x + \left(a^2+b^2\right)^2 = 0$$

Descomponiendo en dos factores :

$$\left[(a+b)x-\left(a^2+b^2\right)\right]\left[(a-b)x-\left(a^2+b^2\right)\right] = 0$$

Finalmente aplicamos el criterio expuesto en el item 15.1A y obtenemos :

$$x_1 = \frac{a^2+b^2}{a+b} \quad ; \quad x_2 = \frac{a^2+b^2}{a-b}$$

RPTA. C

7.- Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones :

I) $x^2 - x - 1 = 0$

II) $x^2 - 2x + 3 = 0$

III) $3x^2 + x - 2 = 0$

no admite raíces reales.

A) Solo I ***B) Solo II*** ***C) Solo III*** ***D) II ∧ III*** ***E) I ∧ II***

Resolución.-

Para responder a la pregunta será necesario analizar al discriminante de cada ecuación. Veamos :

a) Para la ecuación (I) : $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) \Rightarrow \Delta = 5$

Observamos que $\Delta > 0$, luego la ecuación tiene raíces reales y diferentes.

b) Para la ecuación (II) : $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) = -8 \Rightarrow \Delta = -8$

Como $\Delta < 0$, la ecuación tiene raíces imaginarias y conjugadas.

c) Para la ecuación (III) : $\Delta = (1)^2 - 4(3)(-2) = 25 \Rightarrow \Delta = 25$

Como $\Delta > 0$, la ecuación tiene raíces reales y diferentes.

Finalmente la ecuación que no admite raíces reales será (II) . **RPTA. B**

8.- Halle la menor raíz de la siguiente ecuación mónica de 2^{do} grado :

$$(m-2)\,x^2-(3m-8)\,x+m-9=0$$

A) -2 *B) -3* *C) 2* *D) 3* *E) -1*

Resolución.-

Por condición del problema el polinomio : $(m-2)x^2-(3m-8)x+m-9$; es mónico, en consecuencia se debe cumplir que : $m-2=1 \Rightarrow m=3$

Ahora la ecuación a resolver es : $[(3)-2]\,x^2-[3\,(3)-8]\,x+(3)-9=0$

Efectuando, la ecuación queda así : $x^2-x-6=0$

Descomponiendo el 1er miembro en dos factores, obtenemos : $(x-3)\,(x+2)=0$

Finalmente aplicando el criterio expuesto en el item 15.1A obtenemos las raíces de la ecuación :

$$x_1=3 \quad ; \quad x_2=-2$$

RPTA. A

9.- Calcular el valor de "m - 2n" si la ecuación cuadrática :

$$5\,(m+n+18)x^2+4\,(m-n)\,x+3\,m\,n=0$$ *, es incompatible :*

A) -9 *B) -18* *C) 9* *D) 18* *E) -13*

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 15.2 , para que la ecuación dada sea incompatible, se debe cumplir que :

$$5\,(m+n+18)=0 \quad \text{.........} \ (\mathrm{I})$$

$$4\,(m-n)=0 \quad \text{.........} \ (\mathrm{II})$$

$$3\,m\,n \neq 0 \quad \text{.........} \ (\mathrm{III})$$

A partir de (I) y (II), se puede establecer que : $\left\{\begin{matrix} m+n=-18 \\ m-n=\ \ 0 \end{matrix}\right\}$. Resolviendo : $m=-9 \ \wedge \ n=-9$

Finalmente observamos que estos valores satisfacen la condición III; por lo tanto diremos que el valor pedido será :

$$m-2\,n=-9-2\,(-9)=\ 9$$

RPTA. C

10.- Calcular la mayor solución de la ecuación : $(m-2)x^2-(2m-1)\,x+m-1=0$,

sabiendo que su discriminante es 25.

A) 3 *B) 0,5* *C) 2,5* *D) 1,5* *E) N.A.*

Resolución.-

Por condición del problema, se tiene que : $\Delta = 25$

Esto significa que : $[-(2m-1)]^2 - 4\,(m-2)\,(m-1) = 25$

Efectuando las operaciones indicadas, obtenemos : $4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 12m - 8 = 25$

Finalmente, reduciendo nos queda : $8m = 32 \;\Rightarrow\; m = 4$

Luego la ecuación a resolver será : $[(4) - 2]\,x^2 - [2\,(4) - 1]\,x + (4) - 1 = 0$

Efectuando operaciones : $2x^2 - 7x + 3 = 0$

Y descomponiendo el 1er miembro en dos factores : $(2x - 1)\,(x - 3) = 0$

Finalmente aplicando el criterio expuesto en el item 15.1A las soluciones de la ecuación serán :

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = -3$$

RPTA. A

11.- Calcular "m" para que la ecuación : $6x^2 + (2m + 3x) + m = 0$, tenga solo una raíz :

A) 3 ***B) 3/4*** ***C) 1/2*** ***D) 3/2*** ***E) 5/3***

Resolución.-

De acuerdo con la condición del problema, la ecuación dada, debe tener solo una raíz y esto ocurre únicamente cuando las dos raíces admitidas por la ecuación, son iguales.

Luego, de acuerdo con el 2do caso expuesto en el item 15.3B se deberá cumplir que : $\Delta = 0$, por lo tanto, se establece que :

$$(2m+3)^2 - 4\,(6)\,(m) = 0$$

Efectuando las operaciones indicadas, tendremos : $4m^2 - 12m + 9 = 0$

Reconociendo en el 1er miembro un T.C.P., se tiene : $(2m-3)^2 = 0$

Finalmente se consigue : $m = 3/2$ **RPTA. D**

15.4) PROPIEDADES DE LAS RAICES

Para la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0 \ / \ a \neq 0$, de raíces $x_1 \wedge x_2$, tenemos :

I) SUMA DE RAICES : $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

II) PRODUCTO DE RAICES : $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

III) DIFERENCIA DE RAICES : $d = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

Ejemplo.- *De la ecuación* : $2x^2 - 3x = 5 - 2x$, *calcular* :

I) La suma de raíces

II) El producto de raíces

III) La diferencia de raíces

Resolución.-

Transponiendo todos los términos a un solo miembro, se obtiene : $2x^2 - x - 5 = 0$ donde podemos reconocer que :

$$a = 2 ; \quad b = -1 ; \quad c = -5$$

Siendo : $x_1 \wedge x_2$ las raíces de la ecuación y de acuerdo con las propiedades enunciadas, se tendrá :

I) Suma de raíces : $x_1 + x_2 = -\frac{-1}{2} \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

II) Producto de raíces : $x_1 \cdot x_2 = \frac{-5}{2} \Rightarrow p = -\frac{5}{2}$

III) Diferencia de raíces : $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-5)}}{2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{41}}{2} \vee -\frac{\sqrt{41}}{2}$

15.4A RAICES PARTICULARES

En algunas ecuaciones las raíces se condicionan de tal modo que efectuando alguna operación elemental entre ellas, se podrá deducir alguna propiedad particular como por ejemplo :

a) ***RAICES SIMETRICAS.-*** Si $x_1 \wedge x_2$ son raíces simétricas, se podrá establecer lo siguiente :

$$x_1 = m \wedge x_2 = -m \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

b) ***RAICES RECIPROCAS.-*** Si $x_1 \wedge x_2$ son raíces recíprocas, se podrá establecer lo siguiente :

$$x_1 = m \wedge x_2 = \frac{1}{m} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$$

15.4B RAICES ESPECIALES

Llamaremos así a las siguientes raíces :

a) *RAIZ NULA.-*

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 / a \neq 0$, si ésta presenta una raíz nula ($x = 0$), se cumplirá que : $c = 0$

b) *RAIZ UNIDAD.-*

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 / a \neq 0$, si ésta presenta una raíz unidad ($x = 1$), se cumplirá que : $a + b + c = 0$

15.5) RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Considerando a $x_1 \wedge x_2$ como raíces de la ecuación tal que :

S = Suma de raíces

P = Producto de raíces

Entonces la ecuación que originó a dichas raíces se determina así :

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Ejemplo.- *¿Cuál es aquella ecuación cuadrática que admite como raíces a - 1 ∧ 3?*

<u>Resolución</u>.-

Por dato tenemos : $x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = 3$

A continuación recordamos que :

$$\left.\begin{array}{l} S = x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = (-1)(3) = -3 \end{array}\right\} \ldots\ldots(*)$$

Asimismo la ecuación buscada se encuentra de : $x^2 - Sx + P = 0$ .... (**)

Finalmente, reemplazamos (*) en (**) : $x^2 - 2x - 3 = 0$, ecuación de raíces : $-1 \wedge 3$

15.6) PROPIEDADES IMPORTANTES

15.6A DE LAS ECUACIONES EQUIVALENTES

Sean :

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dos ecuación equivalentes, luego entre ellas se cumplirá la siguiente relación :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

15.6B DE LA RAIZ COMUN

Sean: $a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ .... (I)

$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0$ .... (II)

dos ecuaciones que admiten una raíz en común, luego se cumplirá la siguiente relación :

$$\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right) = \left(a_1 c_2 - a_2 c_1\right)^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

12.- Si "r" y "s" son las raíces de la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0$; el valor de : $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$, es :

A) $b^2 - 4ac$ *B)* $\frac{b^2-4ac}{2a}$ *C)* $\frac{b^2-4ac}{c^2}$ *D)* $\frac{b^2-2ac}{c^2}$ *E)* $b^2 + 4ac$

Resolución.-

Nuestra estratégia consistirá en buscar el modo de que surjan durante el proceso de resolución la suma y el producto de raíces, para que ellas sean sustituídas por las propiedades expuestas en el item 15.4. Veamos :

Operando a partir de lo solicitado : $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{r^2+s^2}{r^2 s^2}$

Sustituyendo el numerador por un equivalente que proviene de un T.C.P. : $\frac{(r+s)^2 - 2(r.s)}{(r.s)^2}$ .... (*)

De acuerdo al Item 15.4., se sabe que : $r + s = -\frac{b}{a} \wedge r.s = \frac{c}{a}$ .... (**)

Si ahora reemplazamos (**) en (*), obtenemos : $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$

Finalmente efectuando las operaciones indicadas, se tendrá : $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{b^2-2ac}{c^2}$

RPTA. D

13.- Si la ecuación : $x^2 - nx + 36 = 0$, admite como raíces a : $x_1 \wedge x_2$, tal que :

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$; encontrar el valor de "n".

A) 25 *B) 18* *C) 12* *D) 24* *E) 15*

Resolución.-

Como hicimos en el problema anterior, trataremos de obtener expresiones que contengan a la suma y al producto de las raíces. Veamos :

De la condición dada, obtenemos : $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2} = \dfrac{5}{12}$ .... (1)

De acuerdo con el Item 15.4, se debe cumplir que : $x_1 + x_2 = n \;\wedge\; x_1 . x_2 = 36$ .... (2)

Si reemplazamos (2) en (1), se obtiene : $\dfrac{n}{36} = \dfrac{5}{12}$

Luego de simplificar, encontramos que : $\mathbf{n = 15}$ **RPTA. E**

14.- Siendo : $x_1 \wedge x_2$ las raices de la ecuación : $5x^2 - 23x + 11 = 0$, el valor de :

$$\frac{3x_1+1}{2x_1-9} \cdot \frac{3x_2+1}{2x_2-9} \; ; \textit{ es}$$

A) $\dfrac{17}{35}$ *B)* $\dfrac{143}{35}$ *C)* $\dfrac{153}{35}$ *D)* $\dfrac{183}{35}$ *E)* $\dfrac{173}{35}$

Resolución.-

Sea "T" el valor pedido, es decir : $T = \dfrac{(3x_1+1)(3x_2+1)}{(2x_1-9)(2x_2-9)}$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, obtenemos : $T = \dfrac{9(x_1 . x_2)+3(x_1+x_2)+1}{4(x_1 . x_2)-18(x_1+x_2)+81}$ ... (*)

De acuerdo con las propiedades de las raíces : $x_1 + x_2 = \dfrac{23}{5} \;\wedge\; x_1 . x_2 = \dfrac{11}{5}$

Ahora reemplazando en (*), obteniéndose : $T = \dfrac{9\left(\frac{11}{5}\right)+3\left(\frac{23}{5}\right)+1}{4\left(\frac{11}{5}\right)-18\left(\frac{23}{5}\right)+81}$

Finalmente al efectuar operaciones se concluye que : $\mathbf{T = \dfrac{173}{35}}$ **RPTA. E**

15.- ¿Para qué valores de "m" la ecuación : $x^2 - 2(3m+1)x + 7(2m+3) = 0$, tendrá sus dos raíces iguales?

A) $5 ; 2$ *B)* $1 ; -\dfrac{3}{2}$ *C)* $4 ; -2$ *D)* $3 ; -1$ *E)* $2 ; -\dfrac{10}{9}$

Resolución.-

De acuerdo con el enunciado, las raíces de la ecuación deberán ser iguales y esto solo puede ocurrir si el discriminante de la ecuación es igual a cero, es decir :

$$b^2 - 4ac = 0 \quad .... (*)$$

Reconociendo a : a , $b \wedge c$ de la ecuación original, reemplazamos en (*) : $[-2(3m+1)]^2 - 4(1)[7(2m+3)] = 0$

Efectuando las operaciones indicadas : $4(3m+1)^2 - 4(14m+21) = 0$

Simplificando y reduciendo, se obtiene : $9m^2 - 8m - 20 = 0$

Descomponiendo por el método del aspa simple : $(9m+10)(m-2) = 0$

Finalmente igualando a cero cada factor : $m_1 = -\dfrac{10}{9}$; $m_2 = 2$ **RPTA. E**

16.- La ecuación cuadrática cuyas raíces son : $2+\sqrt{2} \wedge 2-\sqrt{2}$, es :

A) $x^2 + 2x - 1 = 0$ *B)* $x^2 + 4x + 2 = 0$ *C)* $2x^2 - 4x + 1 = 0$

D) $x^2 - 4x + 2 = 0$ *E)* $x^2 - 8x + 2 = 0$

Resolución.-

De acuerdo con el item 15.5, la reconstrucción de una ecuación cuadrática se inicia a partir de la siguiente ecuación : $x^2 - Sx + P = 0$ .... (1)

Por dato sabemos que : $x_1 = 2+\sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = 2-\sqrt{2}$ ...... (*)

De (*) se deduce que : $S = x_1 + x_2 = 4 \quad \wedge \quad P = x_1 \cdot x_2 = 2$ .... (2)

Finalmente reemplazando (2) en (1), la ecuación buscada es : $x^2 - 4x + 2 = 0$ **RPTA. D**

17.- Si "α" y "θ" son la raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 5 = 0$, encontrar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean : α^2 y θ^2

A) $x^2 + 14x + 25 = 0$ *B)* $x^2 + 14x + 15 = 0$ *C)* $x^2 - 2x - 1 = 0$

D) $x^2 - 14x - 25 = 0$ *E)* $x^2 - 14x + 25 = 0$

Resolución.-

Empleando el mismo argumento del ejercicio anterior diremos que la ecuación buscada tiene la forma :

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad .... (I)$$

Donde por condición del problema, la suma de raíces (S) y el producto de raíces (P) deben ser :

$$S = \alpha^2 + \theta^2 = (\alpha+\theta)^2 - 2(\alpha \cdot \theta) \quad .... (II)$$

$$P = \alpha^2 \cdot \theta^2 = (\alpha \cdot \theta)^2 \quad .... (III)$$

Si α y θ , son las raíces de la ecuación dada, aplicando las mismas propiedades de raíces, tendremos que :

$$\alpha + \theta = 2 \quad \wedge \quad \alpha . \theta = -5$$

Reemplazando estos valores en (II) y (III), obtenemos :

$$S = (2)^2 - 2(-5) = 14 \qquad \wedge \qquad P = (-5)^2 = 25 \quad ..... (IV)$$

Finalmente reemplazando (IV) en (I), la ecuación buscada será :

$$\mathbf{x^2 - 14x + 25 = 0} \qquad \textbf{RPTA. E}$$

18.- ¿Para qué valor de "m" las raíces de la ecuación : $x^2 - (m+3)x + \frac{m^2}{4} + 1 = 0$; se diferencian en 2 ?

A) $-\frac{1}{6}$ ***B)*** $\frac{1}{3}$ ***C)*** $-\frac{1}{3}$ ***D)*** $\frac{1}{6}$ ***E)*** $\frac{2}{3}$

Resolución.-

Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación, por condición del problema, se debe cumplir que : $\quad x_1 - x_2 = 2 \quad ..... (I)$

De las propiedades de las raíces vistas en el item 15.4, se sabe que : $\quad |x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \quad ..... (II)$

A partir de la ecuación dada reconocemos que : $\quad a = 1 \wedge b = -(m+3) \wedge c = \dfrac{m^2}{4} + 1 \quad ... (III)$

Reemplazando (I) y (III) en (II), obtenemos : $\quad |2| = \dfrac{\sqrt{[-(m+3)]^2 - 4(1)\left(\frac{m^2}{4} + 1\right)}}{1}$

Efectuando las operaciones indicadas : $\quad |2| = \sqrt{(m+3)^2 - (m^2 + 4)}$

Con la finalidad de eliminar el signo radical, elevamos ambos miembros al cuadrado : $\quad 4 = (m+3)^2 - (m^2 + 4)$

Efectuando operaciones, obtenemos : $\quad 4 = 6m + 5$

Finalmente se concluye que : $\quad \mathbf{m = -\frac{1}{6}} \qquad$ **RPTA. A**

19.- La ecuación de 2^do^ grado una de cuyas raíces es la fracción :

$$x = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}}}} \quad ; \quad \textit{está dada por :}$$

***A)** $3x^2 - 5 = 0$ **B)** $5x^2 - 3 = 0$ **C)** $3x^2 - x - 5 = 0$ **D)** $5x^2 - x - 3 = 0$ **E)** $2x^2 - 4 = 0$*

Resolución.-

Muestra estratégia para resolver este problema consistirá en formar la ecuación a partir de la raíz conocida. Para ello transponemos la unidad (1) del 2^{do} miembro al primero, obteniéndose :

$$x - 1 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \boxed{\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}} \quad .... (*)$$

Debes observar que la expresión indicada, tiene una naturaleza infinita, lo que nos permite asegurar que es igual a todo el 2^{do} miembro de (*), por lo tanto puede ser reemplazada por $x - 1$; así :

$$x - 1 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + (x - 1)}}$$

Operando en la última fracción, nos queda :

$$x - 1 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x + 1}}$$

Efectuando operaciones, se obtiene :

$$x - 1 = \frac{x + 1}{3x + 4}$$

Multiplicando ambos miembros por $(3x + 4)$: $(x - 1)(3x + 4) = x + 1$

Efectuando las multiplicaciones indicadas y simplificando, concluímos que la ecuación buscada es : $\mathbf{3x^2 - 5 = 0}$ **RPTA. A**

20.- Determine la suma de los valores que puede tomar "a" para que la ecuación : $(a+1)x^2 + ax + 1 = 0$; tenga una sola solución si "a" es un número real y diferente de -1.

A)** 12 **B)** $4\sqrt{2}$ **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6 **PUCP 93-II

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 15.3B, debemos reconocer que si la ecuación cuadrática dada tiene solo una solución, se debe cumplir que las raíces de dicha ecuación deben ser iguales, es decir, el discriminante de la ecuación dada debe ser igual a cero. Veamos :

$$b^2 - 4\,ac = 0 \quad .... \; (*)$$

Reemplazando a , $b \wedge c$ de la ecuación dada en (*), tendremos : $a^2 - 4(a + 1)(1) = 0$

Luego la ecuación que permite calcular los valores de "a" es : $a^2 - 4a - 4 = 0$

Como se pide la suma de los valores de "a", aplicaremos la propiedad de las raíces expuesta en el item 15.4.

$$a_1 + a_2 = -\,\frac{-4}{1} = \mathbf{4} \qquad \textbf{RPTA. C}$$

21.- En las siguientes ecuaciones : $x^2 - 5x + k = 0$ .... *(I)*

$x^2 - 7x + k = 0$ .... *(II)*

una raíz de la ecuación (I) es la mitad de una raíz de la ecuación (II), luego el valor de "k" es igual a :

A) 8 B) -6 C) 6 D) 12 E) 4 UNMSM 92

Resolución.-

Sea x_1 la raíz de la primera ecuación, y, x_2 la raíz de la segunda ecuación, entonces por condición del problema se debe cumplir que:

$$x_1 = \frac{x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad ......(\alpha)$$

En la ecuación (I), sabemos que : $x_1^2 - 5x_1 + k = 0$ .... (1)

Asimismo en la ecuación (II), tenemos : $x_2^2 - 7x_2 + k = 0$ .... (2)

Reemplazando (α) en (2), se tendrá : $(2x_1)^2 - 7(2x_1) + k = 0$

Efectuando las operacones indicadas : $4x_1^2 - 14x_1 + k = 0$ .... (3)

A continuación restamos (3) - (1) miembro a miembro , obteniéndose : $3x_1^2 - 9x_1 = 0$

Despejando y simplificando , encontramos : $x_1 = 3$ ....(β)

Finalmente reemplazando (β) en (1), se tendrá : $(3)^2 - 5(3) + k = 0$

En consecuencia el valor buscado será : $k = 6$ **RPTA. C**

22.- Los valores de "x" que satisfacen la ecuación : $\sqrt{2x+13} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6}$ ***, tienen la propiedad que su suma es :***

A) -14 B) -7 C) -9 D) -2 E) 7

UNI 90

Resolución.-

Con la finalidad de eliminar al signo radical, elevamos ambos miembros al cuadrado, obteniendo : $2x + 13 = 2x + 9 + 2\sqrt{(x+3)(x+6)}$

Reduciendo y simplificando, la ecuación, será : $2 = \sqrt{(x+3)(x+6)}$

Elevando otra vez al cuadrado, se tendrá : $4 = x^2 + 9x + 18$

Simplificando y transponiendo téminos, se tendrá : $x^2 + 9x + 14 = 0$

Factorizando por el método del asapa simple se obtiene : $(x+7)\ (x+2)=0$

Igualando a cero cada factor , se obtiene : $x_1=-7\ \ ;\ \ x_2=-2$

Reemplazando cada valor obtenido en la ecuación original , evaluamos que la única solución que verifica la ecuación es : $\boldsymbol{x=-2}$ **RPTA. D**

23.- Si "a" y "b" son las raíces de la ecuación : $x^2-6x+c=0$ ***; entonces el valor de :***

$$\frac{a^2+b^2+2c}{9}$$ ***, es igual a :***

A) 3 ***B) 6*** ***C) -6*** ***D) 4*** ***E) -3***

Resolución.-

Sea "T" el valor pedido, luego : $$\mathrm{T}=\frac{a^2+b^2+2c}{9}$$

Transformando el numerador en base a los productos notables, tendremos que : $$\mathrm{T}=\frac{(a+b)^2-2ab+2c}{9}\qquad \ldots\ldots(*)$$

Siendo a y b las raíces de la ecuación dada, de acuerdo a las propiedades de las raices expuesta en el item 15.4, tendremos que : $a+b=6\ \wedge\ ab=c$

Luego reemplazando dichos valores en (*), tenemos : $$\mathrm{T}=\frac{(6)^2-\cancel{2c}+\cancel{2c}}{9}$$

Finalmente el valor pedido será : $\mathbf{T=4}$ **RPTA. D**

24.- Si a y b son números reales de manera que las ecuaciones :

$$(7a-2)x^2-(5a-3)x+1=0$$

$$8bx^2-(4b+2)x+2=0$$

admiten las mismas raíces, entonces el valor de "a + b", es :

A) 5 ***B) 3*** ***C) -1*** ***D) -3*** ***E) 2*** ***UNI 86***

Resolución.-

Por condición del problema las ecuaciones dadas son equivalentes, por tal razón aplicaremos la propiedad expuesta en el item 15.6A , de este modo se tendrá :

(II)

$$\frac{7a-2}{8b}=\frac{-(5a-3)}{-(4b+2)}=\frac{1}{2}$$

(I)

De (I) se establece que : $7a-4b=2$

Y de (II) obtenemos : $10a-4b=8$

Resolviendo encotramos que : $a=2\ \wedge\ b=3\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a+b=5}$ **RPTA. A**

25.- ¿Para qué valor de "n"se cumple que una raíz de la ecuación : $8x^2 - 3nx + (n - 1) = 0$, es el doble de la otra ?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución.-

Sean $x_1 \wedge x_2$ las raíces de la ecuación , luego por condición del problema se deberá cumplir que :

$$x_1 = a \quad \wedge \quad x_2 = 2a$$

A partir de estas dos relaciones ,se puede establecer que :

$$x_1 + x_2 = 3a \qquad \text{............ (I)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2a^2 \qquad \text{............ (II)}$$

Con la finalidad de eliminar al parámetro a , elevamos al cuadrado a ambos miembros de la relación (I) para luego dividirlo miembro a miembro con la relación (II). Veamos :

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{9a^2}{2a^2}$$

Luego de simplificar y multiplicar en aspa , tendremos : $2(x_1 + x_2)^2 = 9(x_1 \cdot x_2)$ .... (III)

Como $x_1 \wedge x_2$, son raíces de la ecuación : $8x^2 - 3nx + (n - 1) = 0$

Aplicando las propiedades de las raices ,para $x_1 \wedge x_2$ se cumplirá que :

$$x_1 + x_2 = \frac{3n}{8} \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{n-1}{8} \qquad \text{..............................(IV)}$$

Reemplazando (IV) en (III), se tendrá : $2\left(\frac{3n}{8}\right)^2 = 9\left(\frac{n-1}{8}\right)$

Simplificando y transponiendo términos la ecuación que permite encontrar al valor de "n", será : $n^2 - 4n + 4 = 0$

Finalmente resolviendo dicha ecuación obtenemos : $\boldsymbol{n = 2}$ **RPTA. B**

26.- Con respecto al problema anterior indique Ud. la menor de las raíces de la ecuación.

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{1}{8}$ *C)* $\frac{1}{16}$ *D)* $\frac{1}{4}$ *E)* $\frac{1}{32}$

Resolución.-

Sustituyendo el valor encontrado para "n" en la ecuación original,ésta se convertirá en : $8x^2 - 6x + 1 = 0$

Descomponiendo por el método del aspa simple se obtiene : $(4x - 1)(2x - 1) = 0$

Igualando a cero cada factor, encontramos las raices : $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{2}$

Finalmente podemos reconocer que la menor raíz es : $\boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$ **RPTA. D**

27.- Si r y s son las raices de la ecuación : $x^2 + bx + 4c = 0$ ***, y ,*** $2r + k \wedge 2s + k$ ***de*** $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ ***; entonces*** $(\alpha^2 - 4\beta)$ ***, es igual a :***

A) $2b^2 - 16c$ ***B)*** $b^2 - 16c$ ***C)*** $b^2 - 4c$ ***D)*** $4b^2 - 64c$ ***E)*** $4b^2 - 32x$

Resolución.-

Aplicando propiedades de las raices expuestas en el item 15.4 a ambas ecuaciones, se tendrá :

1) Para la 1ra ecuación de raíces $r \wedge s$ se cumple : $r + s = -b \wedge r.s = 4c$ .... (*)

2) Para la 2da ecuación de raíces $2r + k \wedge 2s + k$,se cumplirá que :

La suma de raices nos dá : $2r + k + 2s + k = -\alpha \Rightarrow \alpha = -[2(r + s) + 2k]$

Sustituyendo ($r + s$) por $-b$, tendremos : $\alpha = 2b - 2k$ .... (I)

El producto de raices nos dá : $(2r + k)(2s + k) = \beta \Rightarrow \beta = k^2 + 2(r + s)k + 4(rs)$

Sustituyendo $(r + s)$ por $-b \wedge (r.s)$ por $4c$, tendremos : $\beta = k^2 - 2bk + 16c$ .... (II)

Sea T el valor pedido, entonces : $T = \alpha^2 - 4\beta$ ....(III)

Reemplazando (I) y (II) en (III), obtenemos : $T = (2b - 2k)^2 - 4(k^2 - 2bk + 16c)$

Efectuando las operaciones indicadas : $T = 4b^2 - 8bk + 4k^2 - 4k^2 + 8bk - 64c$

Finalmente, al simplificar el valor pedido será : $\mathbf{T = 4b^2 - 64c}$ **RPTA. D**

28.- Si la ecuación : $x^2 - (A + C)x + AC - B^2 = 0$ ***, tiene raíces*** $r \wedge s$ ***y si además :*** $AC - B^2 > 0$ ***, entonces :***

A) $A > 0$ ***, y ,*** $C < 0$ ***B) solamente*** $A > 0$ ***, y ,*** $C > B$

C) Solamente $A < 0$ ***, y ,*** $C < 0$ ***D)*** $r \wedge s$ ***tienen signos diferentes , y ,*** $r + s = A + C$

E) $r \wedge s$ ***tienen el mismo signo , y, A y C tienen el mismo signo que*** $r \wedge s$

UNI 93

Resolución.-

Teniendo en cuenta las propiedades de las raices expuesta en el item 15.4, se plantea :

$$r + s = A + C \qquad \text{............ (I)}$$

$$rs = AC - B^2 \qquad \text{............ (II)}$$

Por condición del problema : $AC - B^2 > 0 \Rightarrow AC > B^2 > 0$

Observar que de esta resolución podemos deducir que A y C tienen igual signo.

De esta conclusión, en (II) podemos afirmar que : $rs > 0$

En consecuencia $r \wedge s$ tienen igual signo. Finalmente de la relación (I) podemos deducir además que : r y s tienen el mismo signo de A y C.

RPTA. E

29.- Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación : $x^2 - 5x - 3 = 0$, calcular el valor de :

$$x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1)$$

A) 24 *B) 25* *C) 26* *D) 27* *E) 28*

Resolución.-

Sea T el valor pedido, es decir : $T = x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1)$

Desarrollando las operaciones indicadas : $T = x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2$

Acomodando los términos, se tiene : $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$

En base a los productos notables, se tiene : $T = (x_1+x_2)^2 - 2(x_1 x_2) - (x_1+x_2)$ ...... (*)

Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación dada, entonces de acuerdo a las propiedades de las raices expuesta en el item 15.4 ; se debe cumplir que :

$$x_1 + x_2 = 5 \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = -3$$

Reemplazando dichos valores en la relación (*), se obtiene : $T = (5)^2 - 2(-3) - (5) = 25 + 6 - 5$

Finalmente el valor pedido será : $\mathbf{T = 26}$ **RPTA. C**

30.- Al resolver la siguiente ecuación : $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2 = x$, el cuadrado de una de sus raíces es :

A) $\frac{9}{4}$ *B) $\frac{81}{4}$* *C) 2 500* *D) 5 184* *E) 5 190* ***UNI 94***

Resolución.-

Transponiendo y efectuando operaciones en el primer miembro de la ecuación dada , se tendrá : $\frac{1}{9}x - \sqrt{\frac{x}{2}} - 2 = 0$

Transformando convenientemente la ecuación : $\frac{2}{9} \cdot \sqrt{\frac{x}{2}}^{\,2} - \sqrt{\frac{x}{2}} - 2 = 0$

Multiplicando por 9 a toda la ecuación : $2\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 - 9\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) - 18 = 0$

Factorizando el primer miembro por aspa simple, se obtiene : $\left(2\sqrt{\frac{x}{2}} + 3\right)\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - 6\right) = 0$

De estos dos factores, podemos reconocer que : $2\sqrt{\frac{x}{2}} + 3 \neq 0$

De este modo ,necesariamente se debe cumplir que : $\sqrt{\frac{x}{2}} - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 72$

Finalmente los solicitado es : $x^2 = 5\,184$ **RPTA. D**

31.- ¿Para qué valor o valores del parámetro "m" , el trinomio :

$P(x) \equiv x^2 - 4x + m^2 - m + 5$; acepta como mínimo valor al número 3 ?

A) 1;2 *B) -1;2* *C) 1;-2* *D) 3;-2* *E) 2;-3*

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en expresar al trinomio $P(x)$ en una expresión de la forma :

$$P(x) \equiv [M(x)]^2 + b$$

De aquí se puede deducir que el mínimo valor de $P(x)$,se presenta cuando $M(x) = 0$. Veamos:

Expresando 5 como la suma indicada 4+1, tendremos :

$$P(x) \equiv \underbrace{x^2 - 4x + 4} + m^2 - m + 1$$

Reconociendo que la expresión señalada es un T.C.P. :

$$P(x) \equiv \underbrace{(x-2)^2}_{M(x)} + \left(m^2 - m + 1\right) \qquad \text{....... (*)}$$

Utilizando el criterio expuesto líneas arriba , diremos que el mínimo valor de $P(x)$, viene dado por :

$$P(x)_{mín} = m^2 - m + 1 \qquad \text{....... (**)}$$

Por condición se sabe que el mínimo valor de $P(x)$ es 3 , luego en (**) :

$$3 = m^2 - m + 1 \quad \Rightarrow \quad m^2 - m - 2 = 0$$

Descomponiendo en dos factores e igualando a cero a cada uno, tendremos que los valores de m que hacen que $P(x)$ sea mínimo son :

$$m_1 = 2 \ ; \ m_2 = -1$$ **RPTA. B**

MISCELANEA

32.- *Si "x" es un número complejo , la parte imaginaria de una de las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - i = 0$; es :*

A) 1 *B)* -1 *C)* $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ *D)* $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ *E)* $\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$

Resolución.-

De la ecuación dada reconocemos que : $a = 1$; $b = 2 \wedge c = -i$; luego aplicando la fórmula de Carnot, encontraremos las raices de la ecuación cuadrática . Veamos :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-i)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1+i)}}{2}$$

Haciendo las simplificaciones correspondientes, tendremos que : $x = -1 \pm \sqrt{1+i}$ .... (*)

Observando los distractores dados, reconocemos que es necesario transformar la parte imaginaria del resultado obtenido. Para ello se sugiere recordar el ejemplo desarrollado en el item 13.11, en donde se demostró que :

Si $Z = 1+i \Rightarrow |Z| = |1+i| = \sqrt{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow Z = |Z|e^{i\theta}$, es decir : $Z = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$

De este modo la raíz de Z , viene dada así : $\sqrt{Z} = \sqrt{|Z|}\, e^{\frac{i\pi}{8}}$

Sustituyendo datos, tendremos : $\sqrt{1+i} = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{8}}$

Utilizando la fórmula de Euler, se tendrá : $\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$

Reemplazando el valor de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$: $\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\, i\right)$

Efectuando operaciones , tendremos : $\sqrt{1+i} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\, i$

Finalmente reemplazando en (*) se obtiene : $x = -1 \pm \left\{\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\, i\right\}$

Luego la parte imaginaria de las soluciones de la ecuación es :

$$\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

RPTA. E

33.- Al resolver la ecuación : $\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x-\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=-11$ ***, indicar la naturaleza de su mayor raíz.***

A) cuadrado ***B) par*** ***C) irracional*** ***D) primo*** ***E) fracción***

Resolución.-

Efectuando operaciones en el primer miembro se obtiene :

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^2+\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=-11$$

Aplicando la equivalencia de Legendre en el numerador y la diferencia de cuadrados en el denominador la ecuación, queda así :

$$\frac{2\left[x^2+\sqrt{x^2+x+1}^{\,2}\right]}{x^2-\sqrt{x^2+x+1}^{\,2}}=-11$$

Efectuando las operaciones indicadas :

$$\frac{2\left(2x^2+x+1\right)}{-(x+1)}=-11$$

Multiplicando ambos miembros por $(x+1)$: $4x^2+2x+2=11x+11$

Por transposición de términos tendremos : $4x^2-9x-9=0$

Descomponiendo por el método del aspa simple : $(4x+3)(x-3)=0$

Igualando a cero cada factor, encontramos : $x_1=\dfrac{-3}{4}$; $x_2=3$

Finalmente la mayor raíz : $\boldsymbol{x=3}$ es : **número primo** **RPTA. D**

34.- Indicar el conjunto solución de la ecuación : $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$

A) $\{0\,;\,2a\}$ ***B)*** $\left\{0;\dfrac{64a}{3}\right\}$ ***C)*** $\left\{0;\dfrac{65a}{63}\right\}$ ***D)*** $\left\{0;\dfrac{62a}{61}\right\}$ ***E)*** $\left\{0;\dfrac{63a}{65}\right\}$

Resolución.-

La ecuación dada se podrá escribir así : $\sqrt[3]{a+x}^{\,2}+4\sqrt[3]{a-x}^{\,2}=5\sqrt[3]{(a+x)(a-x)}$

Aplicando teoremas de exponentes y transponiendo términos conseguimos :

$$\left(\sqrt[3]{a+x}\right)^2-5\left(\sqrt[3]{a+x}\right)\left(\sqrt[3]{a-x}\right)+4\left(\sqrt[3]{a-x}\right)^2=0$$

Utilizando el criterio del aspa simple en el primer miembro , la ecuación a resolver será:

$$\left(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}\right)\left(\sqrt[3]{a+x}-4\sqrt[3]{a-x}\right)=0$$

Igualando a cero cada factor : $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}=0 \quad \vee \quad \sqrt[3]{a+x}-4\sqrt[3]{a-x}=0$

Resolviendo cada ecuación por separado, tendremos :

$$\sqrt[3]{a+x} = \sqrt[3]{a-x} \quad \vee \quad \sqrt[3]{a+x} = 4\sqrt[3]{a-x}$$

Elevando al cubo, obtenemos : $a + x = a - x \quad \vee \quad a + x = 64\,(a - x)$

Despejando x en cada ecuación : $x = 0 \quad \vee \quad x = \dfrac{63a}{65}$

Finalmente el conjunto solución de la ecuación será : $\left\{0\,;\,\dfrac{63a}{65}\right\}$ **RPTA. E**

35.- Dada la ecuación : $(n-2)x^2 + (3-n)x + 2n = 1$; luego de calcular "n" en cada caso :

I) Las raíces de la ecuación son simétricas

II) Las raíces de la ecuación son recíprocas

III) Una raíz es : $x = -1$

Indicar por respuesta la suma de todos los valores que asume "n".

A) $\frac{7}{2}$ *B)* $\frac{5}{2}$ *C)* $\frac{3}{2}$ *D)* 7 *E)* $\frac{-1}{4}$

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en analizar a la ecuación dada en base a lo explicado en el item 15.4A, relativo a las raices particulares . Veamos :

I) Si las raíces de la ecuación son *simétricas*, su suma debe ser igual a cero (0). Empleando la propiedad de la suma de las raices expuesta en el item 15.4 , planteamos :

$$0 = -\frac{3-n}{n-2} \quad \Rightarrow \quad n - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 3$$

II) Si las raíces de la ecuación son *recíprocas*, su producto será igual a uno(1) . Luego , empleando la propiedad del producto de las raices expuesta en el item 15.4 , planteamos :

$$1 = \frac{2n-1}{n-2} \quad \Rightarrow \quad 2n - 1 = n - 2 \quad \Rightarrow \quad n = -1$$

III) Si una raíz de la ecuación es : $x = -1$, dicho valor al ser reemplazado en el primer miembro de la ecuación dada, deberá verificar la siguiente igualdad :

$$(n-2)(-1)^2 + (3-n)(-1) + (2n-1) = 0$$

$$n - 2 - 3 + n + 2n - 1 = 0$$

De donde se obtiene que : $\Rightarrow \quad n = \dfrac{3}{2}$

Finalmente la Σ de valores de n es : $\Sigma n = (3) + (-1) + \left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$ **RPTA. A**

36.- Indicar la mayor solución de la ecuación : $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}} + 6\sqrt{\dfrac{x-5}{x+5}} = 5$

A) $\dfrac{25}{2}$ *B)* $\dfrac{25}{3}$ *C)* $\dfrac{25}{4}$ *D)* $\dfrac{25}{6}$ *E)* $\dfrac{25}{7}$

Resolución.-

Haciendo el siguiente cambio de variable : $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}} = a$, donde : $a \geq 0$.

Luego, en la ecuación dada tendremos : $a + \dfrac{6}{a} = 5$

Efectuando operaciones , tendremos : $a^2 - 5a + 6 = 0$

Descomponiendo en dos factores e igualando acero cada uno , tendremos : $a_1 = 2$; $a_2 = 3$

Si : $a = 2$, tendremos : $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}} = 2 \Rightarrow \dfrac{x+5}{x-5} = 4$, es decir : $x = \dfrac{25}{3}$

Si : $a = 3$, tendremos : $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}} = 3 \Rightarrow \dfrac{x+5}{x-5} = 9$, es decir : $x = \dfrac{25}{4}$

Finalmente se observa que la mayor solución es : $x = \dfrac{25}{3}$ **RPTA. B**

37.- Si la suma de las inversas de las raíces de la ecuación : $x^2 - mx + 1 = 0$,es igual a la inversa de la suma de las raíces ¿ Qué valor asume "m" ?

A) ± 1 *B)* $\pm \dfrac{1}{2}$ *C)* -1 *D)* 2 *E)* -2

Resolución.-

Sean $x_1 \wedge x_2$ las raíces de la ecuación dada, luego de acuerdo a las propiedades de las raices expuestas en el item 15.4, tendremos : $x_1 + x_2 = m \wedge x_1 . x_2 = 1$ .... (I)

Por condición del problema se plantea : $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_1 + x_2}$

Efectuando operaciones , tendremos : $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{1}{x_1 + x_2}$ .... (II)

Reemplazando (I) en (II) se obtiene : $\dfrac{m}{1} = \dfrac{1}{m}$

De donde finalmente se descubre que : $m = \pm 1$ **RPTA. A**

38.- La suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación : $x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$, es igual a "k" . Determine el mínimo valor de "k".

A) 10 *B)* 12 *C)* 9 *D)* 4 *E)* 8

Resolución.-

Sean $x_1 \wedge x_2$ las raíces de la ecuación, luego por condición del problema se tendrá :

$$k = x_1^2 + x_2^2$$

Utilizxando los productos notables : $k = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 x_2)$ .... (1)

Aplicando las propiedades de las raices expuesta en el item 15.4, tendremos :

$$x_1 + x_2 = -(m-2) \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = -(m+3) \quad .... (2)$$

Reemplazando (2) en (1), conseguimos : $k = [-(m-2)]^2 - 2[-(m+3)]$

Efectuando operaciones, se obtiene : $k = m^2 - 4m + 4 + 2m + 6$

Reduciendo términos semejantes : $k = m^2 - 2m + 10$

Reconociendo al T.C.P., se obtiene : $k = (m-1)^2 + 9$ .... (*)

Utilizando el mismo criterio del Prob. 30 ,diremos que "k" asume un valor mínimo cuando la expresión $(m-1)^2$ asume también un valor mínimo e igual a cero. Por tal razón,concluímos que :

$$k_{\text{mín}} = 9$$ **RPTA. C**

39.- Halle la suma de valores de "m" de tal manera que la ecuación :

(m + 1)x . (5x - 2) + 1 = 0 , se verifique para un solo valor de "x".

A) 5 ***B) -3*** ***C) 3*** ***D) 10*** ***E) 4***

Resolución.-

Efectuando la multiplicación indicada en la ecuación dada , tendremos : $5(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ ....(*)

Podemos deducir que si esta ecuación se verifica para un solo valor de x, las raíces de dicha ecuación deberán de ser iguales, en consecuencia su discriminante deberá ser igual a cero.

$$b^2 - 4ac = 0 \quad .... \ (**)$$

De (*) reconocemos que : $a = 5(m+1)$, $b = -2(m+1) \wedge c = 1$

Reemplazando en (**), tendremos : $[-2(m+1)]^2 - 4[5(m+1)][1] = 0$

Simplificando y reduciendo la ecuación a resolver será : $m^2 - 3m - 4 = 0$

Descomponiendo en dos factores e igualando a cero : $m_1 = 4$; $m_2 = -1$

Podemos observar que si reemplazamos $m = -1$ en (*) la ecuación resulta ser incompatible.

Es consecuencia el único valor que puede asumir : $m = 4$ **RPTA. E**

40.- Si $x_1 \wedge x_2$ son raíces de la ecuación: $ax^2+2bx+c=0$, y , $x_1+n \wedge x_2+n$; son raíces de : $mx^2+2nx+p=0$, proporcionar el equivalente de : $\left(\frac{a}{m}\right)^2\left(\frac{n^2-mp}{b^2-ac}\right)$

A) 1 B) -2 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) -1

Resolución.-

Sea T el equivalente pedido, es decir : $T=\left(\frac{a}{m}\right)^2\left(\frac{n^2-mp}{b^2-ac}\right)$ .... (I)

Una revisión de los elementos del 2do factor, nos sugiere analizar los discriminantes de cada ecuación. Veamos :

Para la 1ra ecuación : $\Delta_1=4\left(b^2-ac\right)$ .... (II)

Para la 2da ecuación : $\Delta_2=4\left(n^2-mp\right)$ .... (III)

Dividiendo miembro a miembro (III) ÷ (II), se tendrá : $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{n^2-mp}{b^2-ac}$ .... (IV)

Luego reemplazando (IV) en (I), se obtiene : $T=\left(\frac{a}{m}\right)^2\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)$

Transformando convenientemente al segundo miembro con la finalidad que aparezca la propiedad referida a la diferencia de las raíces expuesta en el item 15.4, obtendremos :

$$T=\frac{a^2}{m^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta_2}^2}{\sqrt{\Delta_1}^2}=\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta_1}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{\Delta_2}}{m}\right)^2 \Rightarrow T=\frac{\left(\frac{\sqrt{\Delta_2}}{m}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{a}\right)^2}=\left(\frac{\frac{\sqrt{\Delta_2}}{m}}{\frac{\sqrt{\Delta_1}}{a}}\right)^2 \quad \text{............ (V)}$$

De esta relación reconocemos que : $T=\left(\frac{\text{Diferencia de raíces de la } 1^{ra} \text{ ecuación}}{\text{Diferencia de raíces de } 2^{da} \text{ ecuación}}\right)^2$

Reemplazando datos se tendrá : $T=\left(\frac{\left|\left(x_1+n\right)-\left(x_2+n\right)\right|}{\left|x_1-x_2\right|}\right)^2$

Efectuando operaciones , se concluye que : $T=[1]^2=$ **1** **RPTA. A**

41.- ¿ Para qué valor de "m" las ecuaciones : $x^2-5x-m=0$; $x^2+2x+m=2$, tienen una raíz común ?

A) -6 B) $\frac{11}{4}$ C) 3 D) $-\frac{2}{11}$ E) Existen dos alternativas correctas

Resolución.-

Las ecuaciones son : $1x^2 - 5x - m = 0$

$$1x^2 + 2x + (m-2) = 0$$

De acuerdo a la propiedad 15.6B, referida a la raíz común de dos ecuaciones , tendremos :

$$[(1)(2) - (1)(-5)]\ [(-5)(m-2) - (2)(-m)] = [(1)(m-2) - (1)(-m)]^2$$

$$[2+5]\ [-5m + 10 + 2m] = [m-2+m]^2$$

$$70 - 21m = 4m^2 - 8m + 4$$

Por transposición de términos la ecuación a resolver será :

$$4m^2 + 13m - 66 = 0$$

Luego aplicando el método expuesto en el item 15.1A, los valores de "m" serán :

$$m_1 = \frac{11}{4} \quad ; \quad m_2 = -6$$ **RPTA. E**

42.- Sea : $\{x_1 ; x_2\}$ el conjunto solución de : $3x^2 - x - 1 = 0$. A continuación se establece que: $P(n) = \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n}$; calcular : P(2)

A) 7 *B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$* *C) 3* *D) $\sqrt{7}$* *E) $\sqrt{3}$*

Resolución.-

Observar que el valor pedido es : $P(2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Haciendo uso de los productos notables, dicha relación puede ser expresada así : $P(2) = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 2(x_1 x_2)}$ ..... (1)

Como : $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación dada, se deberá cumplir que : $x_1 + x_2 = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$ .... (2)

Finalmente reemplazando (2) en (1) , se obtiene : $P(2) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{7}{9}}$

$$P(2) = \frac{\sqrt{7}}{3}$$ **RPTA. B**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Indicar una raíz de : $2x^2 - 5x - 1 = 0$

A) $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ B) $\frac{-5+\sqrt{17}}{4}$ C) $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$

D) $\frac{-5-\sqrt{17}}{4}$ E) 3

2.- Una raíz de : $12x^2 + (3a+4b)x + ab = 0$,es :

A) $\frac{a}{4}$ B) $\frac{b}{3}$ C) $-\frac{a}{4}$ D) $-\frac{b}{2}$ E) $-\frac{b}{4}$

3.- Si $x = 1$, es una raíz de la ecuación cuadrática :

$3x^2 + (n-2)x - 3 - 2n = 0$.¿Qué valor asume n^2 ?

A) -2 B) 2 C) -4 D) 4 E) 16

4.- Si : $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\ldots}}}$; puede decirse que :

A) $x = \sqrt{3}$ B) $0 < x < 1$ C) $1 < x < 2$

D) $x = 2$ E) x es infinitamente grande.

5.- Si $x_1 \wedge x_2$ son raíces de la ecuación :

$2x^2 - x + 3 = 0$; calcular : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

6.- Si : $m \wedge n$, son las raíces de la ecuación :

$x^2 + bx + c = 0$, el valor de : $\sqrt{m^2+n^2}$ es :

A) $b^2 - 4c$ B) $b - 4c^2$ C) $2b + c$

D) $\sqrt{b^2+2c}$ E) $\sqrt{b^2-2c}$

7.- Si la ecuación : $x^2 - 6x + n + 1 = 0$, admite como raíces a $x_1 \wedge x_2$, tal que :

$\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} = \frac{3}{5}$; encontrar el valor de n :

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.- ¿ Para qué valor de "n" el discriminante de la ecuación : $x^2 - 8x + n = 0$, es igual a 20 ?

A) 44 B) 11 C) 33 D) 22 E) 17

9.- Si : $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación : $3x^2 + 5x - 1 = 2 + x$, el valor de :

$$(x_1+1)^{-1} + (x_2+1)^{-1} \text{ , es :}$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

10.- La ecuación cuadrática cuyas raíces son : $\sqrt{3}+1$, y , $\sqrt{3}-1$; es :

A) $x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 2 = 0$

B) $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2 = 0$

C) $x^2 - 3 = 0$

D) $x^2 - \sqrt{3}\,x + 2 = 0$

E) $x^2 + 2x - 1 = 0$

11.- Determinar el valor de "m" , de tal manera que la ecuación cuadrática en :

$x^2 - 2(m^2 - 4m)\,x + m^4 = 0$,tenga sus dos raíces con un mismo valor diferente de cero.

A) 1 B) 4 C) -2 D) -4 E) 2

12.- Al resolver : $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} = \frac{2}{3}$; el producto de las raíces obtenidas es :

A) 6 B) -6 C) -11 D) 11 E) 13

13.- Al resolver : $\frac{5}{2x+1} - \frac{8}{3x-4} = 3$;

se observa que el cuadrado de su mayor raíz es :

A) 100 B) $\frac{10}{81}$ C) 9 D) $\frac{100}{81}$ E) 4

NIVEL B

14.- Indicar una raíz de la ecuación cuadrática :

$$\sqrt[n-1]{x\sqrt{x}}\ -4n+1=0$$

A) 6 B) $\sqrt{6}$ C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) F.D.

15.- Si : $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación : $x^2-3x+1=0$, calcular el valor de :

$$T = x_1\left(x_1^2+1\right)+\left(x_2^2+1\right)x_2$$

A) 17 B) 19 C) 21 D) 23 E) 45

16.- Dada la ecuación : $\sqrt{x+1}\ +2x=0$, determinar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes :

I) Si la ecuación tiene una solución entonces esta debe estar en el intervalo $[-1\,;0]$.

II) La ecuación tiene dos soluciones reales.

III) La ecuación tiene una única solución.

A) VFV B) FVV C) VVF

D) VFF E) VVV

17.- Determinar el menor valor de "m" de tal manera que la ecuación :

$ax^2+(m+1)x+1-m=0$; de raíces $x_1 \wedge x_2$

verifique : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3m-17}{m-4}$

A) 7 B) 3,5 C) 3 D) 1,5 E) 4

18.- Dada la ecuación : $x^2-x+2=0$, de raíces $x_1 \wedge x_2$; calcular : $\frac{x_1^2}{1+x_2}+\frac{x_2^2}{1+x_1}$

A) 2 B) -2 C) 1 D) -1 E) -4

19.- La naturaleza de la mayor raíz de la ecuación:

$x+\sqrt{x+4}=3x-7$, es :

A) par B) fracción C) irracional

D) primo E) no existe tal raíz

20.- Indicar el producto de las raíces de la ecuación : $\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}+\frac{1+2x^{-1}}{1-2x^{-1}}=\frac{2+13x^{-1}}{1+x^{-1}}$

A) -6 B) 6 C) 5 D) -5 E) $\frac{4}{3}$

21.- Encontrar la mayor solución de la ecuación:

$$x^2-\left(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\right)x+1=0$$

A) $\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{2}+1$ C) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$

D) $\sqrt[3]{2}-1$ E) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

22.- Si la ecuación cuadrática :

$$(m+n-4)x^2+(m-n+6)x+2=0,$$

es incompatible; calcular el valor de m^2+2n.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

23.- ¿ Para qué valor de "n" las raíces $x_1 \wedge x_2$ de la ecuación : $4x^2+nx+5=0$,

verifican : $\begin{cases}3x_1+x_2=-8\\ x_1+3x_2=-4\end{cases}$?

A) -12 B) 6 C) -6 D) 18 E) 12

24.- Si la siguiente ecuación cuadrática :

$$\left(\frac{9a+13}{2a-15}-5\right)x^2+\left(\frac{13b+5}{2b-11}-5\right)x+\frac{2c+14}{c+1}=0$$

es indeterminada ;calcular el valor de : $a+4b+c$

A) 100 B) -10 C) 80 D) 1 E) -1

25.- ¿ Para qué valor de "n" el mínimo valor del trinomio : $P(x) \equiv x^2-2x+n$, es 4 ?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

26.- Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 3 veces las inversas al cuadrado de las raíces de : $x^2+x+12=0$

A) $48x^2+23x+1=0$ B) $48x^2-23x+3=0$

C) $48x^2+23x+3=0$ D) $x^2+23x+31=0$

E) $16x^2-23x-3=0$

NIVEL C

27.- Indicar la mayor solucón de la ecuación :

$$\sqrt{4+\sqrt{3}-5x}+\sqrt{4\sqrt{3}+1-5x}=3\sqrt{1+\sqrt{3}-2x}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

28.- La solución de la ecuación :

$$\frac{\sqrt{2}x^2+2}{8x^2}=\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}} \quad ; \text{ es :}$$

A) $2+\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B) $2-\sqrt{2-\sqrt{2}}$

C) $2+\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$

E) $\sqrt{2}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$

29.- ¿ Para qué valor de "n" las raíces de la ecuación : $\dfrac{x^2+3x}{5x+2}=\dfrac{n-1}{n+1}$, son simétricas.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

30.- Si las ecuaciones :

$$(2m+1)x^2-(3m-1)x+2=0$$

$$\wedge \quad (n+2)x^2-(2n+1)x-1=0$$

son equivalentes; calcular el valor de "m".

A) -9 B) 6,5 C) 9 D) -6,5 E) 14

31.- Si una raíz de la ecuación : $ax^2+bx+c=0$, es el cuadruplo de la otra ; calcular ; $\dfrac{b^2}{ac}$

A) $\dfrac{5}{2}$ B) $-\dfrac{5}{2}$ C) $\dfrac{5}{4}$ D) $\dfrac{25}{4}$ E) $\dfrac{36}{25}$

32.- Calcular : $(5-x_1)(7+x_1)(5-x_2)(7+x_2)$ sabiendo que $x_1 \wedge x_2$ son raíces de la ecuación : $x^2-x+1=0$

A) 1 120 B) 1 197 C) 1 161

D) 2 214 E) 1 125

33.- Hallar los menores valores enteros de : a, $b \wedge c$ para que las raíces de la ecuación :

$ax^2+bx+c=0$, sean tales que la suma de sus recíprocos sea igual a : $-0{,}069\hat{4}$ y la suma de sus cuadrados igual a 36 . Indicar como respuesta el valor de: $a-b+c$

A) 463 B) 430 C) 481 D) 401 E) 403

34.- ¿Para qué valor de "m" las raíces de la ecuación : $\dfrac{x(x-1)-(m-1)}{(x-1)(m-1)}=\dfrac{x}{m}$, son iguales?

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{1}{5}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}$

35.- Indicar la diferencia de las raíces reales de la ecuación : $\sqrt[5]{20+x}-\sqrt[5]{x-11}=1$

A) 33 B) 9 C) 8 D) 27 E) 41

36.- Si $x_1 \wedge x_2$ son raíces de la ecuación : $2x^2-2x+1=0$ ¿ Qué valor asume :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \quad ?$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) -1 E) 4

37.- ¿ Qué valor debe agregarse a las raíces de : $(a+b)x^2+(a-b)x+ab=0$;para que estas nuevas raíces sean raíces simétricas de otra ecuación cuadrática ?

A) $\dfrac{a+b}{a-b}$ B) $\dfrac{a-b}{a+b}$ C) $\dfrac{a-b}{2(a+b)}$

D) $\dfrac{2(a-b)}{a+b}$ E) $\dfrac{a+b}{2(a-b)}$

38.- Dada la ecuación : $3x^2+nx+4=0$, para qué valor real de "n" las raíces de la ecuación se relacionan así : $9x_1^2=x_2^2$

A) ± 7 B) ± 4 C) ± 16 D) 7; -8 E) ± 8

39.- Si deseamos resolver la ecuación :

$$\binom{x}{1}+\binom{x}{2}-\binom{x}{3}=0 \;\; ; \;\; x \neq 0 \; ;$$

es necesario resolver :

A) $x+5=0$ B) $x^2-6x+1=0$

C) $x^2+3x-2=0$ D) $x^2-6x-1=0$

E) $x^2-6x+2=0$

40.- Si la ecuación : $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$; tiene raíces iguales ¿Qué relación cumplen : $a, b \wedge c$?

A) $(a+c)b=2ac$ B) $a(b+c)=2bc$

C) $ab+c=2bc$ D) $(a+b)c=2ab$

E) $a+b=c$

41.- ¿Para qué valores de "m" $\wedge$ "n" las raíces de la ecuación : $x^2+7mx+n=0$, son : $m-n^{-1}$?

A) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$; 2

42.- Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de :
$(x+1)(x-1)=3x-2$; calcular el valor de :

$$\left(x_1^{x_2}+x_2^{x_1}\right)\left(x_1^{x_1}+x_2^{x_2}\right)$$

A) 15 B) 24 C) 12 D) 20 E) 25

43.- La ecuación : $ax^2+bx+c=0$, tiene por conjunto solución a : $\left\{\frac{n+1}{n} ; \frac{n+2}{n+1}\right\}$, luego el valor de : $\dfrac{b^2-4ac}{(a+b+c)^2}$, es :

A) n B) 1 C) $n+1$ D) $n+2$ E) 2

44.- Hallar el valor de "α" si las ecuaciones :

$4x^2=(\alpha-2)(1-2x) \;\; \wedge \;\; 4x^2=2x-\alpha$; admiten una raíz común.

A) 1 B) -2 C) 3 D) -1

E) existen dos alternativas correctas.

45.- La ecuación : $4x^2-10(2m+1)x+14m+5=0$, presenta :

A) Raíces reales y diferentes.

B) Raíces reales e iguales

C) Solamente una raíz real

D) Raíces imaginarias y conjugadas

E) B $\vee$ C

46.- ¿ Para qué valor de "α" la diferencia de las raíces de la ecuación :

$4x^2-10(\alpha+1)x+14\alpha+5=0$; será mínima:

A) $\frac{11}{50}$ B) $\frac{12}{49}$ C) $-\frac{12}{49}$ D) $-\frac{13}{48}$ E) $\frac{3}{25}$

47.- ¿ Para qué valores de "m" se verifica que : $3x_2-2x_1=1$, si se sabe que : $x_1 \wedge x_2$ son raíces de la ecuación : $x^2-(m+1)x+2m=0$?

A) 6 ; $\frac{1}{6}$ B) 3 ; $\frac{1}{6}$ C) 6 ; $\frac{1}{3}$ D) 3; $\frac{1}{3}$ E) 1 ; $\frac{1}{2}$

48.- Determinar la suma de todos los valores reales que puede asumir "a" de tal manera que

$$x^2+ax+1=0 \;\; \wedge \;\; x^2+x+a=0 ,$$

admitan al menos una raíz común.

A) 1 B) -2 C) 0 D) -1 E) 2

49.- Con respecto a la ecuación : $5x^2-(a+2)x+(7-a)=0$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es correcta ?

A) Tiene raíces recíprocas para : $a=2$

B) Tiene raíces simétricas para : $a=5$

C) La suma de sus raíces es 2 para : $a=8$

D) Una sola de sus raíces

E) Tiene una raíz nula para : $a=7$

16 Ecuaciones de Grado Superior

Se llama ecuación de grado superior a toda ecuación que admite la siguiente forma :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N} \;/\; n \geq 3 \;\wedge\; a_0 \neq 0$

Frecuentemente a esta ecuación también se le llama : *Ecuación Polinomial.*

16.1) TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL ALGEBRA

Toda ecuación polinomial de grado "n" , con $n \geq 1$:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

tiene por lo menos una raíz, la cual puede ser real o compleja.

16.1A) 1er TEOREMA

Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces entre reales e imaginarios.

16.1B) 2do TEOREMA

Toda ecuación de grado polinomial impar y de coeficientes reales, tiene por lo menos una raíz real.

16.1C) 3er TEOREMA

Toda ecuación polinomial de grado "n" y de coeficientes reales, se puede representar como la multiplicación indicada de dos o más factores primos en $\mathbb{R}$. Estos factores podrán ser lineales y/o cuadráticos, correspondiéndole a cada factor lineal una raíz real y a cada factor cuadrático dos raíces, las que a su vez pueden ser imaginarias y conjugadas.

Ejemplo.- *Verificar los teoremas mencionados anteriormente en la siguiente ecuación:*

$$x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2 = 0$$

Resolución.-

Factorizando al polinomio mostrado en el primer miembro de la igualdad según el criterio de los Divisores Binómicos, la ecuación a resolver será :

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x^2+x+1) = 0$$

A partir de aquí, igualamos cada factor primo a cero, de este modo obtenemos :

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

De acuerdo al teorema 16.1A, la ecuación dada es de 5to grado, por lo tanto debe presentar cinco raíces : 3 reales (x_1, $x_2 \wedge x_3$) y dos imaginarias conjugadas ($x_4 \wedge x_5$).

De acuerdo al teorema 16.1B, la ecuación dada es de grado impar (5to grado), por lo tanto debe presentar *al menos* una raíz real (en nuestro caso existen 3 raíces reales : x_1, $x_2 \wedge x_3$).

De acuerdo al teorema 16.1C, la ecuación dada se puede representar como el producto de 4 factores primos en $\mathbb{R}$ (3 lineales y un cuadrático).

Observación.- *Si al utilizar el teorema 16.1C se encuentra un factor primo que se repite "k" veces, se podrá afirmar que dicho factor origina una raíz de multiplicidad "k". Por ejemplo, la ecuación :*

$(x - 2)\ (x-1)^3\ (x^2+x+1) = 0$, *presenta una raíz de multiplicidad tres, la cual es :* $x = 1$

16.2) TEOREMAS DE LA PARIDAD DE LAS RAICES

Dada la ecuación polinomial de grado "*n*" :

$$P\ (x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0 \ ; \ a_0 \neq 0$$

tenemos :

16.2A PARIDAD DE LAS RAICES IMAGINARIAS

Si P $(x) = 0$ es una ecuación polinomial de coeficientes reales, de modo que una de sus raices es el número imaginario : $a + bi$, entonces la otra raíz será necesariamente : $a - bi$. Esto significa que las raíces imaginarias siempre se presentan por parejas tal que una es la conjugada de la otra.

16.2B PARIDAD DE LAS RAICES IRRACIONALES

Si P $(x) = 0$ es una ecuación polinomial de coeficientes racionales de modo que una de sus raices es el número irracional : $a + \sqrt{b}$, donde $a \wedge b$ son números racionales, tal que $\sqrt{b}$ es un número irracional, entonces la otra raíz será necesariamente : $a - \sqrt{b}$.

Observación.- *Si P (x) = 0 es una ecuación polinomial de coeficientes racionales que admite una raíz de la forma :* $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ *, donde :* $\sqrt{a} + \sqrt{b} \wedge \sqrt{ab}$ *son números irracionales, las otras raíces de la ecuación serán :*

$$\sqrt{a} - \sqrt{b}, -\sqrt{a} + \sqrt{b} \wedge -\sqrt{a} - \sqrt{b}$$

16. 3) TEOREMAS ADICIONALES

16.3A TEOREMA DE CARDANO - VIETTE

En este teorema se hace mención a la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación polinomial y sus raíces. Dada la ecuación polinomial de grado "*n*" :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

con $a_0 \neq 0$, de raíces : $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots x_n$; se cumplirá que :

I) " Suma de raíces "

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

II) " Suma del producto de las raíces tomadas de dos en dos "

$$x_1 . x_2 + x_2 . x_3 + x_2 . x_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_1 . x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

III) " Suma del producto de las raíces tomadas de tres en tres "

$$x_1 . x_2 . x_3 + x_2 . x_3 . x_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_1 . x_2 . x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$\vdots$

En general .- Si se quiere calcular la suma del producto de las raíces de un polinomio tomadas de "*k*" en "*k*" ($k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq n$), se utilizará la siguiente relación :

$$S_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

donde : S_k = suma del producto de las raíces tomadas de "*k*" en "*k*"

Ejemplo.- *Dada la ecuación :* $3x^4 - 2x^2 + x + 3 = 0$; *calcular :*

I) La suma del producto de sus raíces tomadas de dos en dos.

II) El producto de sus raíces.

Resolución.-

Para poder utilizar el teorema de Cardano - Viette , deberemos completar la ecuación dada : $3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$

Ahora si podemos reconocer que : $a_0 = 3 \wedge a_1 = 0 \wedge a_2 = -2 \wedge a_3 = 1 \wedge a_4 = 3$

Para (I) se pide S_2, luego reemplazando en la fórmula de la suma de Cardano - Viette para $k = 2$:

$$S_2 = (-1)^2 \frac{a_2}{a_0} = (1)\frac{(-2)}{(3)} = -\frac{2}{3}$$

Para (II) se pide S_4, luego reemplazando en la fórmula de la suma de Cardano -Viette para $k = 4$:

$$S_4 = (-1)^4 \frac{a_4}{a_0} = (1)\frac{(3)}{(3)} = 1$$

16.3B TEOREMA DE RENE DESCARTES

Frecuentemente llamamos a este teorema *Regla de los signos de Descartes*. En este teorema se hace mención a la cantidad de raíces reales (positivas o negativas) que puede tener una ecuación polinomial de grado "n" :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \text{ con}: a_0 \neq 0 \ \wedge \ a_n \neq 0,$$

tendremos :

I) El número de raíces reales positivas de la ecuación $P(x) = 0$, será igual al número de variaciones de signos que presenten los coeficientes de $P(x)$, o , es menor que esta cantidad en un número par .

II) El número de raíces reales negativas de la ecuación $P(x) = 0$, será igual al número de variaciones de signos que presenten los coeficientes de $P(-x)$, o , es menor que esta cantidad en un número par.

Observaciones :

1ra.- *Llamaremos variación de signos de los coeficientes de un polinomio al paso de un coeficiente positivo, a un coeficiente negativo o viceversa.*

2da.- *Para encontrar la variación de signos de los coeficientes de un polinomio se deberá ordenar a éste en forma decreciente .*

3ra.- *El conteo de las variaciones de signos se iniciará con el signo del primer coeficiente del polinomio $P(x) = 0$.*

4ta.- *El número par al que se refiere el Teorema de Descartes, es un número $k = 2$;4 ;6 ;8; .... tal que : $k \leq$ Número de variaciones de signos*

Ejemplo.- *Al aplicar el teorema de Descartes a la ecuación :* $x^3 - 2x^2 + x^4 + 1 = 0$ *, se concluye que :*

<u>**Resolución**</u>.-

I) Primero ordenaremos la ecuación dada y a continuación hallaremos la variación de signos para :

$$P(x) \equiv x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$$

Observar que $P(x)$ presenta 2 variaciones de signos ,en consecuencia la ecuación polinomial $P(x) = 0$ podrá tener 2 raíces reales positivas o esta cantidad disminuída en un número par $(2 - 2 = 0)$, es decir ninguna raíz real positiva.

II) Asimismo hallaremos la variación de signos para :

$$P(-x) \equiv (-x)^4 + (-x)^3 - 2(-x)^2 + 1$$

Efectuando se tendrá : $P(-x) \equiv x^4 - x^3 - 2x^2 + 1$

Observar que P $(-x)$ presenta 2 variaciones de signos, en consecuencia la ecuación polinomial P $(x) = 0$ podrá tener 2 raíces reales negativas, o esta cantidad disminuida en un número par $(2 - 2 = 0)$, es decir ninguna raíz real negativa.

De acuerdo al teorema 16.1A la ecuación dada presenta en total 4 raíces, luego se podrá establecer el siguiente cuadro de posibilidades para las raíces de la ecuación :

Posib.	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^-$	i
1^ra	2	2	0
2^da	0	0	4

Donde :

$\mathbb{R}^+$: Raíces reales positivas

$\mathbb{R}^-$: Raíces reales negativas

i : Raíces imaginarias

Ejemplo.- *Según el teorema de Descartes las raíces de la ecuación :* $x^5 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ *podrían ser :*

Resolución.-

Primero encontramos : $P(x) \equiv x^5 - 6x^2 + 11x - 6 \quad \wedge \quad P(-x) \equiv -x^5 - 6x^2 - 11x - 6$

De estas expresiones podemos notar que P (x) presenta 3 variaciones de signos, mientras que P $(-x)$ no presenta variación de signo.

De acuerdo con estas observaciones, el Teorema de Descartes nos permite elaborar el siguiente cuadro de posibilidades :

Posib.	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^-$	i
1^ra	3	0	2
2^da	1	0	4

La ecuación de 5^to grado tiene 3 raíces reales positivas y 2 imaginarias conjugadas o 1 raíz real positiva y 4 imaginarias conjugadas 2 a 2.

Observación.- Si P (x) ó P$(-x)$ tuviera solamente una variación de signos, entonces P (x) tiene exactamente una raíz real positiva o negativa .

16.3C TEOREMA DE GAÜSS

Este teorema permite analizar la existencia de alguna raíz racional en una Ecuación Polinomial de coeficientes enteros. Dada la ecuación polinomial de grado "n" :

$$\mathbf{P}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \text{, con : } a_0 \neq 0 \ \wedge \ a_n \neq 0$$

Si esta ecuación admite una raíz racional x_1, ésta será de la forma : $x_1 = \dfrac{p}{q}$

Donde p y q son números enteros primos entre sí, verificándose asimismo que :

p = Divisor del término independiente de P (x) : a_n

q = Divisor del coeficiente principal de P (x) : a_0

De este modo tanto p como q resultan ser dos conjuntos de números que deberán ser elegidos de forma que ellos sean primos entre sí. La raíz x_1 se obtendrá de todas las combinaciones posibles de los divisores encontrados

En general si la ecuación polinomial $P(x) = 0$ admite una ó más raices racionales, éstas se deberán buscar solamente entre aquellos números racionales de la forma : $\frac{p}{q}$

Ejemplo.- *Encontrar la raíz racional de la siguiente ecuación :*

$$P(x) \equiv 2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$$

Resolución.-

De acuerdo con el teorema de Gaüss, de existir una raiz racional esta deberá ser de la forma :

$$x_1 = \frac{p}{q} \quad \text{.........................(1)}$$

Ahora recordemos que p debe ser un divisor de $a_3 = -2$ $\Rightarrow$ $p = \{\pm 1 \,;\, \pm 2\}$ ....(2)

Del mismo modo recordamos que q es un divisor de $a_0 = 2$ $\Rightarrow$ $q = \{\pm 1 \,;\, \pm 2\}$ ....(3)

A continuación sustituimos (2) y (3) en (1) : $x_1 = \frac{\{\pm 1 \,;\, \pm 2\}}{\{\pm 1 \,;\, \pm 2\}}$

En consecuencia las posibles raíces son : $x_1 = 1 \,;\, -1 \,;\, 2 \,;\, -2 \,;\, \frac{1}{2} \vee -\frac{1}{2}$

No debemos olvidar que si x_1 es una raiz de la ecuación polinomial $P(x) = 0$, al dividir $P(x)$ entre $(x - x_1)$, el residuo deberá ser cero. Al utilizar este criterio lograremos distinguir a las raices de la ecuación dada y descartaremos a aquellas posibles raices que no verifiquen la condición de divisibilidad. Veamos :

Si $x_1 = \frac{1}{2}$ es una raiz de $P(x) = 0$, la división a analizar será : $P(x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

Efectuando la división según la regla de Ruffini se tendrá :

	2	1	3	-2
$\frac{1}{2}$	↓	1	1	2
	2	2	4	0

Como el residuo de dividir $P(x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$ resultó ser cero, se puede afirmar que : $x_1 = \frac{1}{2}$ es una raíz del polinomio $P(x)$.

NOTA.- Quedará para el lector la tarea de comprobar que $x_1 = \frac{1}{2}$ es la única raíz racional que presenta la ecuación polinomial $P(x) = 0$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- El producto de las raíces del polinomio : $P(x) \equiv 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 8x + 12$, es :

A) -3 B) -6 C) 6 D) 3 E) -12 ***UNI 92***

Resolución.-

Teniendo en cuenta el teorema de Cardano - Viette (item16.3A), recurrimos a la siguiente relación.

$$S_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \text{ .... } (*)$$

Observar que el valor pedido equivale a S_4, luego en (*) se tendrá :

$$S_4 = (-1)^4 \frac{a_4}{a_0} = (1) \frac{(12)}{2}$$

Finalmente efectuando operaciones indicadas se obtiene : $S_4 = 6$ **RPTA. C**

2.- Si x_1, $x_2 \wedge x_3$ son las raíces de la ecuación : $2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$;calcular el valor de :

$$\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3}$$

A) -1/2 B) 1/2 C) -1 D) 1 E) -2

Resolución.-

Sea T el valor pedido es decir : $T = \dfrac{1}{x_1 \cdot x_2} + \dfrac{1}{x_1 \cdot x_3} + \dfrac{1}{x_2 \cdot x_3}$

Dando común denominador tenemos : $T = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$ .... (I)

Con la ayuda del teorema de Cardano - Viette calculemos el valor del numerador y denominador de la relación (I). Veamos :

Para el numerador tenemos : $x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = (-1)^1 = \dfrac{a_1}{a_0} = (-1)\dfrac{(1)}{2}$

Efectuando las operaciones, obtenemos : $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{1}{2}$ .... (II)

Ahora para el denominador tenemos : $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = S_3\ (-1)^3 \dfrac{a_3}{a_0} = (-1)\dfrac{2}{2}$

Y efectuando nos queda : $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1$ .... (III)

Finalmente reemplazando los valores obtenidos en (II) y (III) en la relación (I), se tendrá :

$$T = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$$ **RPTA. B**

3.- Encontrar un polinomio mónico de cuarto grado que admita como raíces a : -2 , -1, 1 y 2

A) $x^4 + 3x^2 - x + 4$ *B)* $x^4 + 2x^2 + 4$ *C)* $x^4 + 5x^2 + 4$

D) $x^4 + 3x + 4$ *E)* $x^4 - 5x^2 + 4$

Resolución.-

Por condición del problema las raíces del polinomio buscado serán : $x_1 = -2 \ , \ x_2 = -1 \ , \ x_3 = 1 \wedge x_4 = 2$

De acuerdo con el 3^er Teorema fundamental del Algebra, se podrá plantear : $(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0$

En consecuencia el polinomio buscado será : $P(x) \equiv (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$

Efectuando operaciones, obtenemos : $\mathbf{P(x) \equiv x^4 - 5x^2 + 4}$ **RPTA. E**

4.- En la ecuación $x^3 - 7x + \lambda = 0$;determinar un valor de λ tal que una de sus raíces sea el doble de la otra.

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 6* *E) 7* ***UNI 94-II***

Resolución.-

Sean x_1, $x_2 \wedge x_3$ las raíces de la ecuación, luego por condición del problema se establece que : $x_1 = a \wedge x_2 = 2a \wedge x_3 = b$ .... (*)

De la ecuación dada reconocemos que : $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -7$, y , $a_3 = \lambda$. Y con el auxilio del teorema de Cardano - Viette, podemos plantear lo siguiente :

1^ro) La suma de raices viene dada así : $x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = (-1)^1 \dfrac{a_1}{a_0}$

Sustituyendo valores tanto para a como para x (de *) : $a + 2a + b = (-1)\dfrac{(0)}{1}$

Efectuando operaciones, obtenemos : $3a + b = 0$ ..... (1)

2^do) La suma de los productos de raices tomadas de 2 en 2, viene dada así : $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = S_2 = (-1)^2 \dfrac{a_2}{a_0}$

Sustituyendo los valores tanto para a como para x : $a.2a + a.b + 2a.b = (1)\dfrac{(-7)}{(1)}$

Efectuando operaciones, obtenemos : $2a^2 + 3ab = -7$ .... (2)

Resolviendo obtenemos : $a = 1 \wedge b = -3 \vee a = -1 \wedge b = 3$ ....(**)

Finalmente por el mismo teorema de Cardano - Viette, sabemos que : $x_1 . x_2 . x_3 = S_3 = (-1)^3 \dfrac{a_3}{a_0}$

Reemplazando datos , tendremos : $(a)\,(2a)\,(b) = (-1)\,\frac{(\lambda)}{1}$

Efectuando nos queda : $\lambda = -2a^2b$

Si ahora sustituimos los grupos de valores obtenidos para a y b en (**), tendremos :

$$\text{Si } a = 1 \wedge b = -3 \Rightarrow \lambda = 6$$

$$\text{Si } a = -1 \wedge b = 3 \Rightarrow \lambda = -6$$

Finalmente el valor pedido podrá ser : $\boldsymbol{\lambda = 6 \vee -6}$ **RPTA. D**

5.- En la siguiente ecuación : $x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$, dos de sus raíces son : 1 y 2. Hallar la tercera raíz y dar como respuesta su producto con "a"

A) 18 B) -18 C) 33 D) -33 E) -24 PUCP 94-I

Resolución.-

En este problema procederemos del mismo modo como lo hicimos en el ejercicio anterior. Sean $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, y , x_3 las raíces de la ecuación, asimismo reconozcamos que $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, y , $a_3 = -6$; luego de acuerdo con el teorema de Cardano - Viette, se podrá plantear que:

La suma de las raíces está dada así : $x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = (-1)^1\,\frac{a_1}{a_0}$

Sustituyendo los datos para a y x : $1+2+x_3 = (-1)\,\frac{(a)}{1}$

Efectuando operaciones, se establece que : $a = -(3 + x_3)$ ..... (1)

Ahora el producto de las raíces está dado por : $x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 = S_3 = (-1)^3\,\frac{a_3}{a_0}$

Reemplazando los valores para a y x, tendremos : $(1).(2).x_3 = (-1)\,\frac{(-6)}{(1)}$

Efectuando y despejando, conseguimos que : $x_3 = 3$ ..... (2)

A continuación reemplazamos (2) en (1) y obtenemos que : $a = -(1 + 2 + 3) = -6$

Finalmente el valor pedido será : $x_3 \,.\, a =$ **-18** **RPTA. B**

6.- ¿Cuántas raíces reales positivas tiene la ecuación : $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Ninguna

Resolución.-

De acuerdo con el Teorema de Descartes, para averiguar la cantidad de raíces reales positivas que presenta la ecuación dada, bastará con analizar la variación de signos que presentan los coeficientes del polinomio :

$$P(x) \equiv x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

Como se podrá observar $P(x)$ no presenta ninguna variación de signo, por lo tanto podemos afirmar que la ecuación dada no admite ninguna raíz real positiva.

RPTA. E

7.- ¿Cuántas raíces racionales tiene la ecuación : $P(x) \equiv 3x^5 + x^4 - 14x^3 + 2x^2 + 16x - 8 = 0$?

A) 5 *B) 9* *C) 3* *D) 4* *E) 1*

Resolución.-

Dado que se solicitan raíces racionales, utilizaremos el Teorema de Gaüss, el cual establece que de existir alguna raíz racional, ésta será de la forma $x = \frac{p}{q}$, donde deberás recordar que :

p : Son todos los divisores del término independiente de $P(x)$ $\Rightarrow$ $p = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4 ; \pm 8\}$

q : Son todos los divisores del coeficiente principal de $P(x)$ $\Rightarrow$ $q = \{\pm 1 ; \pm 3\}$

De este modo podemos deducir que las posibles raíces se deberán buscar a partir de la relación :

$$x = \frac{\{\pm 1 ;\ \pm 2 ;\ \pm 4 ;\ \pm 8\}}{\{\pm 1 ;\ \pm 3\}}$$

Al probar cada una de las posibles raíces según la regla de Ruffini, se observa que las únicas que producen residuo cero son :

$$x = \left\{1 ; -2 ; \frac{2}{3}\right\}$$

	3	1	-14	2	16	-8	
1		3	4	-10	-8	8	
	3	4	-10	-8	8	0	Residuo
-2		-6	4	12	-8		
	3	-2	-6	4	0	Residuo	
$\frac{2}{3}$		2	0	-4			
	3	0	-6	0	Residuo		

En consecuencia se podrá afirmar que la ecuación dada solo admite **3 raíces** racionales.

RPTA. C

8.- Resolver la siguiente ecuación : $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$,para luego indicar su mayor raíz.

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en transformar la ecuación dada en otra ecuación equivalente que no admita signo radical.

Elevando al cubo a ambos miembros : $[\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}\,]^3=[\sqrt[3]{12(x-1)}\,]^3$

Utilizando la equivalencia de Cauchy en el primer miembro y simplificando en el segundo miembro, tendremos : $3x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}\;.\;\underbrace{[\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}\,]}_{(*)}=12(x-1)$

Sustituyendo (*) por el 2do miembro de la ecuación original : $3x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}\;.\;\sqrt[3]{12(x-1)}=12(x-1)$

Transponiendo términos : $3\sqrt[3]{12x(2x-3)\,(x-1)}=9(x-1)$

Simplificando,obtenemos : $\sqrt[3]{12x(2x-3)\,(x-1)}=3(x-1)$

Elevando otra vez al cubo, se obtiene : $12x\,(2x-3)\,(x-1)=27(x-1)^3$

Simplificando y transponiendo términos : $(x-1)\,[4x(2x-3)-9(x-1)^2]=0$

Efectuando y factorizando, obtenemos : $(x-1)\,(x-3)^2=0$

Finalmente las raíces de la ecuación serán : $x_1=1\;,\;x_2=x_3=\;\;3$

(raíz de multiplicidad 2) **RPTA.C**

9.- ¿Determinar cuál de los siguientes polinomios tiene como una de sus raíces al número $\sqrt[3]{4}+\sqrt{3}$?

A) $x^6-9x^4-8x^3+27x^2-72x-11$

B) $x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+11$

C) $x^6+9x^4-8x^3-27x^2-72x-11$

D) $x^6+9x^4+8x^3-27x^2-72x-11$

E) $x^6+9x^4+8x^3-36x^2+72x-11$

Resolución.-

Sería muy tedioso intentar resolver todas las ecuaciones que aparecen en los distractores para así poder identificar cuál de ellos posee como raíz al número dado. Por lo tanto nuestra estrategia consistirá en formar una ecuación polinomial de coeficientes racionales de grado 6, que admita como raíz al número dado. Veamos :

Sabemos que una raíz de la ecuación polinomial es : $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt{3}$

Por transposición de términos : $x-\sqrt{3}=\sqrt[3]{4}$

Elevando a ambos miembros al cubo se obtiene : $x^3-3\sqrt{3}\,x^2+9x-3\sqrt{3}=4$

Nuevamente por transposición de términos : $x^3+9x-4=3\sqrt{3}\,(x^2+1)$

Ahora para producir una expresión algebraica de 6[to] grado ,elevamos al cuadrado a ambos miembros, obteniéndose :

$$x^6 + 81x^2 + 16 + 18x^4 - 8x^3 - 72x = 27x^4 + 54x^2 + 27$$

Transponiendo todos los términos al primer miembro y reduciendo términos semejantes ,se tendrá :

$$x^6 - 9x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 72x - 11 = 0$$

Finalmente se concluye que el polinomio de coeficientes racionales que admite como raíz al número $\sqrt[3]{4} + \sqrt{3}$ es :

$$\mathbf{P(x) \equiv x^6 - 9x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 72x - 11 = 0}$$ **RPTA. A**

10.- Si de la ecuación: $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - ax^2 + 6x + 18 = 0$, se conocen 2 raíces, una de las cuales es $\sqrt{-2}$; calcular la suma de las otras tres raíces.

A) 3 B) - 3 C) 15 D) -5 E) 5

Resolución.-

Por dato del problema se sabe que una de las 2 raíces conocidas de la ecuación, es :

$$x_1 = \sqrt{-2} \text{ , es decir : } x_1 = \sqrt{2}i \qquad \text{...........(1)}$$

Teniendo en cuenta el 2[do] Teorema de la Paridad de raices expuesto en el item 16.2A, podemos afirmar que la otra raíz es la conjugada de x_1, es decir :

$$x_2 = -\sqrt{2}i \qquad \text{...........(2)}$$

Sean x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , y , x_5 las raíces de la ecuación polinomial dada (de 5[to] grado), en donde además reconocemos que $a_0 = 1$, y , $a_1 = -5$. Luego aplicando el teorema de Cardano - Viette, se deberá cumplir que :

La suma de raices viene dada así : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = S_1 = (-1)^1 \dfrac{a_1}{a_0}$

Efectuando operaciones : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$ ....(3)

Reemplazando (1) y (2) en (3) : $x_3 + x_4 + x_5 = \mathbf{5}$

RPTA. E

16.4) ECUACION BINOMICA

Es aquella ecuación cuya forma general es así :

$$ax^n \pm b = 0 \ / \ n \in \mathbb{N}^* \wedge \{a ; b\} \subset \mathbb{R}^*$$

RESOLUCION DE LA ECUACION BINOMICA

Al resolver una ecuación binómica, es casi seguro que nos encontremos con la raíz de la unidad real (1), o, de la unidad imaginaria (i); por esta razón es recomendable recordar lo visto enel Cap. 13 (item 13.10A), con la finalidad de emplear la solución general de la raíz de un complejo en su forma Polar. Veamos :

Caso I .-Sea la Ecuación Binómica : $\quad ax^n - b = 0$

Despejando x obtenemos : $\quad x = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{b}{a}\right)(1)}$

Al descomponer el radical en dos radicales : $\quad x = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\,\sqrt[n]{1}$ ....(*)

Recordando la fórmula general para $\sqrt[n]{1}$: $\quad \sqrt[n]{1} = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ ......(**)

Reemplazando (**) en (*), tendremos que : $\quad \boldsymbol{x = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\left[\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)\right]}$

Donde el parámetro k podrá asumir los siguientes valores : $\quad k = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots ; (n - 1)$

Caso II .-Sea la Ecuación Binómica : $\quad ax^n + b = 0$

Despejando x obtenemos : $\quad x = \sqrt[n]{-\dfrac{b}{a}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{b}{a}\right)(-1)}$

Al descomponer el radical en dos radicales : $\quad x = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\,\sqrt[n]{-1}$ ......(*)

Recordando la fórmula general para $\sqrt[n]{-1}$: $\quad \sqrt[n]{-1} = \cos\left(\dfrac{2k+1}{n}\right)\pi + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2k+1}{n}\right)\pi$ ...(**)

Reemplazando (**) en (*), tendremos que : $\quad \boldsymbol{x = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\left[\cos\left(\dfrac{2k+1}{n}\right)\pi + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2k+1}{n}\right)\pi\right]}$

Donde el parámetro k podrá asumir los siguientes valores : $\quad k = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots ; (n - 1)$

16.5) ECUACION TRINOMICA

Es aquella ecuación cuya forma general es así :

$$ax^{2n} \pm bx^{n} + c = 0 \quad / \quad a \neq 0 \quad \wedge \quad n \in \mathbb{N}^*$$

RESOLUCION DE LA ECUACION

Si en la forma general de la Ecuación Trinómica hacemos $n=1$, comprobaremos que estamos frente a nuestra conocida ecuación cuadrática, cuya solución general será necesario recordar para resolver la ecuación trinómica. Esto se justifica cuando se realiza un cambio de variable que permita convertir la ecuación trinómica en una ecuación cuadrática. Veamos :

Hagamos el siguiente cambio de variable : $x^n = y$ ....(*)

Asi la ecuación trinómica queda transformada en : $ay^2 + by + c = 0$

Las raíces de esta ecuación se obtienen de : $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ....(**)

A continuación sustituimos (*) en (**) : $x^n = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Finalmente todas las raíces de la ecuación trinómica se obtendrán resolviendo esta última ecuación. Puede observarse que esta última ecuación corresponde a una Ecuación Binómica, por lo tanto y a partir de este paso, se sugiere seguir el mismo procedimiento expuesto en el item anterior.

Ejemplo.- *Resolver la siguiente ecuación* $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Resolución.-

Hagamos el siguiente cambio de variable : $x^3 = y$ .... (*)

Luego la ecuación a resolver será : $y^2 - 7y - 8 = 0$

Utilizando la fórmula general de Carnot : $y = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)\,(-8)}}{2(1)} = \dfrac{7 \pm 9}{2}$

De esto se deduce que las raices son : $y_1 = 8 \;\vee\; y_2 = -1$

Ahora las raíces de la ecuación original se encontraran reemplazando los valores obtenidos para y en la relación (*). Veamos :

a) Si $y = 8$, al reemplazar en (*), tendremos : $x^3 = 8$

Por tratarse de una Ecuación Binómica, utilizaremos la fórmula propuesta para el Caso I : $x = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)\right]$

Por tratarse de una ecuación de 3er grado , reconocemos que : $k = 0 ; 1 ; 2$

Con $k = 0$: $x_1 = \sqrt[3]{8}\left[\cos(\frac{0\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{0\pi}{3})\right] \Rightarrow x_1 = 2$

Con $k = 1$: $x_2 = \sqrt[3]{8}\left[\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3})\right] \Rightarrow x_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$

Con $k = 2$: $x_3 = \sqrt[3]{8}\left[\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{2\pi}{3})\right] \Rightarrow x_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$

b) Si $y = -1$, al reemplazar en (*), tendremos : $x^3 = -1$

Por tratarse de una Ecuación Binómica, utilizaremos la fórmula propuesta para el Caso II : $x = \cos\left(\frac{2k+1}{3}\right)\pi + i\,\text{sen}\left(\frac{2k+1}{3}\right)\pi$

En este caso los valores de k son los mismos que del paso anterior; luego :

Con $k = 0$: $x_1 = \sqrt[3]{8}\left[\cos(\frac{0+1}{3})\pi + i\,\text{sen}\,(\frac{0+1}{3})\pi\right] \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Con $k = 1$: $x_5 = \sqrt[3]{8}\left[\cos(\frac{2.1+1}{3})\pi + i\,\text{sen}\,(\frac{2.1+1}{3})\pi\right] \Rightarrow x_5 = -1$

Con $k = 2$: $x_6 = \sqrt[3]{8}\left[\cos(\frac{2.2+1}{3})\pi + i\,\text{sen}\,(\frac{2.2+1}{3})\pi\right] \Rightarrow x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Finalmente las raíces de la ecuación : $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ serán :.

$x_1 = 2$, $x_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$, $x_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$, $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_5 = -1$ $\wedge$ $x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

16.6) ECUACIONES ESPECIALES

16.6A ECUACION RECIPROCA

Es aquella que se genera al igualar a cero a un Polinomio Recíproco. La condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea recíproco es que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos sean iguales; así pues los polinomios :

$$P(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a \quad , \quad y \quad , \quad Q(x) \equiv ax^5 - bx^4 + cx^3 + cx^2 - bx + a \; ,$$

son recíprocos . Estos polinomios son tales que igualados a cero originan ecuaciones recíprocas. Veamos :

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ " Ecuación recíproca de grado par"

$ax^5 - bx^4 + cx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ " Ecuación recíproca de grado impar"

Observación.- *Para la resolución de una ecuación recíproca será necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones :*

1ra) *Toda ecuación recíproca de grado impar admite como raiz a :* $x = -1$

Si los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos se diferencian únicamente en los signos que presentan, la ecuación admitirá como raíz a : $x = 1$

2da) *En toda ecuación recíproca de grado par ,si una de sus raíces es* α , *la otra raíz será necesariamente* : $1/\alpha$. *En el caso que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos se diferencien únicamente en sus signos, entonces para una raíz* α *de laecuación, la otra será* : $-1/\alpha$

16.6B ECUACION CUBICA

Es aquella cuya forma general es :

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \quad / \quad a \neq 0$$

Si en la ecuación anterior reemplazamos y por : $(x - \frac{b}{3a})$, obtenemos una forma reducida de la ecuación cúbica :

$$x^3 + px + q = 0 \qquad \text{.....................} (*)$$

Donde las raíces de esta ecuación son x_1, $x_2 \wedge x_3$, las cuales están dadas por :

$$x_1 = \alpha + \theta \quad , \quad x_2 = \alpha w + \theta w^2 \quad , \quad x_3 = \alpha w^2 + \theta w$$

Siendo : $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \;\wedge\; \theta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \;\wedge\; w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ...(raiz cúbica de la unidad)

Observación.- *El término D es conocido como el Discriminante , tal que :*

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

La naturaleza de las raíces de la ecuación expuesta en la relación (*), depende del discriminante, por lo cual se deben analizar tres casos :

Caso (I).- Si D = 0

En este caso la ecuación tiene 3 raíces reales, 2 iguales y 1 distinta a éstas.

Caso (II).- Si D > 0

En este caso la ecuación tiene 1 raíz real y 2 imaginarias conjugadas.

Caso (III).- Si D < 0

En este caso la ecuación tiene 3 raíces reales diferentes.

16.6C ECUACION BICUADRADA

Es aquella ecuación cuya forma general es :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad / \quad a \neq 0$$

Donde las raíces de ésta ecuación son : x_1, x_2, $x_3 \wedge x_4$ y están dados por :

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad .... = m$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad .... = -m$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad .... = n$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad .... = -n$$

Observaciones.- En relación a las raices expuestas para la Ecuación Bicuadrada, tendremos :

a) Las raices x_1 y x_2 , se diferencian solo en el signo

b) Las raices x_3 y x_4 , se diferencian solo en el signo

Teniendo en cuenta el Teorema de Cardano - Viette, se pueden plantear las siguientes propiedades :

1ra) Suma de raíces : $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

2da) Suma del producto de raíces tomadas de dos en dos :

$$S_2 = x_1 \,.\, x_2 + x_3 \,.\, x_4 = \frac{b}{a}$$

3ra) Producto de raíces : $S_4 = x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, x_4 = \frac{c}{a}$

Observaciones.- Dada la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$; si se divide a ambos miembros de la igualdad por "a", se obtiene :

$$x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Teniendo en cuenta la 2da y 3ra propiedad sobre las raices de la Ecuación Bicuadrada, podemos afirmar que toda ecuación de ese tipo presenta la siguiente forma :

$$x^4 + S_2 x^2 + S_4 = 0$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

11.- Indicar una raíz de la ecuación : $x^4 + 256 = 0$

A) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ ***B)*** $\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ ***C)*** $2\sqrt{2} + i$ ***D)*** $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$ ***E)*** $2\sqrt{2} - i$

Resolución.-

Por tratarse de una Ecuación Binómica,utilizaremos la fórmula general expuesta para el 2[do] Caso del item 16.4 . Veamos :

Las raíces de la ecuación dada se obtendrán de : $x = \sqrt[4]{256}\left[\cos\left(\frac{2k+1}{4}\right)\pi + i\,\text{sen}\left(\frac{2k+1}{4}\right)\pi\right]$

De acuerdo con las reglas expuestas diremos que : $k = 0\,;1\,;2\,;3$

Con $k = 0$: $x_1 = 4\left[\cos\left(\frac{0+1}{4}\right)\pi + i\,\text{sen}\left(\frac{0+1}{4}\right)\pi\right] \Rightarrow x_1 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

Con $k = 1$: $x_2 = 4\left[\cos\left(\frac{2.1+1}{4}\right)\pi + i\,\text{sen}\left(\frac{2.1+1}{4}\right)\pi\right] \Rightarrow x_2 = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

Con $k = 2$: $x_3 = 4\left[\cos\left(\frac{2\cdot 2+1}{4}\right)\pi + i\,\text{sen}\left(\frac{2\cdot 2+1}{4}\right)\pi\right] \Rightarrow x_3 = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

Con $k = 3$: $x_4 = 4\left[\cos\left(\frac{2\cdot 2+1}{4}\right)\pi + i\,\text{sen}\left(\frac{2\cdot 2+1}{4}\right)\pi\right] \Rightarrow x_4 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \mathbf{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i}$

RPTA. D

12.- Mostrar una solución de la ecuación $32x^5 - 243 = 0$

A) *cis 72º* ***B)*** $\frac{2}{3}$ *cis 144º* ***C)*** $\frac{3}{2}$ *cis 36º* ***D)*** $\frac{3}{2}$ *cis 108º* ***E)*** $\frac{3}{2}$ *cis 216º*

Resolución.-

La ecuación dada es una Ecuación Binómica por tal motivo sus raíces se obtendrán a partir de la fórmula general expuesta para el 1[er] Caso. Veamos :

A partir de la fórmula general se tiene que : $x = \sqrt[5]{\frac{243}{32}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right]$

Salta a la vista que los valores para k son : $k = 0\,;1\,;2\,;3\,;4$

A partir de estas dos premisas podemos encontrar a las raíces de la ecuación dada, veamos :

Con $k = 0$: $x = \frac{3}{2}\left[\cos\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{5}\right)\right] \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$

Con : $k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(\cos 72^o + i \text{ sen } 72^o)$

Con : $k = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}(\cos 144^o + i \text{ sen } 144^o)$

Con : $k = 3 \Rightarrow x_4 = \frac{3}{2}(\cos 216^o + i \text{ sen } 216^o)$

Con : $k = 4 \Rightarrow x_5 = \frac{3}{2}(\cos 288^o + i \text{ sen } 288^o)$ **RPTA. E**

13.- Si : $y = x + \frac{1}{x}$, entonces la ecuación : $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$, se transforma en :

A) $y^2 - 2y + 6 = 0$ *B) $y^2 - y - 6 = 0$* *C) $x^2(y^2 + 2y + 6) = 0$*

D) $x^2(y^2 + y - 6) = 0$ *E) $x^2(y^2 - y + 6) = 0$* ***UNI 90***

Resolución.-

Observando los coeficientes de la ecuación polinómica y sus correspondientes posiciones, reconocemos que se trata de ecuación recíproca .Para resolver una ecuación recíproca de grado par se recomienda factorizar al polinomio recíproco de la manera siguiente :

1) Se extrae la parte literal del término central : $x^2\left[x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]$

2) En el corchete se agrupa cada término con su recíproco : $x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\right]$ ....(1)

3) Se efectúa el siguiente cambio de variable : $x + \frac{1}{x} = y$ ....(2)

4) Elevando a ambos miembros al cuadrado, obtenemos : $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ ......(3)

5) Luego al reemplazar (2) y (3) en (1), se obtiene : $x^2\left[\left(y^2 - 2\right) + y - 4\right]$

6) Efectuando en el corchete, encontramos : $\boldsymbol{x^2\left(y^2 + y - 6\right)}$ **RPTA. D**

Observación.-Si se tratara de resolver la ecuación dada, se recomienda factorizar al trinomio encerrado entre paréntesis, para luego sustituir la variable y por $(x + \frac{1}{x})$, quedando de este modo el polinomio recíproco totalmente factorizado. Finalmente las raíces de la ecuación recíproca se obtendrán igualando a cero cada factor primo .

14.- Resolver la siguiente ecuación: $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$; para luego indicar a la mayor de sus raices .

A) 9 *B) 1/9* *C) 2* *D) -4* *E) 16*

Resolución.-

Observando los coeficientes de la ecuación dada, así como la posición relativa de estos, deducimos que se trata de una ecuación recíproca, por lo tanto, será necesario factorizar al polinomio recíproco siguiéndose el mismo procedimiento del ejercicio anterior. Veamos :

1) Se factoriza la parte literal del término central : $P(x) \equiv x^2\left[2x^2 - x - 6 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right]$

2) Agrupamos y factorizamos dentro del corchete : $P(x) \equiv x^2\left[2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6\right]$

3) A continuación, reemplazamos : $x + \frac{1}{x} = y \wedge x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

4) Sustituyendo en el corchette : $P(x) \equiv x^2\left[2\left(y^2 - 2\right) - y - 6\right]$

5) Efectuando y factorizando en el corchete : $P(x) \equiv x^2 (y + 2)(2y - 5)$

6) Ahora al sustituir y por $x + \frac{1}{x}$ obtenemos : $P(x) \equiv x^2\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)\left(2x + \frac{2}{x} - 5\right)$

7) Multiplicando convenientemente : $P(x) \equiv \left[x\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)\right]\left[x\left(2x + \frac{2}{x} - 5\right)\right]$

8) Efectuando las multiplicaciones indicadas : $P(x) \equiv \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(2x^2 - 5x + 2\right)$

9) Si ahora aplicamos el criterio de aspa simple a cada término, se logra : $P(x) \equiv (x+1)^2 (2x - 1)(x - 2)$

10) Finalmente la ecuación resulta ser : $(x+1)^2 (2x - 1)(x - 2) = 0$

11) De aquí resulta fácil identificar las raíces : $x_1 = x_2 = -1$ (raíz de multiplicidad 2)

$x_3 = 1/2 \wedge x_4 = 2$ **RPTA. C**

15.- Resolver la siguiente ecuación : $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$, para luego indicar una de sus raíces :

A) -2 *B)* $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ *C)* $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ *D)* $\frac{2}{9}$ *E)* $\frac{2 - \sqrt{5}}{2}$

Resolución.-

Observando los coeficientes de la ecuación polinómica, podemos reconocer que se trata de una Ecuación Recíproca . Dado que los signos de los coeficientes de los términos equidistantes son iguales y en virtud a la 1ra observación expuesta en el item 16.6A, podemos asegurar que una raiz de la ecuación será : $x = -1$. Esto significa que al dividir el polinomio :

$P(x) \equiv x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$, por $(x + 1)$, el residuo deberá ser cero.

Efectuando la división según la regla de Ruffini encontramos que :

	1	-4	3	3	-4	1
-1		-1	5	-8	5	-1
	1	-5	8	-5	1	0

$P(x) \equiv (x+1)(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1)$

Luego la ecuación a resolver será :

$(x+1)(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1) = 0$ ..... (*)

Debemos reconocer que el segundo factor es también un polinomio recíproco de grado 4 cual se puede factorizar aplicando el método del aspa doble especial. Veamos :

Factorizando se obtiene : $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 \equiv (x^2 - 3x + 1)\underbrace{(x^2 - 2x + 1)}$

Asimismo reconocemos la existencia de un T.C.P., luego : $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 \equiv (x^2 - 3x + 1)(x-1)^2$ ..(2)

Reemplazando en (*), se tendrá : $(x+1)(x^2 - 3x + 1)(x-1)^2 = 0$

Finalmente las raíces de la ecuación se obtendrán igualando a cero cada factor obtenido :

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_4 = x_5 = 1$ (raíz de multiplicidad 2) **RPTA. C**

16.- ¿Cuál es aquella ecuación bicuadrada que admite como raíces a $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$?

A) $x^4 + 4x^2 - 2 = 0$ *B)* $x^4 - 3x^2 + 5 = 0$ *C)* $x^4 + 10x^2 - 4 = 0$

D) $x^4 - 3x^2 - 6 = 0$ *E)* $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 16.6C, si una raíz es : $x_1 = \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2}$

Con el mismo criterio, diremos que si la otra raíz conocida es : $x_3 = \sqrt{3} \Rightarrow x_4 = -\sqrt{3}$

A continuación debemos recordar que toda ecuación bicuadrada presenta la siguiente forma :

$$x^4 + S_2x^2 + S_4 = 0 \quad \text{.............................. (1)}$$

Donde : $S_2 = x_1x_2 + x_3x_4$ .... (2)

y : $S_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ .... (3)

Reemplazando los valores x_1 , x_2 , x_3 y x_4 en las relaciones (2) y (3) , se tendrá : $S_2 = -5 \wedge S_4 = 6$

Finalmente reemplazando los valores de S_2 y S_4 en la relación (I) se obtiene : $\boxed{x^4 - 5x^2 + 6 = 0}$ **RPTA. E**

17.- *Indicar una raíz real de la ecuación :* $x^3 + 3x + 2 = 0$

A) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ *B)* $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} + \sqrt[3]{2}$ *C)* $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} + \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$

D) $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ *E)* $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} + 1$

Resolución.-

Analizando al polinomio : $P(x) \equiv x^3 + 3x + 2$, se puede observar que $P(x)$ no presenta variación de signo, sin embargo $P(-x)$ si admite una sola variación de signo en consecuencia y según el Teorema de Descartesse, se puede afirmar que la ecuación dada solo admite una raíz real, la que a su vez es negativa.

Asimismo debemos reconocer que la ecuación dada es de la forma $x^3 + px + q = 0$, cuya única solución real se obtiene de : $x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ .... (1)

Donde el discriminante está dado así : $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ ....(2)

En el problema podemos observar que : $p = 3 \wedge q = 2$, luego en (2): $D = 2$

Finalmente en la relación (1) obtenemos : $x_1 = \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}}$

Y reacomodando : $x_1 = \boxed{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}}$ **RPTA. A**

18.- *¿Para qué valor de "n" el producto de las raíces de la ecuación :*

$$(5n^2 + 2)x^4 - (4n^2 + 9)x^2 + 3(n^2 + 2) = 0 \text{ ; será igual a 1 ?}$$

A) ± 1 *B)* $\pm\sqrt{2}$ *C)* $\pm\sqrt{3}$ *D)* ± 2 *E)* $\pm\sqrt{5}$

Resolución.-

En primer lugar debemos reconocer que la ecuación dada es bicuadrada y de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. De este modo y en virtud a lo expuesto en el item 16.6C, si : x_1 , x_2 , x_3 , y, x_4 son las raíces de la ecuación, éstas deberán ser tales que :

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a} \qquad \text{................ (1)}$$

Ahora por condición del problema, se sabe que : $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$ .... (2)

Asimismo reconocemos que : $a = 5n^2 + 2$, y , $c = 3n^2 + 6$ .... (3)

Ahora, reemplazando (2) y (3) en (1), tendremos : $1=\dfrac{3(n^2+2)}{5n^2+2} \Rightarrow 5n^2+2=3n^2+6$

Por transposición de términos se consigue : $2n^2=4 \Rightarrow n^2=2$

En consecuencia : $n=\pm\sqrt{2}$ **RPTA. B**

MISCELANEA

19.- Si x_1, x_2, $x_3 \wedge x_4$ son las raíces de la ecuación : $x^4-3x^3-2x^2+x+4=0$;

calcular : $T=\sum_{k=1}^{4}\left(x_k^2\right)$

A) 13 *B) 14* *C) 12* *D) 15* *E) 16*

Resolución.-

Se pide calcular : $T=\sum_{k=1}^{4}\left(x_k^2\right)$

Es decir : $T=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ .... (I)

De la ecuación dada podemos reconocer que : $a_0=1$, $a_1=-3$, y, $a_2=-2$

Según el teorema de Cardano - Viette visto en el item 16.3A, se debe cumplir que :

1) Suma de raices : $S_1=(-1)^1\dfrac{a_1}{a_0}$

Esto significa que : $x_1+x_2+x_3+x_4=3$ .... (II)

2) Suma de los productos de las raíces tomados de 2 en 2 : $S_2=(-1)^2\dfrac{a_2}{a_0}$

Reemplazando datos, tendremos : $x_1.x_2+x_1.x_3+x_1.x_4+......+x_3.x_4=-2$ .... (III)

Asimismo debemos tener en cuenta la siguiente equivalencia :

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(x_1.x_2+x_1.x_3+x_1.x_4+.....+x_3.x_4\right)$$

Reconociendo los términos : $\left(S_1\right)^2=T+2\left(S_2\right) \Rightarrow T=\left(S_1\right)^2-2\left(S_2\right)$ .... (IV)

Finalmente reemplazando los valores de $S_1 \wedge S_2$ encontrados en la relación (II) y (III) en (IV), se tendrá :

$$T = (3)^3 - 2\,(-2) = \quad \mathbf{13} \qquad\qquad \textbf{RPTA. A}$$

20.- Luego de resolver la ecuación : $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$; calcular la suma de 4 veces la mayor raíz más 2 veces la menor raíz.

A) 4 *B) -4* *C) 2* *D) -2* *E) 6*

Resolución.-

Haciendo una inspección de la ecuación, reconocemos que ésta es una Ecuación Recíproca. Dado que los signos de los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos, son diferentes; y en virtud a la 1ra observación expuesta en el item 16.6A, podemos afirmar que una raíz de la ecuación dada es : $x = 1$

Luego de aplicar la regla de Ruffini, la ecuación a resolver será : $(x - 1)\,\underbrace{(x^4 - 2x^2 + 1)} = 0$

Reconociendo al T.C.P., nos queda : $(x - 1)\,(x^2 - 1)^2 = 0$

Descomponiendo la diferencia de cuadrados : $(x - 1)\,(x - 1)^2\,(x + 1)^2 = 0$

Efectuando la multiplicación de bases iguales : $(x - 1)^3 \cdot (x + 1)^2 = 0$

Finalmente, igualando a cero observamos que sus raíces son :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1 \quad \text{........ (Raíz de multiplicidad 3)}$$

$$x_4 = x_5 = -1 \quad \text{........ (Raíz de multiplicidad 2)}$$

De estos resultados, reconocemos que la Mayor raíz es 1 y la Menor raíz es -1

$$\therefore \qquad \textbf{Suma pedida} = 4(1) + 2(-1) = \quad \mathbf{2} \qquad\qquad \textbf{RPTA. C}$$

21.- Hallar un polinomio de la forma : $P(x) \equiv x^n + b\,x^{n-1} + ... + q$, con coeficientes enteros, una de cuyas raíces sea $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)$ para luego indicar la suma de sus coeficientes.

A) 34 *B) 24* *C) -24* *D) 62* *E) -34* *UNI 92*

Resolución.-

Como P(x) admite como raíz a $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})$, podemos establecer que : $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

Por transposición de términos tenemos : $x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$

Elevamos a ambos miembros al cubo, obteniéndose : $x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 3$

Reacomodando la ecuación : $x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}\,(3x^2 + 2)$

Ahora elevamos al cuadrado a ambos miembros, obteniéndose :

$$x^6 + 36x^2 + 9 + 12x^4 - 6x^3 - 36x = 18x^4 + 24x^2 + 8$$

Transponiendo todos los términos al primer miembro se consigue :

$$x^6 + 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$$

Según los pasos anteriores, la ecuación obtenida es un polinomio de coeficientes enteros, que admite como una de sus raíces a : $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})$. Luego :

$$P(x) \equiv x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$$

Finalmente, la suma de coeficientes de $P(x)$ viene dada así : **P(1) = -34** **RPTA. E**

22.- Encontrar la mayor raíz de la ecuación : $2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$, sabiendo que dos de ellas suman la unidad.

A) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ *B)* $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)* $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}$ *E)* $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

Resolución.-

Sean x_1 , x_2 , y , x_3 las raíces de la ecuación dada, asi mismo reconozcamos que $a_0 = 2$, y , $a_1 = -1$; luego de acuerdo con el Teorema de Cardano - Viette, se puede establecer que :

1) La suma de las raíces viene dada por : $S_1 = -\frac{a_1}{a_0}$

Reemplazando datos : $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$ .... (1)

Pero por condición del problema : $x_1 + x_2 = 1$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1), se obtiene : $x_3 = -\frac{1}{2}$ .... (1ra raíz)

2) Aplicando ahora la regla de Ruffini, la ecuación a resolver será : $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-2x-6\right) = 0$

Dividiendo ambos miembros por 2, se obtiene : $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x-3\right) = 0$

A partir de aqui, las otras dos raíces de la ecuación se encontrarán igualando el 2do factor a cero : $x^2 - x - 3 = 0$

Aplicando la fórmula de Carnot, tendremos : $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

Finalmente reconocemos que la mayor raiz es : $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ **RPTA. B**

23.- Si dos de las raíces de la ecuación : $2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 2 = 0$, son : i ∧ $(1 + i)/\sqrt{-1} = i$; calcular el valor de : $a + b + c + d$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Si x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , y , x_5 son las raíces de la ecuación, por condición del problema se tiene que :

$$x_1 = i \quad \wedge \quad x_2 = 1 + i$$

De acuerdo al teorema relativo a la Paridad de las raíces imaginarias, expuesto en el item 16.2A, las otras dos raíces serán :

$$x_3 = -i \quad \wedge \quad x_4 = 1 - i$$

Ahora, la 5ta raíz la obtendremos aplicando el Teorema de Cardano - Viette, referido al producto de raíces, tendremos que :

$$S_5 = (-1)^5 \frac{a_5}{a_0} \quad .... (a_5 = -2 \ , \text{y} , \ a_0 = 2)$$

Reemplazando datos tendremos :

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 1$$

Si ahora reemplazamos los valores de x_1 , x_2 , x_3, y, x_4 , se tendrá :

$$(i)(1 + i)(-i)(1 - i)x_5 = 1$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas y despejando, encontramos :

$$x_5 = \frac{1}{2}$$

Debemos tener en cuenta que las raíces x_2 , y , x_4 fueron obtenidos al igualar a cero el trinomio: $x^2 - 2x + 2$

Asimismo las raíces x_1 , y , x_3 fueron obtenidas al igualar a cero el binomio : $x^2 + 1$

Por último la raíz x_5 fue obtenida al igualar a cero el binomio : $2x - 1$

En virtud al teorema expuesto en el item 16.1C, la ecuación dada en el problema será equivalente a :

$$(2x - 1)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1) = 0$$

Esto último nos permite establecer que :

$$2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 2 \equiv (2x - 1)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1) \ ..... (*)$$

Puesto que se pide calcular : $a + b + c + d$, conviene hacer $x = 1$ en (*) :

$$2 + a + b + c + d - 2 = (1)(1)(2)$$

Finalmente : $a + b + c + d =$ **2** **RPTA. B**

24.- Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces reales de la ecuación recíproca :

$$mx^4 + (n-3)x^3 - 10x^2 + (5-m)x + n + 6 = 0 \quad ; \text{ calcular el valor de : } \left(x_1 + x_2\right)^{x_1 - x_2}$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) F.D*

Resolución.-

Por tratarse de una ecuación recíproca, se debe cumplir una igualdad entre los coeficientes equidistantes de los extremos. Según esto se puede establecer que :

$$m = n + 6 \quad \Rightarrow \quad m - n = 6 \quad \text{...... (1)}$$

$$n - 3 = 5 - m \quad \Rightarrow \quad m + n = 8 \quad \text{...... (2)}$$

Resolviendo, tendremos : $m = 7 \quad \wedge \quad n = 1$

Luego, la ecuación a resolver será : $7x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 2x + 7 = 0$

Factorizando el polinomio de 4[to] grado según el método del aspa doble especial, tendremos : $(7x^2 + 12x + 7)(x^2 - 2x + 1) = 0$

Para reconocer las raíces reales de esta ecuación, cada factor lo igualaremos a cero. Veamos :

1) $7x^2 + 12x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = (12)^2 - 4(7)(7) = -52$

Dado que $\Delta < 0$, deducimos que esta ecuación no tiene raíces reales.

2) $x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$

Luego la ecuación tiene dos raíces reales iguales : $x_1 = x_2 = 1$

Finalmente el valor pedido será : $\left(x_1 + x_2\right)^{x_1 - x_2} = 2^0 = 1$ **RPTA. A**

25.- Si las raíces de la siguiente ecuación : $x^4 - (3m+4)x^2 + (m+1)^2 = 0$, están en progresión aritmética ¿Qué valor asume "m"? (m > 0)

A) 2 *B) 4* *C) $\frac{1}{2}$* *D) 3* *E) $\frac{1}{4}$*

Resolución.-

Si x_1, x_2, x_3, y, x_4 son las raíces de la ecuación, por condición del problema estas se deberán encontrar en progresión aritmética; en consecuencia se puede plantear que :

$$x_1 = a - 3r \ \wedge \ x_2 = a - r \ \wedge \ x_3 = a + r \ \wedge \ x_4 = a + 3r \quad \text{...... (*)}$$

De acuerdo con la 1[ra] propiedad de las raíces de una Ecuación Bicuadrada vista en el item 16.6C, se establece que :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{...... (**)}$$

Sustituyendo (*) en (**), obtenemos : $(a - 3r) + (a - r) + (a + r) + (a + 3r) = 0$

Simplificando y reduciendo, nos queda : $4a = 0 \Rightarrow a = 0$

Luego las raíces de la ecuación bicuadrada en función de la razón "r", serán :

$$x_1 = -3r \;\wedge\; x_2 = -r \;\wedge\; x_3 = r \;\wedge\; x_4 = 3r \qquad \text{.... (1)}$$

Desde que : x_1 , x_2 , x_3 , y , x_4 son las raíces de la ecuación dada, aplicaremos el 3er Teorema fundamental del Algebra, asi :

$$x^4 - 3m + 4)x^2 + (m+1)^2 \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \qquad \text{.... (2)}$$

Reemplazando (1) en (2) : $x^4 - (3m + 4)x^2 + (m+1)^2 \equiv (x + 3r)(x + r)(x - r)(x - 3r)$

Efectuando en el 2do miembro : $x^4 - (3m + 4)x^2 + (m+1)^2 \equiv x_4 - 10r^2x^2 + 9r^4$

A partir de esta identidad, podemos establecer las siguientes igualdades :

$$3m + 4 = 10r^2 \qquad \text{.................................. (I)}$$

$$(m+1)^2 = 9r^4 \qquad \text{.................................. (II)}$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros de la relación (II), se consigue :

$$(m + 1) = 3r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{m+1}{3}$$

Finalmente, reemplazando la expresión obtenida para : r^2 en la relación (I), encontramos la ecuación que nos permite hallar el valor de "m" . Veamos :

$$3m + 4 = 10\left(\frac{m+1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad 9m + 12 = 10m + 10$$

Despejando, concluímos que : $m = 2$ **RPTA. A**

26.- Al resolver la ecuación : $x^5 + 9x^3 + 5x = 1 + 9x^2 + 5x^4$, se observa que dos de sus raíces adquieren la forma : $\frac{3+\sqrt{a}}{2} \wedge \frac{1-\sqrt{b}}{2}$. Luego el valor de "a - b" es :

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Resolución.-

Transponiendo todos los términos al primer miembro, la ecuación a resolver será :

$$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$$

Una rápida inspección de los coeficientes, nos permite deducir que se trata de una ecuación recíproca. Por tal razón utilizaremos la 1ra observación expuesta en el item 16.6A, con lo cual podemos afirmar que una raíz de la ecuación dada es : $x = 1$

Luego aplicando la regla de Ruffini, la ecuación será equivalente a (*), es decir :

$$(x-1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$$

Factorizando el polinomio indicado, según el criterio del aspa doble especial, se tendrá :

$$(x-1)(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Igualando cada factor a cero las raíces de la ecuación serán :

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \; * \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{-3}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{-3}}{2} \; * \end{cases}$$

Ahora, por condición del problema, se tendrá que : $\dfrac{3+\sqrt{a}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \;\wedge\; \dfrac{1-\sqrt{b}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$

Esto nos permite deducir que : $a = 5 \;\wedge\; b = -3$

Finalmente : $a - b = 8$ **RPTA. D**

27.- Sabiendo que $x = c$, es una raíz de la ecuación :

$$ax^5 + (b - ac)x^4 - bcx^3 - bx^2 - (a - bc)x + ac = 0, \text{ con } a \neq 0$$

¿Qué condición deben cumplir a, b , y , c para que las otras raíces sean reales?

A) $2c = a + b$ B) $2a = b + c$ C) $2b = a + c$ D) $|b| \geq 2|a|$ E) $|a| \geq 2|b|$

UNI 92

Resolución.-

Por condición del problema se sabe que : $x = c$, es una raíz del polinomio. Esto significa que la división de $P(x)$ entre $(x - c)$ es exacta. Luego, utilizando la regla de Ruffini, tendremos :

	a	$(b - ac)$	$-bc$	$-b$	$-(a - bc)$	ac
c		ac	bc	0	$-bc$	$-ac$
	a	b	0	$-b$	$-a$	0

De aquí se deduce que : $(x - c)\underbrace{(ax^4 + bx^3 - bx - a)} = 0$ .... (*)

Factorizando la expresión indicada tendremos :

$$ax^4 + bx^3 - bx - a \equiv ax^4 - a + bx^3 - bx$$

$$\equiv a\underbrace{(x^4 - 1)} + bx\,(x^2 - 1)$$

$$\equiv a\underbrace{(x^2 + 1)}(x^2 - 1) + bx\,\underbrace{(x^2 - 1)}$$

$$\equiv (x^2 - 1)\,[a(x^2 + 1) + bx]$$

$$ax^4 + bx^3 - bx - a \equiv (x + 1)(x - 1)(ax^2 + bx + a)$$

Luego reemplazando en (*) se tendrá : $(x - c)(x + 1)(x - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$

A continuación igualamos a cero los 3 primeros factores para asi obtener las 3 primeras raíces de la ecuación. Veamos :

$$x - c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = c$$

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$$

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$$

Podemos observar que x_1 , x_2 , y , x_3 son reales, es decir, solo falta garantizar que las otras raíces que se obtienen del 4to factor sean reales. Para que esto sea así, se debe cumplir que el discriminante de esta ecuación cuadrática deberá ser mayor o igual que cero, es decir :

$$b^2 - 4a^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 \geq 4a^2$$

Finalmente, extrayendo raíz cuadrada, se concluye que : $|b| \geq 2|a|$ **RPTA. D**

28.- Hallar todas las raíces del polinomio : $P(x) \equiv 9x^3 - 36x^2 + 44x - 16$, si una raíz del polinomio es igual a la suma de las otras dos.

A) $x_1 = 1/3$; $x_2 = 2/3$; $x_3 = 1$

B) $x_1 = 1/2$; $x_2 = 1/2$; $x_3 = 2$

C) $x_1 = 4/3$; $x_2 = 1/3$; $x_3 = 2$

D) $x_1 = 2$; $x_2 = 4/3$; $x_3 = 2/3$

E) $x_1 = 5/3$; $x_2 = 1/3$; $x_3 = 3$

UNI 95 - II

Resolución.-

Sean x_1 , x_2 , y , x_3 son las raíces del polinomio P (x). Aprovechando el Teorema de Cardano -Viette, relativa a la suma de las raíces, se podrá plantear que : $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ .... (1)

Pero por condición, se sabe que : $x_2 + x_3 = x_1$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1), se obtiene : $x_1 + x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

Asimimsmo debemos observar que $x = 2$, es una raíz del polinomio P (x), es decir, al efectuar la división de P (x) por $(x - 2)$ según la regla de Ruffini, el residuo será cero. Veamos :

	9	-36	44	-16
2		18	-36	16
	9	-18	8	0

Luego el polinomio P (x) será : $P(x) \equiv (x-2)\,\underbrace{(9x^2-18x+8)}$

Factorizando la expresión indicada según el método del aspa simple, el polinomio P(x) se podrá representar así :

$$P(x) \equiv (x-2)(3x-4)(3x-2)$$

Finalmente, al igualar a cero cada factor, se puede observar que las raíces del polinomio son :

$$x_1 = 2 \; ; \; x_2 = 4/3 \; ; \; x_3 = 2/3$$ **RPTA. D**

29.- El polinomio : $P(x) \equiv 8x^5 - 60x^4 + 126x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 45$, tiene sus tres raíces reales en progresión aritmética; las otras dos raíces son imaginarias y de la forma ± bi. Si b es entero, calcular b.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 UNI 96 - I

Resolución.-

Sean x_1, x_2, x_3, x_4, y, x_5, son las raíces del polinomio; luego por condición del problema se tendrá : $x_1 = bi \;\wedge\; x_2 = -bi$ .... (I)

Por condición del problema se tiene que : $x_3 = a - r \; ; \; x_4 = a \;\wedge\; x_5 = a + r$ .... (II)

De la ecuación dada reconocemos que : $a_0 = 8$, y , $a_1 = -60$, luego de acuerdo al Teorema de Cardano de Viette, se podrá plantear que : $S_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$

Reemplazando datos : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \dfrac{15}{2}$ .... (III)

Ahora reemplazando (I) y (II) en (III), se obtiene : $3a = \dfrac{15}{2} \Rightarrow a = \dfrac{5}{2}$

Al reemplazar este valor en (II), reconocemos que una raíz del polinomio P(x) es : $x = \dfrac{5}{2}$, la cual nos indica que cuando se divide el polinomio P(x) por (2x - 5) el residuo deberá ser cero. Ahora, efectuando la división : P(x) ÷ (2x - 5), según la regla de Ruffini, se tendrá :

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 8 & -60 & 126 & \alpha & \beta & -45 \\
\frac{5}{2} & & 20 & -100 & 65 & 5m & 45 \\
\hline
 & 8 & -40 & 26 & 2m & 18 & 0
\end{array}$$

Valor deducido para que el residuo sea igual acero

Luego el polinomio P (x) podrá ser representado así :

$$P(x) \equiv (2x-5)(4x^4 - 20x^3 + 13x^2 + mx + 9) \quad .... (IV)$$

De la relación (I) podemos deducir que las raíces : $x_1 = bi$, y , $x_2 = -bi$, fueron obtenidas al igualar a cero el binomio : $x^2 + b^2$ y como x_1 , y , x_2 son raíces del polinomio P(x), se podrá afirmar que : $(x^2 + b^2)$ es un factor de P(x).

A continuación en la relación (IV), se puede deducir que el factor : $(x^2 + b^2)$, deberá estar contenido en : $4x^4 - 20x^3 + 13x^2 + mx + 9$. En consecuencia al aplicar en este polinomio el Teorema del Resto con : $x^2 = -b^2$, el residuo debe ser cero. Veamos :

$$4(-b^2)^2 - 20(-b^2)x + 13(-b^2) + mx + 9 = 0$$

Agrupando términos, nos queda : $(4b^4 - 13b^2 + 9) + (20b + m)x \equiv 0$

Ahora, de la identidad mostrada, se cumple que : $4b^4 - 13b^2 + 9 = 0 \wedge 20b^2 + m = 0$

Factorizando la 1ra ecuación, tenemos : $(4b^2 - 9)(b^2 - 1) = 0$

Finalmente, como b es entero, se concluye que : $\mathbf{b = \pm 1}$ **RPTA. A**

30.- Si "α" es un número real de modo que el polinomio : P (x) ≡ x^3 - 3x + α , tiene dos raíces reales diferentes; calcular la suma de todos los valores que toma "α".

A) -1 B) 0 C) 2 D) -2 E) 3

Resolución.-

De acuerdo a la condición del problema, la ecuación cúbica : $x^3 - 3x + \alpha = 0$, admite dos raíces reales diferentes, por lo tanto se puede deducir que la tercera raíz deberá ser real e igual a alguna de las otras dos. Es decir la ecuación presenta 3 raíces reales de las cuales 2 son iguales y la otra diferente.

Luego se tendrá que cumplir el caso (I) expuesto en el item 16.6B :

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$$

Es decir : $\left(\frac{-3}{3}\right)^3 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 4$

En consecuencia los valores de "α" serán : $\alpha_1 = 2 \wedge \alpha_2 = -2$

Finalmente la suma pedida será : $\alpha_1 + \alpha_2 = \mathbf{0}$ **RPTA. B**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Dada la ecuación : $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

¿Qué alternativa indica una de sus raíces?

A) -6 B) -4 C) 3 D) 2 E) -2

2.- Calcular la suma de las raíces no racionales del polinomio :

$$P(x) \equiv x^3 - 8x^2 + 23x - 24$$

A) 41 B) 25 C) 3 D) 16 E) 9

3.- De acuerdo al teorema fundamental del álgebra la ecuación :

$$x^4 + x^3 - [(x^2 - 1)^2 + 2x^2 + x - 9] = 0$$

presenta :

A) 4 raíces complejas B) 3 raíces complejas

C) 2 raíces complejas D) 4 raíces reales

E) 2 raíces reales

4.- Si $a, b \wedge c$ son las raíces de la ecuación :

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 7 = 0 \;;$$

calcular el valor de : $a^2 + b^2 + c^2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.- Si un polinomio presenta la siguiente forma:

$P(x) \equiv 3^5 x^n (x-1)^3 (x+4)^2$ es cierto que :

A) 3 es una raíz de multiplicidad de 5

B) Cero es una raíz de multiplicidad de n

C) -1 es una raíz de multiplicidad de 3

D) -4 es una raíz de multiplicidad de 4

E) A ∧ B

6.- Proporcionar una raíz del polinomio:

$$P(x) \equiv x^3 - 36x^2 + 423x - 1620$$

Sabiendo que una de sus raíces es media aritmética de las otras dos.

A) -15 B) -6 C) 6 D) 12 E) -9

7.- Calcular la suma del producto de las raíces de la ecuación : $2x^7 - 4x^2 + 1 = 0$,tomadas de cinco en cinco.

A) -4 B) 0 C) 1 D) 4 E) 2

8.- ¿ Determinar cuál de los siguientes polinomios tiene como una de sus raíces al número :

$$\sqrt{3} + \sqrt{2}\, i \ ?$$

A) $x^4 - 2x^2 + 25$ B) $x^4 + 2x^2 + 25$

C) $x^4 + 2x^2 - 25$ D) $x^4 + x^2 + 25$

E) $x^4 + 2x^2 + 5$

9.- Calcular el producto de las raíces reales de la ecuación :

$$x^4 - 10x^3 - 19x^2 + 480x - 1392 = 0 \;,$$

sabiendo que una de sus raíces es : $5 + 2i$

A) $16\sqrt{3}$ B) -16 C) -48 D) 1392 E) -92

10.- ¿ Cuál es el menor valor de "α" para que una de las raíces de la ecuación :

$x^3 - 28x + \alpha = 0$, sea el doble de la otra ?

A) -48 B) -36 C) -12 D) -72 E) -64

NIVEL B

11.- ¿Para qué valores de "m" el producto de las raíces de la ecuación :

$\sqrt[3]{m+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{m-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{(m^2-x)^2}$, es nulo?

A) 0 ; 1 ; -2 B) -1 ; 1 ; 2 C) -1 ; 0 ; 1

D) 1 ; 2 ; 0 E) 0 ; -1 ; 2

12.- Sabiendo que 1 $\wedge$ -2 son raíces de la ecuación: $x^3 + mx^2 + nx - 10 = 0$; proporcionar la quinta parte de la otra raíz.

A) -5 B) 1 C) -1 D) 5 E) -2

13.- Halle el valor de "m" para que las raíces de la ecuación : $x^4 - mx^2 + 9 = 0$; se diferencian en una constante "k"

A) ±10 B) ±11 C) ±12 D) ±13 E) ±14

14.- La ecuación :

$$(a+b-c)(a-b)x^4 + (b+c-a)(b-c)x^2$$
$$+ (c+a-b)(c-a) = 0$$

admite por raíces a : 1 $\wedge$ i ; luego el valor numérico de :

$$\frac{(a+2b)\ (b+2c)\ (c+2a)}{(a+b+c)\ (ab+bc+ac)} \text{ es:}$$

A) 2 B) 3 C) -1 D) 1 E) -2

15.- Proporcionar la suma de las raíces no imaginarias de la siguiente ecuación :

$$x^6 - 18\sqrt{2}\,x^3 + 64 = 0$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

16.- ¿ Cuánto suman las raíces racionales de la ecuación : $\sqrt[6]{x-1} + \sqrt[6]{2-x} = 1$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17.- ¿Cuántas raíces imaginarias tiene la ecuación : $x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) Ninguna E) N.A.

18.- El siguiente polinomio :

$$P(x) \equiv x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$$

presenta :

A) 5 raíces diferentes

B) 2 raíces de multiplicidad 2

C) 1 raíz de multiplicidad 2 y otra de multiplicidad 3

D) 1 raíz de multiplicidad 4

E) 1 raíz de multiplicidad 5

19.- Si a , b, c, d son las raíces de la ecuación:

$$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x + 3 = 0 ;$$

calcular : $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}$

A) 1 B) 1/3 C) 2 D) 1/2 E) -1/3

20.- Indicar la mayor raíz al resolver la ecuación : $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$

A) 3 B) 4 C) 5 D) -2 E) N.A

21.- Proporcionar una raíz de la ecuación : $x^3 + 12x^2 - 64x - 768 = 0$ sabiendo que una de ellas es la negativa de la otra.

A) 12 B) -8 C) -2 D) -4 E) 3

22.- Con respecto a la ecuación :

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ lo correcto es :}$$

A) Presenta 4 raíces reales positivas

B) Presenta 4 raíces reales negativas

C) Presenta solo 2 raíces reales

D) No presenta raíces reales

E) Presenta 1 raíz real positiva, 1 raíz real negativa y 2 raíces imaginarias conjugadas.

23.- En la ecuación recíproca de grado par : $2x^4 - 15\sqrt{2}\,x^3 + 35x^2 - 15\sqrt{2}\,x + 4 = 0$ ¿En cuánto excede la raíz mayor a la menor ?

A) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

24.- La ecuación : $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ tiene 2 raíces que suman 2 ¿Cuál es la ecuación que permite calcular las otras dos raíces?

A) $x^2 + x + 2 = 0$ B) $x^2 + x - 2 = 0$

C) $x^2 + x - 1 = 0$ D) $x^2 + x + 1 = 0$

E) $x^2 - 2x + 2 = 0$

NIVEL C

25.- La suma de dos raíces de la ecuación : $2x^3 - x^2 + x = 7x$ es igual a 1/2 ; determinar x.

A) -3 B) 2 C) -2 D) 3 E) 3/2

26.- Si una de las raíces de la ecuación : $x^3 + x^2 + mx + n = 0 \;/\; \{m ; n\} \subset \mathbb{Q}$ es : $3 + \sqrt{5}$; calcular el valor de : $m^2 - n^2$

A) 6 B) 60 C) 600 D) 660 E) N.A

27.- Sabiendo que la ecuación : $x^4 - 9x + \alpha = 0$ admite dos raíces que suman 3 ;calcular el producto de todas las raíces.

A) 12 B) -12 C) 18 D) -18 E) 20

28.- Halle Ud.= θ^5 / α^4 si la ecuación : $x^5 - 5\theta x + 4\alpha = 0$ admite a : λ como una raíz de multiplicidad 2.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

29.- Halle la suma de todos los valores que asume "θ" para que las raíces de la ecuación : $x^3 - (3 + \theta)\, x^2 + (3\theta + 2)x - \theta = 0$, estén en progresión aritmética.

A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{9}{4}$ E) 4

30.- Dada la ecuación :

$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, donde : $a = f \wedge b = e \wedge c = d$; calcule la suma de sus raíces si dos ellas son "α" y "θ" $(\alpha \neq \theta)$ cumpliéndose que :

$$\alpha + \theta = 10 \wedge \alpha . \theta = -10$$

A) 3 B) -2 C) 8 D) 1 E) 0

31.- Calcular la suma de las sextas potencias de las raíces de la ecuación :

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 8 = 0$$

A) 25 B) 84 C) 122 D) 232 E) 126

32.- Calcular el valor de : "$n . k . t . a$" si P (x) es un polinomio de grado mínimo con coeficientes reales de la forma genérica.

$$P(x) \equiv x^{n+1} - a x^k + ... + t$$

donde 2 de sus raíces son : $\frac{10}{1+3i} \wedge \frac{13}{2+3i}$

A) 54 B) 720 C) 7020

D) 582 E) F.D

33.- Sabiendo que : 4 $\wedge$ $\frac{2}{3}$ son raíces de la ecuación polinomial cúbica :

$$6x^3 + 23x^2 - \alpha x - \theta = 0$$

Calcular el valor de : "$\alpha^2 + \theta^2$"

A) 96 B) 100 C) 82 D) 76 E) 108

34.- Luego de resolver la ecuación bicuadrada $x^4 - \sqrt{2}\;(a + b)x^2 + (a - b)^2 = 0$ calcular el valor de la suma de las cuartas potencias de sus raíces sabiendo que $ab \neq 0 \wedge a \neq b$

A) $2ab$ B) $4ab$ C) $8ab$

D) $16ab$ E) $64ab$

35.- Si r_1, r_2, r_3 , y, r_4 son las raíces de la ecuación : $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$,

tal que : $\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$;

proporcionar el valor de r_4

A) 1/2 B) 1/4 C) 5/4 D) 1 E) 2

36.- Si $\{\alpha ; \theta\} \subset \mathbb{R}$ y una raíz del polinomio P $(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 + \theta x + 2$. es $x_0 = 1 + i$ entonces el valor de "α" es :

A) 2 B) -2 C) 3 D) -3 E) 1

37.- Construir una ecuación de 3[er] grado cuyas raíces x_1 , $x_2 \wedge x_3$ verifiquen las siguientes relaciones .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -4 \end{cases}$$

A) $4x^3 + 8x^2 - 16x + 27 = 0$

B) $5x^3 + 10x^2 - 26x - 14 = 0$

C) $2x^3 + 4x^2 - 15x + 40 = 0$

D) $6x^3 + 12x^2 + 21x + 34 = 0$

E) $3x^3 - 12x^2 + 21x - 34 = 0$

38.- Sabiendo que : $(3 - \sqrt{2})$; $(1 + \sqrt{-1})$ y $\sqrt[3]{2}$, son raíces de la ecuación polinomial de grado mínimo y de coeficientes reales cuya forma canónica es:

$$x^7 + \alpha x^6 + \theta x^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda = 0 ;$$

calcule el valor de "λ"

A) 36 B) -28 C) 40 D) -24 E) 32

39.- Si las raíces de la ecuación polinomial : $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$, son de la forma: $\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)$; construir otra ecuación del mismo grado cuyas raíces adopten la forma $(2\alpha + 5)$. Dar como respuesta el producto de las raíces de ésta última ecuación :

A) 100 B) 72 C) 54 D) 34 E) 48

40.- Si : x_1 ; x_2 ; x_3 ; .... x_{n-1} ; x_n , son las raíces de la ecuación polinomial

$$x^n - 2x + 1 = 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^* \; ;$$

halle el valor de : $T = \prod_{k=1}^{n} \left(x_k^n + 1\right)$

A) 0 B) 2^n C) $(-1)^{n-1}$

D) $(-2)^n$ E) $(-1)^{n+1}\, 2^n$

41.- Si luego de resolver la ecuación :

$$\frac{x^4}{20} + 1 = 5\left(x - \frac{x^2}{10}\right)^2 ,$$

acepta como raíces a : x_1 , x_2 , x_3 formar una nueva ecuación cúbica que acepte como raíces a :

$$\frac{x_1^3 - 4}{x_1^2 - 1} \; ; \; \frac{1}{x_2}\left(x_2^2 + \frac{1}{x_2}\right) ; \; \frac{x_3^3 - 2x_3^2 - 2}{x_3^2 - 1} \; ;$$

luego calcular el producto de sus raíces :

A) 15 B) 25 C) 65 D) 75 E) -100

42.- Si la ecuación polinomial de coeficientes racionales :

$$P(x) \equiv ax^4 - x^3 + 2\sqrt{a}\, x^2 - 9x + 2 = 0$$

presenta al menos una raíz racional positiva no entera, indicar la suma de las raíces no reales que admite la ecuación dada.

A) - 1/2 B) 1/2 C) -1/3 D) 1/3 E) -1

17 Matrices y Determinantes

17.1) MATRIZ

Se denomina matriz a un arreglo rectangular de números ordenados en filas y columnas; los cuales se encierran con paréntesis o corchetes. Para designar a una matriz se utilizarán letras mayúsculas ($A, B, C, \ldots$).

1er Ejemplo.-

Puede observarse que la matriz A es un arreglo rectangular que consta de 3 filas *(horizontales) y 4* columnas *(verticales).*

Columnas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & \pi \\ 1 & -1 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{Filas}$$

Observación . *Una matriz no posee valor numérico, pues solo se trata de un arreglo de números ubicados en un espacio rectangular.*

17.1A ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden de una matriz está dada por la multiplicación indicada del número de *filas* por el número de *columnas* (en ese orden) que posee la matriz.

2do Ejemplo.- *Para la matriz mostrada en el ejemplo 1, se tendrá* :

Orden = (# *filas*) × (# *columnas*)

Orden = 3 × 4

Esto significa que la matriz *A* es de orden : 3 × 4

17.1B FORMA GENERAL DE UNA MATRIZ

Sea *A* la matriz de orden $m \times n$, es decir, ésta consta de m filas y n columnas. Dicha matriz se representa así :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Los elementos de la matriz han sido denotados en base a un *elemento genérico* : a_{ij} . Esta notación nos indica que el elemento a se encuentra ubicado en la fila "i" , y en la columna "j".

Teniendo en cuenta al elemento genérico a_{ij} , la matriz A podrá ser representada en forma abreviada según la relación :

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \quad \text{, donde : } \begin{cases} i = 1; 2; 3; \ldots , m \\ j = 1; 2; 3; \ldots , n \end{cases}$$

3^er Ejemplo.- *Dada la matriz* : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ *; calcular :* $a_{13} + a_{22}$ *y expresarla en su forma abreviada.*

Resolución.-

Para calcular la suma solicitada deberemos identificarse a cada uno de los sumandos dados . Para ello utilizaremos el significado del elemento genérico; veamos :

1) a_{13} : Es el elemento de la matriz A que se encuentra ubicado en la fila 1 y en la columna 3. Observando a la matriz , reconocemos que : $a_{13} = 1$

2) a_{22} : Es el elemento de la matriz A que se encuentra ubicado en la fila 2 y en la columna 2. Observando a la matriz , reconocemos que : $a_{22} = -2$

En consecuencia, la adición pedida será : $a_{13} + a_{22} = 1 + (-2) = -1$

Finalmente; la forma abreviada de la matriz A será : $A = \left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$

17.2) MATRICES ESPECIALES

17.2A MATRIZ FILA

Es aquella que consta de una sola fila y n columnas , siendo : $n \geq 2$

$$A = \left[a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots\ a_{1n}\right]_{1\times n}$$

Ejemplo.- *La matriz :* $A = [1 \quad 3 \quad 2]$ *; es una matriz fila, de orden :* 1×3

17.2B MATRIZ COLUMNA

Es aquella que consta de una sola columna y m filas ($m \geq 2$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Ejemplo.- *La matriz :* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *, es una matriz columna de orden :* 3×1

17.2C MATRIZ NULA

Es aquella matriz; en la que cada uno de sus elementos es igual a cero.

Ejemplo.- *La matriz nula de orden* 2×2 *es :* $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

En cambio, la matriz nula de orden : 3×2 *será :* $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

17.2D MATRIZ RECTANGULAR ($m \neq n$)

Es aquella en la que el número de filas es diferente al número de columnas. A la matriz fila y a la matriz columna se les considera como casos especiales de matriz rectangular.

Ejemplo.- *La matriz :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Es una matriz rectangular, pues su número de filas (3) es diferente al número de sus columnas (4).

17.2E MATRIZ CUADRADA ($m = n$)

Es aquella en la que el número de filas es igual al número de columnas.

Ejemplo.- *La matriz :* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Es una matriz cuadrada; pues su número de filas (3) es igual al número de sus columnas (3).

17.3) IGUALDAD DE MATRICES

Dadas 2 matrices A y B , se dice que éstas son iguales si cumplen simultáneamente las siguientes condiciones :

1ra) Deben ser de igual orden.

2da) Sus elementos correspondientes deben ser iguales.

Ejemplo.- *Las matrices :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, y , $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *; son iguales dado que :*

1) Son de igual orden : 3×2

2) Sus elementos correspondientes son iguales :

$$a_{11} = b_{11} = 2 \quad ; \quad a_{12} = b_{12} = 3 \quad ; \quad a_{21} = b_{21} = 1$$

$$a_{22} = b_{22} = 4 \quad ; \quad a_{31} = b_{31} = 5 \quad ; \quad a_{32} = b_{32} = 7$$

17.4) TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

La transpuesta de una matriz A se denota como A^T, y se define como aquella matriz que se obtiene intercambiando íntegramente las filas por las columnas de la matriz original A, es decir :

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad A^T = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$$

Ejemplo.- *Encontrar la transpuesta de cada una de las matrices dadas :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la definición :

1) Sí : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ $\longrightarrow$ $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

2) Sí : $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$

3) Sí : $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

17.4A PROPIEDADES DE LA TRANSPUESTA

Siendo A matriz :

1ra) $\left(A^T\right)^T = A$

2da) $\left(\left(A^T\right)^T\right)^T = A^T$

Ejemplo.- *Para la matriz :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *, verificar las propiedades anteriores.*

De acuerdo a la definición, si : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Asi mismo tendremos que si : $A^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(A^{T}\right)^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ..... (1)

A continuación, si : $\left(A^{T}\right)^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\left(A^{T}\right)^{T}\right)^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ..... (2)

De estos resultados se puede verificar que :

De (1) : $\left(A^{T}\right)^{T} = A$ ... (1ra Propiedad)

De (2) : $\left(\left(A^{T}\right)^{T}\right)^{T} = A^{T}$ ... (2da Propiedad)

17.5) OPERACIONES CON MATRICES

17.5A ADICION Y/O SUSTRACCION DE MATRICES

La condición necesaria y suficiente para que con dos matrices $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ y $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, se pueda efectuar una adición o sustracción es que éstas posean el mismo orden $(m \times n)$. Los elementos de la matriz resultante se obtendrán teniendo en cuenta la siguiente relación :

$$A \pm B = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]_{m\times n}$$

Ejemplo.- *Dadas las matrices :* $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, *y*, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *, obtener las matrices :* A + B y A - B.

Resolución.-

En primer lugar reconocemos que A y B son matrices de igual orden : 3 × 2. A continuación calcularemos : $A + B$. Veamos :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 2+3 \\ 3+0 & 1+1 \\ 2+1 & -1+4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Para la matriz $A - B$; se tiene : $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 2-3 \\ 3-0 & 1-1 \\ 2-1 & -1-4 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

Propiedad . *La transpuesta de una matriz suma (o diferencia) será igual a la suma (o diferencia) de las transpuestas de cada matriz, es decir :*

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

17.5B MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Dada una matriz : $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ y un escalar k (número real), la multiplicación de la matriz A por el escalar k se define del siguiente modo :

$$\boldsymbol{k \,.\, A = k \,.\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[k . a_{ij}\right]_{m\times n} \;;\; \forall\, k \in \mathbb{R}}$$

Nota . La multiplicación de una matriz por un escalar es conmutativa : $k \,.\, A = A \,.\, k$

Ejemplo.- *Dada la matriz :* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, obtener la matriz : $3A$

<u>**Resolución.-**</u>

Se pide : $3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(3) & 3\cdot(2) & 3\cdot(1) \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot(2) & 3\cdot(4) \\ 3\cdot(1) & 3\cdot(1) & 3\cdot(3) \\ 3\cdot(2) & 3\cdot(4) & 3\cdot(1) \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

Propiedad . *La transpuesta de la multiplicación de un escalar por una matriz, es igual a la multiplicación del escalar por la transpuesta de la matriz dada; es decir :*

$$(k . A)^T = k \,.\, A^T \;;\; \forall\, k \in \mathbb{R}$$

17.5C MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ FILA POR UNA MATRIZ COLUMNA

Sea la matriz fila : $A = \left[a_{11}\; a_{12}\; a_{13}\; \ldots\; a_{1n}\right]$ de orden : $1 \times n$, y la matriz columna : $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$, de orden : $n \times 1$, entonces el producto matricial $A.B$, se define como aquella matriz de orden 1×1 , cuyo único elemento se calcula así :

$$A \,.\, B = \left[a_{11} \,.\, b_{11} + a_{12} \,.\, b_{21} + a_{13} \,.\, b_{31} + ... + a_{1n} \,.\, b_{n1}\right]_{1\times 1}$$

Ejemplo.- *Encontrar la matriz A . B si :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Resolución.-

En primer reconocemos que la matriz fila A es de orden : 1×3 y la matriz columna B es de orden: 3×1; por lo tanto es posible encontrar el producto matricial : $A \,.\, B$. Veamos :

$$A \,.\, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = [(2 \cdot 4) + (3 \cdot 2) + (1 \cdot 5)] \quad \Rightarrow \quad A \,.\, B = [8 + 6 + 5] = [19]$$

17.5D MULTIPLICACION DE DOS MATRICES

Dadas las matrices A y B ; existe el producto matricial : $A \,.\, B$ si y solamente si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Asimismo si : $A = \left[a_{ik}\right]_{m\times p}$ y $B = \left[b_{kj}\right]_{p\times n}$, la matriz $C = A \,.\, B$; se define así :

$$C = A \,.\, B = \left[a_{ik}\right]_{m\times p} \,.\, \left[b_{kj}\right]_{p\times n} = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$$

son iguales

Donde : c_{ij} , es el producto de la "i - ésima" fila de la matriz A, por la "j - ésima" columna de la matriz B. Si A tiene m filas y B tiene n columnas, entonces la matriz C será de orden $m \times n$.

***Propiedad .** Para la multiplicación de dos matrices :* A y B; *se debe tener en cuenta lo siguiente :*

$$(A.B)^{T} = B^{T} \,.\, A^{T}$$

Ejemplo.- *Dadas la matrices :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtener la matriz : $A \,.\, B$ y $B \,.\, A$

Resolución.-

Debemos reconocer que A es una matriz de orden : 2×2 , y, B es una matriz de orden : 2×3. Esto nos permite asegurar que si es posible efectuar el producto matricial : $A \,.\, B$; pues el número de columnas de A es igual al número de filas de B; sin embargo no existe el producto matricial : $B \,.\, A$; pues en este caso el número de columnas de B es diferente al número de filas de A.

Hallemos $C = A \,.\, B$, que poseerá 2 columnas y 3 filas, veamos :

$$A \,.\, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \longleftarrow \text{2 filas} \times \text{3 columnas}$$

3 columnas

2 filas

Donde :

c_{11} : *1ra fila de A por 1ra columna de B* $\Rightarrow$ $c_{11} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 2 + 4 \Rightarrow c_{11} = 6$

c_{12} : *1ra fila de A por 2da columna de B* $\Rightarrow$ $c_{12} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 + 1 \Rightarrow c_{12} = 5$

c_{13} : *1ra fila de A por 3ra columna de B* $\Rightarrow$ $c_{13} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 6 + 2 \Rightarrow c_{13} = 8$

c_{21} : *2da fila de A por 1ra columna de B* $\Rightarrow$ $c_{21} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 3 + 0 \Rightarrow c_{21} = 3$

c_{22} : *2da fila de A por 2da columna de B* $\Rightarrow$ $c_{22} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 6 + 0 \Rightarrow c_{22} = 6$

c_{23} : *2da fila de A por 3ra columna de B* $\Rightarrow$ $c_{23} = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 9 + 0 \Rightarrow c_{23} = 9$

Finalmente, la matriz pedida será : $C = A \,.\, B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

17.5E PROPIEDADES PARA LAS OPERACIONES CON MATRICES

Siendo A , B y C ; matrices y k un escalar, se cumple :

I) $A + B = B + A$ **... conmutatividad**

II) $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$ **... asociatividad**

III) $k\,(A + B) = k \,.\, A + k \,.\, B$ **... distributiva respecto de un escalar**

IV) $A \,.\, B \neq B \,.\, A$ **... en general no existe conmutatividad para el producto matricial.**

V) $C \,.\, (A + B) = C \,.\, A + C \,.\, B$ **... distributiva**

VI) $(A + B) \,.\, C = A \,.\, C + B \,.\, C$

VII) $A \,.\, B \,.\, C = (A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, (B \,.\, C)$ **... asociatividad**

VIII) $0 \,.\, A = 0$ **... elemento neutro**

IX) Si : $A \,.\, B = B \,.\, A$; **se dice que A y B son matrices conmutables.**

X) Si : $A \,.\, B = 0$; **no necesariamente** $A = 0 \vee B = 0$

XI) Si : $A \,.\, B = A \,.\, C$; **no necesariamente** $B = C$

XII) Si : $A = B \Rightarrow A \,.\, C = B \,.\, C \vee C \,.\, A = C \,.\, B$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Calcular : $a + b - c$; **si :** $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 15 & 14 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-21 & a \\ b & a-10 \\ c-15 & c \end{bmatrix}$

A) 26 B) 28 C) 42 D) 54 E) -26

Resolución.-

Efectuando la adición de matrices en el primer miembro, la igualdad dada será :

$$\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 26 & 18 \\ 13 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-21 & a \\ b & a-10 \\ c-15 & c \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices, igualaremos los elementos de igual posición, obteniéndose :

$$a = 28 \text{ , } b = 26 \text{ y } c = 28$$

Finalmente, el valor pedido será : $a + b - c = \boxed{26}$ **RPTA. A**

2.- Si : $\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} a & 6m-2 \\ b & 26n \\ c & 30p \end{bmatrix} = -13 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 3 \\ 1 & -160 \end{bmatrix}$ **, calcular : a , b, c, m, n y p ; indicando como respuesta al mayor de ellos.**

A) -104 B) 104 C) 78 D) -78 E) 113

Resolución.-

Teniendo en cuenta la multiplicación de una matriz por un escalar expuesta en el item 17.5B; la igualdad dada quedará así :

$$\begin{bmatrix} \frac{2a}{3} & \frac{12m-4}{3} \\ \frac{2b}{3} & \frac{52n}{3} \\ \frac{2c}{3} & 20p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -52 & -65 \\ -104 & -39 \\ -13 & 2\,080 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la igualdad de matrices expuesta en el item 17.3, se puede establecer que :

1) $\frac{2a}{3} = -52 \Rightarrow a = -78$ $\wedge$ 2) $\frac{12m-4}{3} = -65 \Rightarrow m = -\frac{191}{12}$

3) $\frac{2b}{3} = -104 \Rightarrow b = -156$ $\wedge$ 4) $\frac{52n}{3} = -39 \Rightarrow n = -\frac{9}{4}$

5) $\frac{2c}{3} = -13 \Rightarrow c = -\frac{39}{2}$ $\wedge$ 6) $20p = 2\,080 \Rightarrow p = 104$

Finalmente; se observa que el mayor de todos los parámetros encontrados es : $p = 104$ **RPTA. B**

3.- Dadas las matrices : $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ***, y ,*** $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ***, hallar la matriz A . B***

A) $\begin{bmatrix} 12 & 10 & 14 & -3 \\ 10 & 28 & 32 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ *B)* $\begin{bmatrix} 12 & 15 & 10 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *C)* $\begin{bmatrix} 18 & 11 & -3 & 13 \\ 14 & 29 & -5 & 11 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 18 & -11 & 3 & -13 \\ 14 & 29 & 5 & -11 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ *E) N.A.*

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 17.5D, la multiplicación de la matriz A por la matriz B si es realizable dado que el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Asi mismo diremosq ue el número de filas de A es 3 y el número de columnas de B es 4, por lo tanto, la matriz : $C = A \cdot B$, será de orden 3×4. Veamos :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \end{bmatrix}$$

Donde :

$C_{11} = (3)(4) + (-2)(-3) = 18 \quad \wedge \quad C_{12} = (3)(5) + (-2)(2) = 11$

$C_{13} = (3)(-1) + (-2)(0) = -3 \quad \wedge \quad C_{14} = (3)(3) + (-2)(-2) = 13$

$C_{21} = (5)(4) + (2)(-3) = 14 \quad \wedge \quad C_{22} = (5)(5) + (2)(2) = 29$

$C_{23} = (5)(-1) + (2)(0) = -5 \quad \wedge \quad C_{24} = (5)(3) + (2)(-2) = 11$

$C_{31} = (0)(4) + (1)(-3) = -3 \quad \wedge \quad C_{32} = (0)(5) + (1)(2) = 2$

$C_{33} = (0)(-1) + (1)(0) = 0 \quad \wedge \quad C_{34} = (0)(3) + (1)(-2) = -2$

Finalmente, la matriz buscada es : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 18 & 11 & -3 & 13 \\ 14 & 29 & -5 & 11 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ **RPTA. C**

4.- Sean : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ***, y ,*** $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ***; si X e Y , son dos matrices de orden 2 × 2, tal que :***

$\begin{cases} x + 2y = A \\ x - y = B \end{cases}$ ***; entonces X es :***

A) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{9}{2} \\ \frac{4}{3} & -7 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{4} & -1 \end{bmatrix}$

Resolución.-

A partir del sistema : $\begin{cases} X+2Y=A & \text{... (I)} \\ X-Y=B & \text{... (II)} \end{cases}$

Efectuando : (I) + 2 (II), se tendrá : $3X = A + 2B \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{3}(A+2B)$ ... (III)

Ahora hallemos la matriz $A + 2B$: $A + 2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ .... (*)

Reemplazando (*) en (III), tendremos : $X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **RPTA. A**

5.- Calcular la suma de los elementos de la primera fila de la matriz : A . (2B - 3C) donde :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},\ y,\ C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

A) -2 *B) 58* *C) -58* *D) 30* *E) 2*

Resolución.-

Primero hallaremos la matriz $2B - 3C$: $2B - 3C = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

A continuación reconocemos que el número de columnas de la matriz A, es igual al número de filas de la matriz ($2B$- $3C$), por lo tanto si es posible efectuar la multipliciación entre ambas matrices. Dado que A tiene dos filas y ($2B$ - $3C$) presenta 2 columnas, concluiremos que la matriz : $D = A \cdot (2B - 3C)$, será de orden : 2×2 . Veamos :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

Donde : $d_{11} = (1)(-4) + (-4)(-5) + (2)(7) \quad \Rightarrow \quad d_{11} = 30$

$d_{12} = (1)(-2) + (-4)(9) + (2)(5) \quad \Rightarrow \quad d_{12} = -28$

$d_{21} = (-1)(-4) + (4)(-5) + (-2)(7) \quad \Rightarrow \quad d_{21} = -30$

$d_{22} = (-1)(-2) + (4)(9) + (-2)(5) \quad \Rightarrow \quad d_{22} = 28$

De este modo la matriz buscada será : $A\,.\,(2B-3C)=\begin{bmatrix}30 & -28\\ -30 & 28\end{bmatrix}$

Finalmente : $\Sigma\, d_{1j} = 30-28 =$ **2** **RPTA. E**

6.- Sean las matrices : $A=\begin{bmatrix}x-3y & x\\ 1 & y\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 6-y\\ 1 & 6-x\end{bmatrix}$ $\wedge$ $C=\begin{bmatrix}-4 & -8\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, ***si :*** $A=B$; ***hallar :*** $3A+2C$

A) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6 & 9\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 7 & 6\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 8 & 9\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 7 & 9\end{bmatrix}$

UNI 94 - II

Resolución.-

Por condición se tiene $A=B$, es decir : $\begin{bmatrix}x-3y & x\\ 1 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6-y\\ 1 & 6-x\end{bmatrix}$

De acuerdo a la igualdad de matrices, se debe cumplir que : $x-3y=2$ ...... (I)

Asi mismo se observará que : $x=6-y$ .... (II)

Resolviendo (I) y (II), obtenemos : $x=5 \;\wedge\; y=1$

Por tal razón la matriz A, será : $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Finalmente; hallemos la matriz pedida $3A+2C$: $3A+2C=3\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-4 & -8\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $3A+2C=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ **RPTA. E**

7.- El siguiente producto matricial : $\begin{bmatrix}2 & 9\\ 4 & 15\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & 11\\ 3 & 10\end{bmatrix}$ ***, equivale a :***

A) $\begin{bmatrix}41 & 112\\ 73 & 195\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}41 & 121\\ 37 & 195\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}41 & 112\\ 73 & 194\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}40 & 110\\ 72 & 196\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}39 & 117\\ 73 & 159\end{bmatrix}$

Resolución.-

Sea C la matriz que se obtiene al efectuar la multiplicación de matrices indicadas, es decir :

$$C=\begin{bmatrix}2 & 9\\ 4 & 15\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & 11\\ 3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}$$

Donde : $C_{11} = (2)(7) + (9)(3) = 41$

$C_{12} = (2)(11) + (9)(10) = 112$

$C_{21} = (4)(7) + (15)(3) = 73$

$C_{22} = (4)(11) + (15)(10) = 194$

Finalmente, la matriz buscada será : $C = \begin{bmatrix} 41 & 112 \\ 73 & 194 \end{bmatrix}$ **RPTA. C**

8.- Dada la siguiente ecuación matricial : $\left(A^T + B\right)^T + 2A - X = 0$; donde :

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, y , $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; encontrar la matriz X para luego indicar al mayor de sus elementos.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 9 E) 11

Resolución.-

Aplicando la propiedad de la transpuesta de una adición de matrices, se obtiene : $\left(A^T\right)^T + B^T + 2A - X = 0$

Y por la 1ra propiedad de la transpuesta, tendremos : $A + B^T + 2A - X = 0$

Reduciendo y transponiendo términos, se consigue : $X = 3A + B^T$ ... (1)

A continuación calcularemos la matriz $3A$: $3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ ... (2)

Asi mismo encontraremos la transpuesta de B : $B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ... (3)

Finalmente; reemplazando (2) y (3) en (1), tendremos : $X = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Efectuando la suma de matrices nos queda : $X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Mayor elemento de la matriz X : **11** **RPTA. E**

9.- Dada la matriz : $A = \left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$ definida así : $a_{ij} \begin{cases} -3 & si \quad i+j<4 \\ i-j & si \quad i+j \geq 4 \end{cases}$; mostrar su forma desarrollada, para luego calcular la suma de todos sus elementos.

A) -6 ***B) -8*** ***C) -10*** ***D) -12*** ***E) -14***

Resolución.-

Para la matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{2\times3}$, su forma desarrollada es : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Por condición del problema, cada uno de los elementos de esta matriz deberá calcularse según la siguiente regla de correspondencia :

$$a_{ij} = \begin{cases} -3 & \text{si } i+j<4 \\ i-j & \text{si } i+j\geq 4 \end{cases}$$

Es decir : $a_{11} = -3$; pues : $1 + 1 = 2 < 4$

$a_{12} = -3$; pues : $1 + 2 = 3 < 4$

$a_{13} = 1 - 3 = -2$; pues : $1 + 3 = 4 \geq 4$

$a_{21} = -3$; pues : $2 + 1 = 3 < 4$

$a_{22} = 2 - 2 = 0$; pues : $2 + 2 = 4 \geq 4$

$a_{23} = 2 - 3 = -1$; pues : $2 + 3 = 5 \geq 4$

Luego, la matriz A será : $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Finalmente; la suma de todos sus elementos es :

$$(-3) + (-3) + (-2) + (-3) + (0) + (-1) = \mathbf{-12}$$

RPTA. D

10.- Sean las matrices : A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix}$***; si A y B son matrices conmutables, calcular el valor de "m + n".***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

De acuerdo con la propiedad IX del item 17.5E, las matrices : A y B serán conmutables, si se cumple que : $A \cdot B = B \cdot A$; es decir :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando cada multiplicación indicada se obtiene : $\begin{bmatrix} 2m-n & -3 \\ 3m+n & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+3 & -m+1 \\ 2n+15 & -n+5 \end{bmatrix}$

Por la igualdad de matrices se debe cumplir que : $-3 = -m + 1 \Rightarrow m = 4$

$8 = -n + 5 \Rightarrow n = -3$

Finalmente el valor pedido será : $m + n = (4) + (-3) = \mathbf{1}$ **RPTA. A**

17.6 MATRICES CUADRADAS

17.6A MATRIZ CUADRADA

De acuerdo a lo expuesto en el item 17.2E, una matriz cuadrada es aquella donde el número de filas es igual al número de columnas. Debemos agregar que una matriz de "n" filas y "n" columnas, tiene por orden a la multiplicación indicada : $n \times n$. Por tratarse de una matriz cuadrada, su orden podrá ser indicado simplemente por n.

Sea A una matriz cuadrada de orden n, es decir, A tiene "n" filas y "n" columnas cuya forma general es como se indica en el recuadro adjunto.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La diagonal trazada de izquierda a derecha (a partir del elemento a_{11} hasta el elemento a_{nn}) recibe el nombre de *Diagonal Principal*, mientras que la diagonal trazada de derecha a izquierda a partir del elemento a_{1n} hasta el elemento a_{n1}, recibe el nombre de *Diagonal Secundaria*.

17.6B TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Recibe este nombre la suma de todos los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada. Para la matriz cuadrada A de orden n , su traza se denota por Traz (A) y se calcula así :

$$\text{Traz}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$$

Ejemplo.- *Calcular Traz (A), si :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Resolución</u>.-

En primer lugar podemos reconocer que la matriz tiene 3 filas y 3 columnas, por lo tanto se trata de una matriz cuadrada y siendo así ,ella posee una Traza. Para calcularla identificamos a todos los elementos de la diagonal principal :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Traz (A) = 2 + 3 + 1 = 6

17.6C PROPIEDADES DE LA TRAZA

Siendo A y B dos matrices cualesquiera y "k" un escalar, se tendrá que :

1ra) Traz ($A + B$) = Traz (A) + Traz (B)

2da) Traz ($k . A$) = k . Traz (A)

3ra) Traz ($A . B$) = Traz ($B . A$)

17.6D POTENCIA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Sean A una matriz cuadrada y $n \in \mathbb{N} / n \geq 2$; entonces se define :

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot A \ldots A}_{\text{"}n\text{" veces}}$$

Ejemplo.- *Dada la matriz :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *; encontrar la matriz :* A^2.

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo a la definición : $A^2 = A \cdot A$, es decir : $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Efectuando la multiplicación de matrices, se obtiene : $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

17.6E PROPIEDADES DE LA POTENCIA

Sean A y B dos matrices y $k, m \wedge n$ escalares, tal que : $k \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{N}^* \wedge n \in \mathbb{N}^*$, se verifica :

1ra) $(k \cdot A)^n = k^n \cdot A^n$

2da) $(A^m)^n = A^{m.n}$

3ra) $A^{m+n} = A^m \cdot A^n = A^n \cdot A^m$

4ta) **Si : A y B son matrices conmutables , A^n y B^n también conmutan.**

17.7) MATRICES CUADRADAS ESPECIALES

17.7A MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Es aquella en la que los elementos ubicados por *debajo* de la diagonal principal son iguales a cero; es decir :

$$a_{ij} = 0 \quad ; \quad \forall\, i > j$$

Ejemplo.- *Una matriz triangular superior de orden 2 ; es :* $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ Diagonal Principal (D.P)

Una matriz triangular superior de orden 3 ; es : $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D.P.)

17.7B MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Es aquella en la que los elementos que están ubicados *encima* de la diagonal principal son iguales a cero, es decir :

$$a_{ij} = 0 \ ; \ \forall i < j$$

Ejemplo.- *Una matriz triangular inferior de orden 2 ; es :* $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ — (D.P.)

Una matriz triangular inferior de orden 3 ; es : $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ — (D.P.)

17.7C MATRIZ DIAGONAL

Es aquella, en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero, es triangular superior e inferior a la vez; es decir :

$$a_{ij} = 0 \ ; \ \forall i > j \wedge i < j$$

Ejemplo.- *Una matriz diagonal de orden 2 ; es :* $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \text{Diag}(2 ; 5)$

Una matriz diagonal de orden 3 ; es : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Diag}(2 ; -1 ; 1)$

17.7D MATRIZ ESCALAR

Es aquella matriz diagonal, en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales a un único número real diferente de cero, es decir :

$$a_{11} = a_{22} = a_{23} = \ \ldots \ = a_{nn} = k \ ; \ \forall k \in \mathbb{R}^*$$

Ejemplo.- *Una matriz escalar de orden 2 es :* $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{Diag}(2 ; 2)$

Una matriz escalar de orden 3 ; es : $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \text{Diag}\left(\sqrt{5} ; \sqrt{5} ; \sqrt{5}\right)$

17.7E MATRIZ IDENTIDAD

Es aquella matriz escalar, en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.

La matriz identidad de orden *n* se denota así : I_n

Ejemplo.- *La matriz identidad de orden 2 es :* $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz identidad de orden 3 ; es : $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propiedades . *Considerando a una matriz A y a la matriz identidad I, de igual orden que la matriz A; se cumple :*

1ra) $A \cdot I = I \cdot A = A$

2da) $I^m = I \quad ... \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$

17.7F MATRIZ SIMETRICA

Si A es una matriz simétrica, entonces ésta debe ser igual a su transpuesta; es decir :

$$\textbf{Si : } A = A^T \Rightarrow A \textbf{ es simétrica}$$

Ejemplo.- *La matriz :* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *es simétrica, pues :*

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Tener en cuenta que si una matriz A es simétrica; los elementos a_{ij} verifican que : $a_{ij} = a_{ji}$

$$\text{La matriz : } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Eje de simetría

Es simétrica pues se verifica que : $a_{ij} = a_{ji}$

17.7G MATRIZ ANTISIMETRICA

También llamada matriz hemisimétrica; se dice que una matriz es antisimétrica; si ésta es igual a la negativa de su transpuesta, es decir :

$$\textbf{Si : } A = -A^T \Rightarrow A \textbf{ es antisimétrica}$$

Ejemplo.- *La matriz :* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ *es antisimétrica, pues :*

$$-A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Tengase en cuenta que si una matriz A es antisimétrica; todos los elementos de su diagonal principal son iguales a cero y los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son opuestos o en forma equivalente : $a_{ij} = -a_{ji}$

La matriz : $A = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -15 \\ 12 & 0 & -8 \\ 15 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ → D.P.

Es antisimétrica, pues los elementos simétricos son opuestos entre si y la diagonal principal (D.P) está compuesta por elementos nulos.

17.7H MATRIZ INVOLUTIVA

Se dice que una matriz es involutiva si su cuadrado es igual a la matriz identidad; es decir :

Si : $A^2 = I \Rightarrow A$ es involutiva

17.7I MATRIZ NILPOTENTE

Se dice que una matriz es nilpotente si su cuadrado es igual a la matriz nula (cero); es decir :

Si : $A^2 = 0 \Rightarrow A$ es nilpotente

17.7J MATRIZ IDEMPOTENTE

Se dice que una matriz es idempotente si ésta es igual a su cuadrado; es decir :

Si : $A^2 = A \Rightarrow A$ es idempotente

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

11.- Si M es una matriz triangular inferior : $M = \begin{bmatrix} a+b & a+6 & b+9 \\ a-b & 2a & a+b+15 \\ 2a-b & 4b & 7a \end{bmatrix}$ ***, calcular "a - b".***

A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 7* *E) 9*

<u>Resolución</u>.-

Como M es una matriz triangular inferior, se debe cumplir que todos los elementos ubicados por encima de la diagonal principal, son iguales a cero. Por tal razón se puede establecer que :

1) $a + 6 = 0 \Rightarrow a = -6$

2) $b + 9 = 0 \Rightarrow b = -9$

3) $a + b + 15 = 0$

Finalmente el valor pedido será : $a - b = -6 - (-9) = \boxed{3}$ **RPTA. B**

12.- Siendo : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **, y,** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **, calcular : Traz (A . B) + Traz (B . A)**

A) 12 B) -12 C) 0 D) 11 E) -11

Resolución.-

Sea T el valor pedido ; es decir : $T = \text{Traz}(A \,.\, B) + \text{Traz}(B \,.\, A)$

De acuerdo con la 3ra propiedad de las trazas expuesta en el item 17.6C, se tendrá : $T = 2\,\text{Traz}(A \,.\, B)$ ... (1)

A continuación hallaremos el producto matricial $A \,.\, B$:

$$A \,.\, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Debemos tener en cuenta que para calcular la traza de $A \,.\, B$, solo es necesario hallar los elementos de su diagonal principal : C_{11} ; C_{22} $\wedge$ C_{23}. Por tal razón tendremos :

$$C_{11} = (1)(1) + (-1)(2) + (1)(1) = 0$$

$$C_{22} = (-3)(2) + (2)(4) + (-1)(2) = 0$$

$$C_{33} = (-2)(3) + (1)(6) + (0)(3) = 0$$

De este modo diremos que : $\text{Traz}(A \,.\, B) = C_{11} + C_{22} + C_{33} = 0$ ..... (2)

Finalmente reemplazando (2) en (1), se tendrá : $T = 2(0) =$ **0** **RPTA. C**

13.- Calcular el valor de "m - n + p", si : $A = \begin{bmatrix} a-8 & p-b & m-a \\ a-5 & b+9 & n-b \\ 5-a & b-2 & -2c+5 \end{bmatrix}$ **, es una matriz diagonal.**

A) 5 B) 3 C) 1 D) 7 E) 9

Resolución.-

De acuerdo a lo expuesto en el item 17.7C, si A es una matriz diagonal, se cumplirá que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son iguales a cero. Esto significa que :

1) $a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5$ 2) $b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$

3) $p - b = 0 \Rightarrow p = b$ 4) $m - a = 0 \Rightarrow m = a$

5) $n - b = 0 \Rightarrow n = b$

Resolviendo encontramos que : $m = 5 \quad \wedge \quad n = 2 \quad \wedge \quad p = 2$

Finalmente el valor pedido será : $m - n + p = 5 - 2 + 2 =$ **5**   ***RPTA. A***

14.- Dadas las matrices : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ ***y*** $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ***; calcular :*** $(A + B)^2$

A) 5 I   ***B) 4 I***   ***C) 3 I***   ***D) 2 I***   ***E) I***

Resolución.-

En primer lugar calcularemos : $A + B$:
$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Efectuando la adición, obtendremos :
$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ..... (*)$$

De (*) se puede observar que : $A + B = I$

Elevando al cuadrado a ambos miembros, se consigue : $(A + B)^2 = I^2$

Finalmente debemos recordar que $I^2 = I$, por lo tanto : $(A + B)^2 =$ ***I***   ***RPTA. E***

15.- Calcular : "r - s + t" si la matriz : $\begin{bmatrix} r-4 & \frac{a}{3} & b-10 \\ \frac{a}{2} & s-8 & 10-s \\ 6-r & r+s-16 & t-9 \end{bmatrix}$ ***, es escalar.***

A) 1   ***B) 3***   ***C) 5***   ***D) 7***   ***E) 9***

Resolución.-

Se sabe que una matriz es escalar si además es una matriz diagonal, por lo cual debe cumplirse que :
$$6 - r = 0 \Rightarrow r = 6$$
$$10 - s = 0 \Rightarrow s = 10$$

Asi mismo una matriz escalar se caracteriza porque los elementos de su diagonal son iguales entre si aun mismo número real diferente de cero. Por lo tanto se puede establecer que :
$$r - 4 = \underbrace{s - 8 = t - 9} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - 8 = t - 9 \Rightarrow t = 11$$

Finalmente el valor pedido será : $r - s + t = 6 - 10 + 11 =$ **7**   ***RPTA. D***

16.- Dada la matriz : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ***, hallar la suma de los elementos de*** A^{40}

A) 6^{13} ***B)*** 6^{14} ***C)*** 6^{15} ***D)*** 6^{16} ***E)*** 6^{12}

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en formar la potencia : A^{40} a partir de A; así :

1) $$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

De este último resultado podemos observar que : $A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I}$

De esta última expresión reconocemos que : $A^3 = 6\,I$

Elevando ambos miembros al exponente 13, se obtiene : $\left(A^3\right)^{13} = (6 \cdot I)^{13}$

Aplicando las propiedades para la potencia , se tendrá : $A^{39} = 6^{13}\, I^{13} = 6^{13}\, I$ .....(I)

Recordar que la matriz buscada es : A^{40} : $A^{40} = A \cdot A^{39}$ .....(II)

Reemplazando (I) en (II) se consigue : $A^{40} = A \cdot 6^{13} I = 6^{13} \cdot \underbrace{A \cdot I}_{A}$

Aplicando la 1ra propiedad expuesta en el item 17.7E, en el producto indicado, tendremos : $A^{40} = 6^{13}\, A = 6^{13} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Finalmente la suma pedida será : Σ Elementos de $A^{40} = 6^{13}\,(1+2+3) =$ $\mathbf{6^{14}}$ **RPTA. B**

17.- Si : $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, encontrar la matriz : $E = A + 2A + 3A + ... + nA$; $n \in \mathbb{N}^*$. Indicar por respuesta la suma de sus elementos.

A) 0 B) 1 C) n (n+1) D) 2n (n+1) E) $\frac{n}{2}$ (n+1)

Resolución.-

Teniendo en cuenta la multiplicación de una matriz por un escalar, en la expresión dada podemos factorizar la matríz A , obteniéndose :

$$E = (1 + 2 + 3 + ... + n) . A$$

Reconociendo la suma de los n primeros números naturales, tendremos :

$$E = \frac{n\,(n+1)}{2} . A$$

Sustituyendo A por su equivalente matricial :

$$E = \frac{n\,(n+1)}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación indicada, obtenemos :

$$E = \begin{bmatrix} -n(n+1) & 0 \\ 2n(n+1) & -n(n+1) \end{bmatrix}$$

Finalmente, se observa que la suma de los elementos de la matriz E es igual a :

$\Sigma\, a_{ij}$ = cero **RPTA. A**

18.- Dada la matriz : $M = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$, la matriz $M^{1\,003}$ es :

A) $\alpha^{1\,003} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\alpha^{1\,003} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\alpha^{1\,003} . \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

D) $\alpha^{1\,003} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\alpha^{1\,003} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ UNI 97 - II

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en formar la potencia $M^{1\,003}$ a partir de M tal como hicimos en el Prob. 16; de este modo tendremos :

$$M^2 = M . M = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación indicada , tendremos :

$$M^2 = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Extrayendo factor común α^2 , nos queda :

$$M^2 = -\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reconociendo a la matriz identidad , nos queda : $M^2 = -\alpha^2 . I$

Elevando a ambos miembros al exponente 501 : $\left(M^2\right)^{501} = \left(-\alpha^2 . I\right)^{501}$

En base a las propiedades para la potencia, se tendrá : $M^{1\,002} = -\alpha^{1\,002} . I^{501}$

Aplicando la 2da propiedad de la matriz identidad : $M^{1\,002} = -\alpha^{1\,002} . I$ ...(1)

La matriz buscada es : $M^{1\,003} = M . M^{1\,002}$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) ,se consigue : $M^{1\,003} = M . -\alpha^{1\,002} . I$

Agrupando convenientemente ,tendremos : $M^{1\,003} = -\alpha^{1\,002} . \underbrace{M . I}$

Aplicando la 1ra propiedad (I) expuesta en el item 17.7E en el producto indicado, obtenemos : $M^{1\,003} = -\alpha^{1\,002} . M$

Sustituyendo M por su equivalente matricial : $M^{1\,003} = -\alpha^{1\,002} . \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$

Extrayendo factor común -α de la matriz ,nos queda: $M^{1\,003} = -\alpha^{1\,002} . -\alpha . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Finalmente; la matriz buscada será : $M^{1\,003} = \boxed{\alpha^{1\,003} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$ **RPTA. B**

19.- Si la matriz : $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix}$ ***, es idempotente ; calcular : "n - m".***

A) 5 *B) 4* *C) 3* *D) 2* *E) 1*

Resolución.-

De acuerdo a lo expuesto en el item 17.7J; si A es una matriz idempotente se debe cumplir que : $A^2 = A$; de esto nuestra estrategia consistirá en multiplicar a la matriz A por si misma , y luego proceder a una igualdad de matrices. Veamos :

Indicamos la multiplicación de matrices : $\begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix}$

Efectuando la multiplicación, se tiene : $\begin{bmatrix} 4+m & 2m+mn \\ 2+n & m+n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix}$

Por igualdad de matrices, se cumple : $4 + m = 2 \Rightarrow m = -2$

$2 + n = 1 \Rightarrow n = -1$

Finalmente; el valor pedido es : $n - m = 1$ **RPTA. E**

20.- Dada la matriz : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ***, ella se puede expresar como la suma de una matriz simétrica B y otra antisimétrica C; luego la matriz C es :***

A) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Resolución.-

Por condición se plantea : $A = B + C$ ..... (I)

Tomando transpuesta a ambos miembros : $A^T = (B + C)^T$

Aplicando propiedad de transpuesta : $A^T = B^T + C^T$ .....(II)

Por condición se sabe que B es simétrica, luego : $B = B^T$ ......(III)

Asimismo se sabe que C es antisimétrica , por tanto : $C = -C^T$ ....(IV)

Luego, reemplazando (III) y (IV) en (I) se obtiene : $A = B^T - C^T$ .....(V)

Ahora efectuando la siguiente diferencia : (II) - (V) se tendrá : $A^T - A = 2\,C^T$

Tomando transpuesta a ambos miembros : $\left(A^T - A\right)^T = \left(2C^T\right)^T$

Aplicando propiedad de transpuesta : $A - A^T = 2C$

Despejando C , se obtiene : $C = \frac{1}{2}\,(A - A^T)$ .....(VI)

Del dato encontramos la transpuesta de A y planteamos : $A - A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Efectuando la diferencia de matrices , nos queda : $A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .....(VII)

Finalmente reemplazando (VII) en (VI) se obtiene : $C = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

RPTA. A

Observación . *En general, toda matriz cuadrada A se puede expresar como la adición de una matriz simétrica con otra antisimétrica; es decir :*

$A = B + C$ donde : $B = \frac{1}{2}\,(A + A^T)$ y $C = \frac{1}{2}\,(A - A^T)$

17.8) DETERMINANTES

El determinante es una *regla funcional* que aplicada a una *matriz cuadrada*, la transforma en un escalar. Frecuentemente, al determinante de una matriz cuadrada A se le denota así :

$$\boxed{\textbf{Determinante de } A = \det(A) = |A|}$$

Observación . *El orden de una matriz cuadrada será igual al orden de su determinante.*

17.8A DETERMINANTE DE 1er ORDEN

Llamamos así al determinante de una matriz de orden 1. El valor del determinante coincide con el valor del único elemento que posee la matriz, es decir:

Para la matriz : $A = [\alpha]$, su determinante será : $|A| = \alpha$

Ejemplo.- *Dada la matriz :* $A = [-2]$, *su determinante :*

se denota así : $|A| = |-2|$, *y su valor correspondiente es :* $|A| = -2$

17.8B DETERMINANTE DE 2do ORDEN

Sea la matriz cuadrada : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces ,

su determinante se denota así : $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

El valor de este determinante se calcula según la siguiente relación :

$$|A| = \begin{pmatrix} \text{producto de todos los} \\ \text{elementos de la diago-} \\ \text{nal principal} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{producto de todos los} \\ \text{elementos de la diago-} \\ \text{nal secundaria} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{22}}$$

Ejemplo.- *Calcular el determinante de la siguiente matriz :* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

<u>Resolución</u>.-

Se pide : $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, de acuerdo a la definición establecida, el valor pedido será :

$$|A| = 3 \cdot 6 \ - \ 4 \cdot 2 = 18 - 8 \ \Rightarrow \ |A| = 10$$

17.8C DETERMINANTE DE 3er ORDEN

Sea la matriz : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, su determinante se denota así :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El valor de este determinante se calcula según *La Regla de Sarrus*; la cual consiste en repetir la primera y segunda fila, a continuación de la tercera para luego multiplicar los elementos de la diagonal principal al igual que el de sus dos paralelas siguientes. Los productos así obtenidos, se sumarán y darán como resultado un valor : M.

También se multiplicarán los elementos de la diagonal secundaria al igual que el de sus dos paralelas siguientes, los productos así obtenidos se sumarán y darán como resultado un valor : N.

Finalmente; el determinante será el valor que se obtenga al efectuar : $\boldsymbol{M - N}$

Ejemplo.- *Calcular el determinante de la siguiente matriz* : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo a la Regla de Sarrus, el determinante se calcula así :

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & 3 & 2 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & 2 & 1 & 1 & & & \\
1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 & \Rightarrow & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & \Leftarrow & 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \\
1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 & \Rightarrow & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Leftarrow & 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\
1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 & \Rightarrow & 2 & & & & 4 & \Leftarrow & 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \\
 & & \Sigma = 7 & & & & \Sigma = 8 & &
\end{array}$$

Finalmente : $|A| = 8 - 7 = 1$

17.8D PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

I) $|A + B| \neq |A| + |B|$

II) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

III) $|A| = |A^T|$

IV) $|A^n| = |A|^n \; ; \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

V) **Si :** $B = k \cdot A = [k \cdot a_{ij}] \Rightarrow |B| = |k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; **donde** k **es un escalar y** n **el orden de la matriz** A

VI) **Si los elementos de dos filas, o, columnas son proporcionales entre sí, entonces el determinante de la matriz es igual a cero.**

VII) **Si todos los elementos de una fila, o, columna son ceros, el determinante de la matriz es igual a cero.**

VIII) **Si todos los elementos de una fila, o, columna se multiplican por un mismo número** k**, el determinante de la matriz queda multiplicado por** k**.**

IX) Si se permutan dos filas, o, columnas el determinante cambia de signo.

X) El determinante no varía si a todos los elementos de una de sus filas, o, columnas, se le suma el múltiplo de otra fila, o, columna.

Observaciones :

1ra. *El determinante de las siguientes matrices : triangular superior, triangular inferior y diagonal; es igual al producto que se obtiene al multiplicar todos los elementos de su diagonal principal.*

2da. *Teniendo en cuenta la definición de un determinante, se podrán considerar dos matrices cuadradas especiales más.*

a) Matriz Singular . *Es aquella, cuyo determinante es igual a cero; es decir :*

$$\textbf{Si } |A| = 0 \Rightarrow A \textbf{ es singular}$$

b) Matriz No Singular . *También llamada : Matriz Regular; es aquella cuyo determinante es diferente de cero, es decir :*

$$\textbf{Si } |A| \neq 0 \Rightarrow A \textbf{ es no singular}$$

17.9) MATRIZ DE COFACTORES Y MATRIZ ADJUNTA

17.9A MENOR DE UN ELEMENTO

Si A es una matriz cuadrada de orden n; entonces el menor del elemento : a_{ij} se denota por M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz de orden (n-1) de la matriz A, el cual se forma suprimiendo todos los elementos de la fila i y todos los elementos de la columna j.

Ejemplo.- *Para la matriz :* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

El menor del elemento a_{11}; es : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

El menor del elemento a_{23}; es : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

17.9B COFACTOR DE UN ELEMENTO

Si A es una matriz cuadrada de orden n, el cofactor del elemento a_{ij} se denota por C_{ij} y se define así :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Ejemplo.- *Para la matriz :* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *, se tiene que :*

El cofactor del elemento a_{11}; es : $C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

El cofactor del elemento a_{23}; es : $C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

***Observación .** El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila, o, columna, por sus respectivos cofactores.*

17.9C MATRIZ DE COFACTORES

Si A es una matriz cuadrada de orden n, se define la *Matriz de Cofactores de A* y se denota por : **cofact (A)**, a aquella matriz que tiene por elementos a cada uno de los cofactores de todos los elementos de la matriz A.

Ejemplo.- *Si :* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ *, encontrar cofact (A)*

Resolución.-

La matriz pedida es : $\text{cofact}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$ ... (1)

Donde : $C_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (1)(2-10) = -8$

$C_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2-6) = 4$

$C_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (1)(10-6) = 4$

$C_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(4+5) = -9$

$C_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1+3) = 4$

$C_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(5-12) = 7$

$$C_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1)(8+2) = 10$$

$$C_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2+2) = -4$$

$$C_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2-8) = -6$$

Finalmente; reemplazando cada cofactor en (I) se tendrá : $\text{cofact}(A) = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ -9 & 4 & 7 \\ 10 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

17.9D MATRIZ ADJUNTA

Si A es una matriz cuadrada de orden n; se define : Matriz Adjunta de A y se denota por Adj (A) a la transpuesta de la matriz de cofactores de la matriz A; es decir :

$$\text{Adj}(A) = \{\text{cofact}(A)\}^T$$

17.10) MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz cuadrada no singular, se denota por A^{-1}, a la matriz inversa de A y es tal que :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = \text{Matriz identidad}$$

La matriz inversa se define así : $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A) \quad ; \quad |A| \neq 0$$

Observación . *Si A es una matriz cuadrada no singular ($|A| \neq 0$), entonces se dice que A posee inversa y podrá ser llamada Matriz Inversible. Si A es una matriz cuadrada singular ($|A| = 0$), no posee inversa.*

17.10A PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA

Siendo A y B matrices, $k \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{N}^*$:

I) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

II) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

III) $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$

IV) $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$

V) $A^{m} \cdot A^{-m} = I$

VI) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

17.10B REGLA PRACTICA PARA ENCONTRAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN 2

Sea la matriz no singular : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces su inversa será :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Ejemplo.- *Encontrar la inversa de la siguiente matriz* : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

Resolución.-

Hallemos el determinante de la matriz A : $|A| = 3 \,.\, 4 - 7 \,.\, 2 = 12 - 14 \Rightarrow |A| = -2$

Luego; su inversa será : $A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

17.11) ECUACION MATRICIAL

Siendo A y B dos matrices conocidas y X una *matriz incógnita*, se define como una ecuación matricial a la siguiente igualdad :

$$A \,.\, X = B \quad ; \quad |A| \neq 0$$

donde para encontrar la matriz incógnita X se siguen los siguientes pasos :

1er) Se multiplica a ambos miembros de la igualdad por la inversa de la matriz A :

$$A \,.\, X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \,.\, A \,.\, X = A^{-1} \,.\, B$$

2do) Se utiliza propiedad de la matriz inversa :

$$\underbrace{A^{-1} . A}_{I} \,.\, X = A^{-1} \,.\, B \quad \Rightarrow \quad I \,.\, X = A^{-1} \,.\, B$$

Finalmente la solución de la ecuación matricial dada es : $X = A^{-1} \,.\, B$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

21.- Sea : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, cual de las siguientes proposiciones es falsa :

A) $A^n = I$, para todo n par ($n \in \mathbb{N}$)

B) $A^n = A$, para todo n impar ($n \in \mathbb{N}$)

C) det = (A^n) $\neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$

D) det = ($I + A^n$) $\neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$

E) det = ($I - A^n$) = 0, para todo $n \in \mathbb{N}$

UNI 93 - II

Resolución.-

Dado que todas las proposiciones contienen una cuestión teórica , será conveniente analizar cada una de ellas hasta encontrar a la proposición falsa, para ello será necesario determinar la matriz A^2.

Hallemos $A^2 = A \,.\, A$, de la siguiente forma : $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Efectuando las operaciones indicadas : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Este resultado nos permite afirmar que : $A^2 = I$ ... (I)

Proposición (A) : Es verdadera $A^n = I$, $\forall\, n$ par ($n \in \mathbb{N}$)

Sea n un número natural par, tal que : $n = 2k$, luego : $A^n = A^{2k} = \left(A^2\right)^k$ ... (II)

De (I) en (II) se podrá establecer que : $A^n = (I)^k \Rightarrow A^n = I$

En consecuencia la proposición A es verdadera.

Proposición *B* : Es verdadera $A^n = A$, $\forall\, n$ impar ($n \in \mathbb{N}$)

Sea : n un número natural impar ,tal que : $n = 2k + 1$, entonces : $A^n = A^{2k+1} = A^{2k} \,.\, A$

Acomodando , tendremos : $A^n = \left(A^2\right)^k . A$ ... (III)

Reemplazando (I) en (III) se podrá establecer que : $A^n = (I)^k . A \Rightarrow I \,.\, A \Rightarrow A^n = A$

Proposición *C* : Es verdadera det (A^n) $\neq 0$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Según la IV Propiedad de los determinantes , se tiene : det (A^n) = {det (A)}^{n}

Ahora hallemos det (A) : det (A) = $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ = (0)(0)- (-1)(-1) = -1

Siendo $n \in \mathbb{N}$, diremos que : $\det(A^n) = \{\det(A)\}^n = \{-1\}^n \neq 0$

Proposición *D* : Es falsa $\det(I + A^n) \neq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Aquí se presentan 2 casos :

1er Caso : Si n es un número par , según lo analizado en la proposición A ,se sabe que : $A^n = I$

Luego : $\det(I + A^n) = \det(2I) = 4$

De esto se puede concluir que : $\det(I + A^n) \neq 0$ ... (α)

2do Caso : Si n es un número impar,según lo analizado en la proposición B se sabe que : $A^n = A$

Luego : $\det(I + A^n) = \det(I + A)$ ... (β)

Tener en cuenta que : $I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

De aqui se deduce que : $\det(I + A) = (1)(1) - (-1)(-1) = 0$,

Reemplazando en (β) se tendrá : $\det(I + A^n) = \det(I + A) = 0$ ... (θ)

Finalmente de (α) y (θ) se establece que : $\det(I + A^n) = 0$

Proposición *E* : Verdadera $\det(I - A^n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Aquí también se presentan 2 casos pero en ambos casos se obtiene : $\det(I - A^n) = 0$

En consecuencia la proposición D es la única falsa. **RPTA. D**

22.- Luego de hallar la matriz de cofactores de M ; indicar la suma de sus elementos.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

A) 8 ***B) 10*** ***C) 12*** ***D) 6*** ***E) 14***

Resolución.-

Teniendo en cuenta lo expuesto en el item 17.9C; la matriz de cofactores de M se denota así : cofact (M) y es tal que :

$$\text{cofact}(M) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Donde :

$$C_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35 \qquad C_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -21 \qquad C_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$C_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 15 \quad \wedge \quad C_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2 \quad \wedge \quad C_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad \wedge \quad C_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \quad \wedge \quad C_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

Es decir : $\text{cofact}(M) = \begin{bmatrix} 35 & -21 & -14 \\ 15 & -2 & -8 \\ -20 & 12 & 13 \end{bmatrix}$

Finalmente : Σ elementos = **10** **RPTA. B**

23.- Del problema anterior, calcular : Traz (M^{-1})

A) $\frac{46}{35}$ *B)* $\frac{44}{35}$ *C)* $\frac{41}{35}$ *D)* $\frac{47}{35}$ *E)* $\frac{49}{35}$

Resolución.-

Debemos tener en cuenta que para calcular : Traz (M^{-1}) será necesario encontrar a la matriz inversa : M^{-1}. De acuerdo a lo expuesto en el item 17.10, la matriz inversa de M se define así :

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \text{Adj}(M) \qquad \text{...(I)}$$

Donde por definición se sabe que : $\text{Adj}(M) = \{\text{cofact}(M)\}^T$ ... (II)

Según el problema anterior : $\text{cofact}(M) = \begin{bmatrix} 35 & -21 & -14 \\ 15 & -2 & -8 \\ -20 & 12 & 13 \end{bmatrix}$

Ahora deducimos la transpuesta : $\{\text{cofact}(M)\}^T = \begin{bmatrix} 35 & -21 & -14 \\ 15 & -2 & -8 \\ -20 & 12 & 13 \end{bmatrix}^T$

Efectuando y de (II), concluímos que : $\text{Adj}(M) = \begin{bmatrix} 35 & 15 & -20 \\ -21 & -2 & 12 \\ -14 & -8 & 13 \end{bmatrix}$ ...(III)

Hallemos $|M|$ utilizando para ello la observación dada en el item 17.9B y la matriz original para M, considerando en estede caso la 3ra columna :

$$|M| = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Efectuando los calculos parciales de cada determinante , encontramos : $|M| = 4 \cdot (-14) + 7\,(13) = -56 + 91$

finalmente se obtiene : $|M| = 35$ ....(IV)

Luego, reemplazando (III) y (IV) en (I) se tendrá : $M^{-1} = \frac{1}{35} \cdot \begin{bmatrix} 35 & 15 & -20 \\ -21 & -2 & 12 \\ -14 & -8 & 13 \end{bmatrix}$

Efectuando la multiplicación indicada se tendrá : $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{12}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{8}{35} & \frac{13}{35} \end{bmatrix}$

Finalmente la traza de M estará dada así : $\text{Traz}(M^{-1}) = 1 - \frac{2}{35} + \frac{13}{35} = \frac{46}{35}$ **RPTA. A**

24.- Si : $x \in \mathbb{R}^2$ es solución de la ecuación matricial : A . X = B ; calcular : Traz (X^T . B) , donde :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 1/2* *UNI 95 - II*

Resolución.-

De la ecuación dada , su solución es : $X = A^{-1} . B$ ....(1)

Hallemos $|A|$ a partir del dato : $|A| = (1)(1) - (2)(1) = -1$ .....(*)

Ahora determinaremos A^{-1} : $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj}(A)$ ....(**)

Utilizando la regla practica expuesta en el item 17.10B y reemplazando (*) en (**) : $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Efectuando la multiplicación indicada : $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ....(2)

Reemplazando (2)en (1), se tendrá : $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ahora es necesario encontrar la transpuesta de X: $X^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$

A continuación calculamos : $X^T . B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [1]$

Finalmente obtenemos la traza de esta matriz:: $\text{Traz}(X^T . B) = 1$ **RPTA. B**

25.- Resolver : $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0$

A) 1 ***B) 2*** ***C) -1*** ***D) -2*** ***E) 3***

Resolución.-

Teniendo en cuenta lo expuesto en el item 17.8.B, el determinante dado está referido a una matriz de 2^{do} orden y esta se desarrolla así :

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x - 1)(4x + 2) - (2x + 1)(x + 1)$$

Por condición del problema : $(2x - 1)(4x + 2) - (2x + 1)(x + 1) = 0$

Efectuando en el primer miembro, se consigue : $(8x^2 - 2) - (2x^2 + 3x + 1) = 0$

Quitando los paréntesis ,reduciendo y simplificando : $2x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore$ Resolviendo esta ecuación, obtenemos : $x_1 = -1/2$; $x_2 =$ **1** **RPTA. A**

26.- A es una matriz de orden 3, si se intercambian la primera y tercera fila ,se obtiene la matriz A_0; en A_0 a la primera fila se le multiplica por 3 y a la tercera por 2 obteniéndose la matriz A_1 de manera que : det $(A_1) = 66$. Hallar : det (A^{-1})

A) -11 ***B) $-\frac{1}{11}$*** ***C) $\frac{1}{33}$*** ***D) 11*** ***E) $\frac{1}{6}$*** ***UNI 96 - I***

Resolución.-

Sea la matriz de 3^{er} orden : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ... (I)

Haciendo el intercambio de la 1^{ra} fila por la 3^{ra} : $A_0 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ ... (II)

Por condición se sabe que si multiplicamos por 3 a la 1^{ra} fila y por 2 a la 3^{ra} fila , obtenemos : $A_1 = \begin{bmatrix} 3(a_{13}) & 3(a_{32}) & 3(a_{33}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2(a_{11}) & 2(a_{12}) & 2(a_{13}) \end{bmatrix}$ ...(III)

Ahora, al calcular el determinante de la matriz A_1,extraemos factor común 3 y 2 :, obteniéndose : $\det(A_1) = (3 \cdot 2)\begin{vmatrix} a_{13} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

Ahora, intercambiando la 1ra y la 3ra fila , obtenemos : $\det(A_1) = -(3 \cdot 2)\det(A)$ ....(*)

Reemplazando el dato en (*) : $66 = -6\det(A)$

Simplicando logramos determinar que : $\det(A) = -11$ ....(1)

Ahora para calcular el **det** (A^{-1}) , util;izaremos la VI Propiedad de la Matriz Inversa vista en el item 17.10A : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ ....(2)

Finalmente reemplazamos (1) en (2): $\det(A^{-1}) = -\dfrac{1}{11}$ **RPTA. B**

27.- Sea A una matriz de orden 2×2 con $A^2 = B$, donde : $b_{21} = 0 \wedge a_{21} \neq 0$. Si : Traz (B) = $b_{11} + b_{22}$, entonces el valor de : Traz (B) + 2 det (A) , es :

A) -1	*B) 0*	*C) 1*	*D) 2*	*E) 3*	*UNI 96 - II*

Resolución.-

Sea esta la matriz para A: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ....(1)

Luego su determinante será : $\det(A) = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$

Por condición se debe cumplir que : $B = A^2 = A \cdot A$ ....(2)

Reemplazando (1) en (2) ,y efectuando la multiplicación de matrices , se obtendrá :

$$B = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12} \cdot a_{21} & a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} \\ \underbrace{a_{21} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{21}}_{b_{21}} & a_{21}\,a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Por condición : $b_{21} = 0$, es decir : $a_{21} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{21} = 0$

Sacando factor común a_{21}, tendremos : $a_{21}(a_{11} + a_{22}) = 0$

Por condición : $a_{21} \neq 0$; luego se deduce que : $a_{11} + a_{22} = 0$ ....(*)

Asimismo se pide : $N = \text{Traz}(B) + 2\det(A)$

Aplicando la definición de traza para B y de determinante para A , tendremos :

$$N = \left(a_{11}^2 + a_{12} \cdot a_{21} + a_{21} \cdot a_{12} + a_{22}^2\right) + 2\left(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}\right)$$

Reduciendo, se obtiene : $N = a_{11}^2 + 2a_{11} \cdot a_{22} + a_{22}^2 = (a_{11} + a_{22})^2$ .... (**)

Finalmente, reemplazamos (*) en (**) concluyendose que : $N = 0$ **RPTA. B**

28.- Sean : a , b , c ; números reales positivos, entonces el valor de x tal que :

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0 \text{ ; es :}$$

A) $\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$ *B)* $-\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$ *C)* $-\dfrac{abc}{a+b+c}$ *D)* $\dfrac{abc}{a+b+c}$ *E) abc*

UNI 97 - I

Resolución.-

Por lo expuesto en la propiedad X del item 17.8D; el determinante no se altera si a la primera fila restamos la segunda , luego nos queda :

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0$$

A continuación escogemos la primera fila para desarrollar el determinante en aplicación de lo expuesto en la observación del item 17.9B.

$$a\begin{vmatrix} b+x & x \\ x & c+x \end{vmatrix} -(-b)\begin{vmatrix} x & x \\ x & c+x \end{vmatrix} = 0$$

Efectuando, se tendrá : $a\,(bc + bx + cx + x^2 - x^2) + b\,(cx + x^2 - x^2) = 0$

Reduciendo nos queda : $a\,(bc + bx + cx) + b\,(cx) = 0$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $abc + abx + acx + bcx = 0$

Transponiendo términos y factorizando x, se consigue : $(ab + ac + bc)\,x = -abc$

Finalmente al despejar se obtiene : $x = -\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$ **RPTA. B**

29.- Sean las matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ ***. Encontrar :***

u + v + w + x + y + z ; si se cumple que : A . B = I (I es la matriz identidad)

A) 21 *B) 20* *C) 18* *D) 15* *E) 7* ***UNI 97 - I***

Resolución.-

Por condición del problema se sabe que : $A \,.\, B = I$ ....(*)

Reemplazando los datos en (*) : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Efectuando la multiplicación de matrices del primer miembro, se consigue :

$$\begin{bmatrix} u & v-x & w-y+z \\ 0 & \frac{x}{2} & \frac{y}{2}-z \\ 0 & 0 & \frac{z}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices :

1) $u = 1$

2) $v - x = 0 \Rightarrow v = x$

3) $w - y + z = 0 \Rightarrow w = y - z$

4) $\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$

5) $\frac{y}{2} - z = 0 \Rightarrow y = 2z$

6) $\frac{y}{4} = 1 \Rightarrow z = 4$

Resoviendo estas ecuaciones , se tendrá : $u = 1$; $v = x = 2$; $y = 8$; $z = 4 \wedge w = 4$

Finalmente : $u + v + w + x + y + z =$ **21** RPTA. A

30.- Sea la matriz : $H = \begin{bmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ ***tal que : det (H) = 4 ; luego :*** H^2 ***es :***

A) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *B)* $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ *C)* $\begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ *D)* $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ *E)* $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

UNI 97 - II

Resolución.-

Hallemos : det (H): $\quad \det(H) = \begin{vmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = x^2 + 3x$

Por condición : det (H) = 4 , luego (*) quedará así : $x^2 + 3x = 4$

Transponiendo términos , se establece que : $x^2 + 3x - 4 = 0$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene : $x_1 = 1 \vee x_2 = -4$

Luego ,si : $x = 1 \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H^2 = H \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Si : $x = -4 \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H^2 = \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-268} & \mathbf{-51} \\ \mathbf{68} & \mathbf{-13} \end{bmatrix}$

RPTA. B

17.12) DEFINICIONES ADICIONALES

17.12A MATRIZ DE WANDERMONDE

Es aquella matriz cuadrada cuyos elementos son las potencias : 0, 1, 2, 3, ... , (n -1); de "n" números diferentes : $x, y, z, \dots w$; es decir :

$$A = \begin{bmatrix} x^0 & y^0 & z^0 & \dots & w^0 \\ x & y & z & \dots & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & \dots & w^2 \\ \vdots & & & & \\ x^{n-1} & y^{n-1} & z^{n-1} & \dots & w^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & y & z & \dots & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & \dots & w^2 \\ \vdots & & & & \\ x^{n-1} & y^{n-1} & z^{n-1} & \dots & w^{n-1} \end{bmatrix}$$

Teorema : *«El determinante de una matriz wandermondiana es igual al producto que se obtiene al multiplicar todas las diferencias de los elementos que sirven de base a las potencias dadas : $x, y, z \dots w$».*

$$|A| = (y-x)(z-y)(z-x)\dots(w-z)(w-y)(w-x)$$

Ejemplo.- *Calcular el determinante de la siguiente matriz :* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

Resolución.-

Podemos reconocer que los elementos de la matriz dada tienen por bases a : 2 ; 3 ; 4 . Es decir :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{bmatrix}$; por lo tanto la matriz es wandermondiana y su determinante será :

$$|A| = (3-2)(4-3)(4-2) = (1)(1)(2) \Rightarrow |A| = 2$$

17.12B EXPRESION MATRICIAL

Se denomina así al resultado que se obtiene al reemplazar la variable de una expresión algebraica racional, por una matriz cuadrada.

Teorema : *«Al reemplazar la variable de una expresión algebráica racional por una matriz, el término independiente de la expresión quedará multiplicado por la matriz identidad»*

Sea la expresión algebráica racional : $P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$,

donde : a_n = Término independiente, y sea A una matriz cuadrada.

Luego, la expresión matricial que se obtiene al reemplazar la variable (x) de la expresión algebraica racional dada por la matriz A, será :

$$P(A) = a_0 . A^n + a_1 . A^{n-1} + a_2 . A^{n-2} + ... + a_{n-1} . A + a_n . I$$

Ejemplo.- *Encontrar :* $P(A)$ *siendo :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; y $P(x) \equiv 2x + 3$

Resolución.-

Se pide encontrar $P(A)$ a partir de la expresión algebraica dada, para lo cual utilizaremos el teorema anterior, haciendo : $x = A$, obtendremos :

$$P(A) = 2 . A + 3I$$

Reemplazando A por su matriz : $P(A) = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Efectuando la multiplicación indicada : $P(A) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Finalmente, se consigue : $P(A) = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

MISCELANEA

31.- Sea la matriz : $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ***,cuando "n" es un número entero positivo muy grande.***

¿A qué valor se aproxima la suma de los elementos de la diagonal principal de A^n?

A) $\frac{1}{2}$ *B) 1* *C)* $\frac{1}{9}$ *D) 2* *E)* $\frac{1}{8}$

Resolución.-

La matriz dada se podrá escribir así : $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ... (I)

Ahora; analizando cuidadosamente algunas potencias de la matriz A se tendrá :

$$A^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^2}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad ... \text{(II)}$$

Ahora encontramos : $A^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \ldots$ (III)

Asimismo determinamos : $A^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^4}\begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix} \ldots$ (IV)

De (I) : $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 3^0 \\ 3^0 & 2 \end{bmatrix}$

De (II) : $A^2 = \frac{1}{3^2}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^2}\begin{bmatrix} 3^1+2 & 3^1+3^0 \\ 3^1+3^0 & 3^1+2 \end{bmatrix}$

De (III) : $A^3 = \frac{1}{3^3}\begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{bmatrix} 3^2+3^1+2 & 3^2+3^1+3^0 \\ 3^2+3^1+3^0 & 3^2+3^1+2 \end{bmatrix}$

De (IV) : $A^4 = \frac{1}{3^4}\begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^4}\begin{bmatrix} 3^3+3^2+3^1+2 & 3^3+3^2+3^1+3^0 \\ 3^3+3^2+3^1+3^0 & 3^3+3^2+3^1+2 \end{bmatrix}$

Por inducción : $A^n = \frac{1}{3^n}\begin{bmatrix} 3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}+\ldots+3^1+2 & 3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+3^1+3^0 \\ 3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+3^1+3^0 & 3^{n-1}+3^{n-2}+\ldots+3^1+2 \end{bmatrix}$

Donde la suma de los elementos de su diagonal principal está dada así : $\Sigma = \frac{2}{3^n}\left(3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}+\ldots+3^1+2\right)$

Introduciendo el denominador : $\Sigma = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}\right)$

Como "*n*" es muy grande, la suma pedida será : $\Sigma = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right.$

Debemos recordar la siguiente suma notable : $\boldsymbol{x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{x}{1-x}}$ $\forall\ 0 < x < 1$

Finalmente; la suma pedida es : $\Sigma = 2\left(\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{1}$ **RPTA. B**

32.- Sea el polinomio : F (x) = x^2 - 2x - 1 ; y la matriz : A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ***; calcular la suma de los elementos de : F(A)***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 0*** ***D) -1*** ***E) -2***

Resolución.-

Se pide la suma de los elementos de la expresión matricial : $F(A)$; la cual se define así :

$$F(A) = A^2 - 2A - I \quad \ldots\ldots.. \quad (*)$$

Primero hallemos A^2 : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Luego, en (*) se tendrá : $F(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Efectuando la multiplicación por 2 : $F(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Restando las dos primeras matrices : $F(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Finalmente diremos que : Σ Elementos de $F(A) =$ **0** **RPTA. C**

33.- Sean las matrices : $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{bmatrix}$, donde : i es la unidad imaginaria y, w es la raíz cúbica de la unidad imaginaria. Halle Traz (C^{-1}), siendo : $C = \sum_{k=1}^{40}\left(A^{4k} + B^{3k}\right)$

A) $\frac{1}{160}$ B) 80 C) $\frac{1}{80}$ D) 40 E) $\frac{1}{40}$

Resolución.-

Debemos recordar que : $i^{4m} = 1 \wedge w^{3m} = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

Ahora hallaremos la matriz A^{4k}, siguiendo la misma estrategia utilizada en el Prob.16. Veamos :

si : $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .... (*)

Podemos reconocer de (*) que : $A^2 = -I$

Luego, elevando a ambos miembros al exponente $2k$; se obtiene : $A^{4k} = I$ ... (1)

Ahora hallaremos la matriz B^{3k} :

si : $B = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w^4 \end{bmatrix}$

Asi mismo reconocemos que : $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} w^3 & 0 \\ 0 & w^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .... (**)

De (**) podemos observar que : $B^3 = I$

Luego, elevando a ambos miembros al exponente k; se obtiene : $B^{3k} = I$ ..... (2)

Sumando (1) y (2), se consigue : $A^{4k} + B^{3k} = I + I = 2I$ ..... (3)

Por condición la matriz C se define así : $C = \sum_{k=1}^{40}\left(A^{4k} + B^{3k}\right)$ ..... (4)

Reemplazando (3) en (4), se tendrá : $C = \sum_{k=1}^{40}(2I) = \underbrace{(2I) + (2I) + (2I) + \ldots + (2I)}_{40 \text{ veces}}$

Reduciendo, obtenemos : $C = 40\,(2I) = 80\,I$

Sustituyendo I por su equivalente matricial : $C = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}$

Hallaremos la matriz C^{-1}, según la regla práctica expuesta en el ítem 17.10B; obteniéndose :

$$C^{-1} = \frac{1}{(80)^2}\begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{80} & 0 \\ 0 & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

Finalmente la traza de C^{-1}, será : $\text{Traz}\,(C^{-1}) = \frac{1}{80} + \frac{1}{80} = \mathbf{\frac{1}{40}}$ **RPTA. E**

34.- Si : $A = \left[a_{ij}\right]_{23\times 2}$ / $a_{ij} = i + j$ $\wedge$ $B = \left[b_{ij}\right]_{2\times 41}$ / $b_{ij} = 2i + 3j$, siendo : $C = A \cdot B$; calcular el valor del elemento c_{34}.

A) 136 B) 121 C) 114 D) 125 E) 134

Resolución.-

Debemos reconocer que la matriz C que se obtiene de multiplicar A por B, poseerá 23 filas y 41 columnas. Asi mismo debemos observar que el elemento c_{34}, es el producto de la 3ra fila de la matriz A por la 4ta columna de la matriz B, por esta razón se puede establecer que :

$$c_{34} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \end{bmatrix} = a_{31} \cdot b_{14} + a_{32} \cdot b_{24} \qquad \ldots\ldots (*)$$

Por condición se sabe que : $a_{ij} = i + j \Rightarrow a_{31} = 4 \wedge a_{32} = 5$

De igual modo se puede decir que : $b_{ij} = 2i + 3j \Rightarrow b_{14} = 14 \wedge b_{24} = 16$

Finalmente reemplazando en (*) se obtiene : $c_{34} = (4)(14) + (5)(16) =$ **136**

RPTA. A

35.- Se tiene la matriz : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ***tal que :*** $A = B + C$ ***; donde :*** $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ ***matriz simétrica,*** $C = \begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix}$ ***matriz antisimétrica; luego, el valor de :*** $b_{11} + b_{12} + b_{13}$ ***, es :***

A) 5/2 ***B) 6/2*** ***C) 7/2*** ***D) 8/2*** ***E) 9/2***

Resolución.-

Para encontrar el valor de la expresión : $b_{11} + b_{12} + b_{13}$, será necesario encontrar a la matriz B. Sabiendo que B es una matriz simétrica, utilizaremos la observación dada en la resolución del Prob. 20; de este modo, si A es una matriz conocida, la matriz B se podrá encontrar así :

$$B = \frac{1}{2}\,(A + A^T) \quad \text{..... (I)}$$

Del dato encontraremos A^T :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sumando A y A^T se obtiene :

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones, nos queda :

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{...... (II)}$$

Reemplazando (II) en (I) se obtiene :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Finalmente se tendrá :

$$b_{11} + b_{12} + b_{13} = 1 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{4}$$

RPTA. D

36.- Sean las matrices : $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} (n+1)\,a^{n+4} & a^{n+5} \\ a^{n+5} & 0 \end{bmatrix}$ ***, encontrar la matriz X de orden 2 , de :*** $A^n \, . \, X \, . \, B = C$

A) $\begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$ ***B)*** $\begin{bmatrix} -a^4 & 0 \\ 0 & -a^4 \end{bmatrix}$ ***C)*** $\begin{bmatrix} 0 & a^4 \\ a^4 & 0 \end{bmatrix}$ ***D)*** $\begin{bmatrix} 0 & -a^4 \\ -a^4 & 0 \end{bmatrix}$ ***E)*** $\begin{bmatrix} 0 & -a^4 \\ a^4 & 0 \end{bmatrix}$

Resolución.-

Siguiendo el mismo procedimiento del Prob.16, hallaremos A^n por inducción.

Calculemos A^2 : $$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos A^3 : $$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

Asi mismo calculamos A^4 : $$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

En general : $$A^n = \begin{bmatrix} a^n & n a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \quad \text{..... (I)}$$

Multiplicando por B^{-1} a la condición : $$A^n \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}} = C \cdot B^{-1}$$

Sustituyendo lo indicado por la Matriz Identidad I : $$A^n \cdot X \cdot I = C \cdot B^{-1}$$

Empleando la 1ra Propiedad de la Matriz Identidad : $$A^n \cdot X = C \cdot B^{-1}$$

Multiplicando por A^{-n} a ambos miembros : $$\underbrace{A^{-n} \cdot A^n} \cdot X = A^{-n} \cdot \left(C \cdot B^{-1}\right)$$

Sustituyendo lo indicado por la Matriz Identidad I : $$I \cdot X = A^{-n} \cdot \left(C \cdot B^{-1}\right)$$

Empleando la 1ra Propiedad de la Matriz Identidad : $$X = A^{-n} \cdot \left(C \cdot B^{-1}\right) \quad \text{... (II)}$$

Al hallar la matriz $B^{-1} \wedge A^{-n}$; según la regla práctica mencionada en el item 17.10B; se obtiene : $$B^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ -a^{-2} & -a^{-1} \end{bmatrix} \wedge A^{-n} = \begin{bmatrix} a^{-n} & -n a^{-n-1} \\ 0 & a^{-n} \end{bmatrix} \quad \text{...(III)}$$

Ahora hallamos la matriz : $C \cdot B^{-1}$: $$C \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} (n+1)\, a^{n+4} & a^{n+5} \\ a^{n+5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ -a^{-2} & -a^{-1} \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación : $$C \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} n\, a^{n+3} & -a^{n+4} \\ a^{n+4} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{... (IV)}$$

Finalmente reemplazando (III) y (IV) en (II) se consigue : $$X = \begin{bmatrix} a^{-n} & -n a^{-n-1} \\ 0 & a^{-n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n\, a^{n+3} & -a^{n+4} \\ a^{n+4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} 0 & -a^4 \\ a^4 & 0 \end{bmatrix}$$ RPTA. E

37.- El equivalente de : $\sqrt[3]{\begin{vmatrix} (a-b-c) & 2a & 2a \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix}}$ **, es :**

A) abc *B) a + b + c* *C)* $a^2+b^2+c^2$ *D)* $a^2 b^2 c^2$ *E)* $(a+b+c)^3$

Resolución.-

Sea T el equivalente pedido, entonces nuestra estrategia para encontrar dicho equivalente consistirá en calcular el determinante mostrado como radicando, empleando para ello las propiedades expuestas en el item 17.8D. Veamos :

$$\begin{vmatrix} (a-b-c) & 2a & 2a \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix}$$

Sumando la 2da y la 3ra fila a la 1ra :

$$\begin{vmatrix} (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix}$$

Extrayendo de la 1ra fila el factor $(a+b+c)$: $(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix}$

Restando la 1ra columna de las otras dos : $(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}$

Aquí encontramos el determinante según el criterio de los cofactores :

$$(a+b+c)\left\{(-a-b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2b & -a-b-c \end{vmatrix}\right\}$$

Desarrollando, nos queda : $(a+b+c)\{(-a-b-c)(-a-b-c)\} = (a+b+c)^3$

Finalmente el equivalente será : $T = \sqrt[3]{(a+b+c)^3} = \mathbf{a+b+c}$ RPTA. B

38.- Calcular el determinante de la siguiente matriz : $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

A) 24 *B) 120* *C) 720* *D) 5 040* *E) 10 825*

Resolución.-

Para calcular el determinante de una matriz cuyo orden es mayor que 3; se recomienda utilizar las 5 últimas propiedades expuestas en el item 17.8D. Con la finalidad de mejorar nuestra exposición utilizaremos la siguiente notación : C_k, que en adelante significará : Columna "k". Veamos :

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Luego de efectuar las siguientes operaciones : $C_1 - C_2$; $C_2 - C_3$; $C_3 - C_4$ $\wedge$ $C_4 - C_5$, nos queda :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Se puede observar que luego de efectuar las operaciones indicadas, se obtiene un determinante para una matriz triangular superior. En este caso aplicaremos la 1ra observación de la X Propiedad para determinantes expuesta en el item 17.8D, la que establece que el valor del determinante de una matriz triangular superior viene dado así :

$$|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{120} \qquad \textbf{RPTA. B}$$

39.- Luego de resolver la ecuación :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1-x) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (2-x) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (3-x) & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & & \{(n-1)-x\} \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

indicar por respuesta la suma de sus raíces.

A) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *B)* $\dfrac{(n-1)\,n}{2}$ *C)* $\dfrac{n^2-1}{2}$ *D)* $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ *E)* $\dfrac{(n-2)\,n}{2}$

Resolución.-

Por tratarse de una matriz de un orden mayor que 3, procederemos tal como se hizo en el ejercicio anterior. En este caso restaremos la 1ra fila a la 2da, 3ra, 4ta y así sucesivamente...., de este nodo el determinante mostrado en el primer miembro de la igualdad dada, se transforma en :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (1-x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2-x) & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \{(n-2)-x\} \end{vmatrix}$$

Luego, por ser un determinante para una matriz triangular superior, su valor se determinará así :

$$(1)\,(-x)\,(1-x)\,(2-x)\,\dots\,\{(n-2)-x\}$$

Por condición se sabe que : $(1)\,(-x)\,(1-x)\,(2-x)\,\dots\,\{(n-2)-x\} = 0$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $x\,(x-1)\,(x-2)\,\dots\,\{x-(n-2)\} = 0$

En consecuencia; las raíces de la ecuación son : $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; ... $x_{n-1} = n-2$

Finalmente : Σ de raíces = $0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) = \dfrac{(n-2)\,(n-1)}{2}$ **RPTA. D**

40.- Dada la matriz : $\mathrm{Adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & k \end{bmatrix}$ ***y*** $|A| = -4$ ***, hallar el valor de "k".***

A) 6 ***B) -12*** ***C) 12*** ***D) -6*** ***E) 8***

Resolución.-

De acuerdo con la definición de matriz inversa se sabe que : $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}\,(A)$

Tomando determinante a ambos miembros : $|A^{-1}| = \left|\dfrac{1}{|A|}.\mathrm{Adj}(A)\right|$

Por propiedad de determinantes; obtenemos : $|A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|^3}\,.\,|\mathrm{Adj}\,(A)|$

Despejando, encontramos que : $|\mathrm{Adj}\,(A)| = |A|^2$

Reemplazando datos, deducimos que : $|\mathrm{Adj}\,(A)| = (-4)^2 = 16$ ..... (*)

Sustituyendo el dato de lamatriz para Adj (A) en (*) : $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & k \end{vmatrix} = 16$

Efectuando la siguiente operación : $C_1 - C_3$ en el determinante se consigue :

$$\begin{vmatrix} 0 & -8 & 4 \\ -2 & 9 & -5 \\ (-6-k) & 10 & k \end{vmatrix} = 16$$

Desarrollando el determinante según el criterio de los cofactores, la igualdad será :

$$-(-8)\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ (-6-k) & k \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ (-6-k) & 10 \end{vmatrix} = 16$$

Finalmente efectuando operaciones, se obtiene : $8(-2k - 30 - 5k) + 4(-20 + 54 + 9k) = 16$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $2(-7k - 30) + 9k + 34 = 4$

Finalmente al reducir nos queda : $\boldsymbol{k = -6}$ **RPTA. D**

41.- Sea A una matriz de orden 7 tal que : $|A^{-3}| = 64$; luego el valor de : $|A^2|$, es :

A) 16 ***B) 4*** ***C) 1/16*** ***D) 1/4*** ***E) N.A.***

Resolución.-

Por dato del problema : $|A^{-3}| = 64$

SEgún el item 17.10A : $|A^{-1}|^3 = 64 \Rightarrow |A^{-1}| = 4$

También se establece que : $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \Rightarrow 4 = \dfrac{1}{|A|}$

Luego se tiene : $|A| = \dfrac{1}{4}$ .... (*)

Se pide : $|A^2|$ y según el item 17.8D, podemos plantear : $|A^2| = |A|^2$ ...... (**)

Finalmente sustituyendo (*) en (**) se consigue : $\boldsymbol{|A^2| = \dfrac{1}{16}}$ **RPTA. C**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Calcular "$a+b+c$" de :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & c & 5 \end{bmatrix}$$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

2.- Si : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$; calcular Traz (A^2)

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

3.- Si : $A^2 = B$, donde : $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$;

calcular la suma de los elementos de la matriz B.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

4.- Si : $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} m & * & * \\ * & n & * \\ * & * & p \end{bmatrix}$;

calcular "$m+n-p$"

A) 4 B) 5 C) 3 D) -8 E) 8

5.- Halle la matriz inversa de : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$

6.- Calcular el determinante de : $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 29

7.- Simplificar : $T = \dfrac{\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}}$

A) 10 B) 20 C) 30 D) 5 E) 0

8.- Calcular el determinante de la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{bmatrix} \; ; \; n \in \mathbb{N}^*$$

A) 1 B) -1 C) n D) $-n$ E) n^2

9.- Si : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

hallar : Traz $(A \, . \, B)$

A) 2 B) -2 C) -1 D) 1 E) 3

10.- Calcular el determinante de la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*$$

A) tg θ B) sec θ C) 1 D) n E) N.A.

11.- ¿Qué afirmaciones son siempre verdaderas?

I) Si : $A \, . \, B = A \, . \, C \Rightarrow B = C$

II) Si : $A \, . \, B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$

III) Si : El determinante de A es no nulo, entonces A tiene inversa.

<u>**Nota:**</u> A , B $\wedge$ C son matrices cuadradas

A) todas B) I C) II D) III E) II $\wedge$ III

12.- Indicar la verdad (V) o falsedad (F) de las operaciones con matrices que a continuación se muestran.

I) $\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 3 & 5\\ 6 & -7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 5 & 4\\ 9 & -3 & 8\end{bmatrix}$

II) $2.\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 6\\ 4 & -4\end{bmatrix}$

III) Si : $A=\begin{bmatrix}-5 & 2 & -3\\ 8 & -5 & 6\end{bmatrix} \wedge \alpha=-\dfrac{1}{2}$;

entonces : $A\,.\,\alpha=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{2} & -1 & \dfrac{3}{2}\\ -4 & \dfrac{5}{2} & -3\end{bmatrix}$

A) FVF B) FFV C) FFF D) VFV E) VVV

13.- Si : $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}7 & 1 & 4\\ 3 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

Halle la suma de los elementos de la 2da fila de la matriz $A\,.\,B$

A) 9 B) -9 C) 93 D) -93 E) 72

14.- Calcular el siguiente determinante :

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & -2\\ -3 & 1 & 0\\ 5 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

A) 7 B) 17 C) 27 D) 37 E) 47

15.- Dado : $\Delta^{m}_{n}=\begin{vmatrix}m\sqrt{2} & 2\\ 3 & n\sqrt{3}\end{vmatrix}$; hallar

"k" si : $\Delta^{1}_{2}+\Delta^{2}_{3}+\Delta^{3}_{4}+2\Delta^{0}_{1}=k\Delta^{4}_{1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

NIVEL B

16.- Si A es una matriz de orden : $(m-1)\times n$ y B es una matriz de orden : $p\times 5$. Hallar "m" para que exista la matriz : $B\,.\,A$

A) 2 B) 6 C) 3 D) 4 E) 5

17.- Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix}3 & 6 & 9\\ 1 & 4 & 7\\ 2 & 4 & 6\end{vmatrix}$$

A) 32 B) 45 C) 0 D) 24 E) N.A.

18.- Si : $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 5\\ 9 & 16 & 25\end{bmatrix}$, calcular : $|A^{T}|$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19.- Sabiendo que : $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$; calcular : Traz (A^{-4})

A) 32 B) 33 C) 35 D) 34 E) 31

20.- Halle el producto de todos los elementos, de la diagonal secundaria de la matriz B; definida así :

$B=A+A^{2}+A^{3}+\ldots+A^{n}$; $n\in\mathbb{N}\,/\,n\geq 3$

Siendo : $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

A) n B) 0 C) n^2 D) $2n$ E) $n!$

21.- Si : $P(x)\equiv 2x+3 \quad\wedge\quad A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;

encontrar la expresión $P(A^{-1})$

A) $\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 7\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 7\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -7\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 7\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-5 & -2\\ -2 & 7\end{bmatrix}$

22.- Calcular :

$ab - cd$, si : $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

A) -10 B) 10 C) 8 D) -8 E) 24

23.- Calcular la traza de la matriz adjunta de A : $A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 13 \end{bmatrix}$

A) 229 B) -32 C) 169 D) 149 E) 129

24.- Si : $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, halle : A^{-1}

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

25.- Calcular "$a + b - m$" si la matriz :

$$\begin{bmatrix} \frac{2a}{5}-15 & 20-b & 40-a \\ \frac{a}{2}-b & \frac{3b}{5}-11 & \frac{m}{4}-11 \\ \frac{a}{10}-\frac{b}{5} & \frac{a}{40}-1 & \frac{4m}{11}-15 \end{bmatrix}$$, es igual a la

matriz identidad de orden 3.

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

26.- Hallar la matriz X de :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 80 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 23 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -23 & 8 \end{bmatrix}$

27.- Dada la matriz : $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$; hallar la traza de aquella matriz B; que sumada con la matriz A origine la matriz identidad.

A) -4 B) 4 C) -1 D) 1 E) -5

28.- Calcular el siguiente determinante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

A) -19 B) 29 C) -39 D) 49 E) N.A.

29.- Calcular "x" en : $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & x \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

30.- Calcular el determinante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

NIVEL C

31.- Hallar el determinante de la matriz A de orden 2; tal que sea conmutable con la matriz :

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

además el valor de la traza de la matriz A^2 es 18.

A) 3 B) 9 C) 18 D) 36 E) 6

32.- Dada la matriz : $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$;

calcular : $|A^{19}|$

A) 121 B) 0 C) 1 D) -3 E) 3

33.- Calcular el determinante de la matriz A de orden 4 ; si :

$$a_{ij}=\begin{cases} 5 & ; \quad i<j \\ 3 & ; \quad i \geq j \end{cases}$$

A) 5 B) 3 C) 15 D) -15 E) -24

34.- Dada la matriz nula :

$$\begin{bmatrix} a^2+ap+q & 0 \\ 0 & b^2+bq+q \end{bmatrix};$$

hállese el valor de : $\dfrac{(2a+b+q)b}{2ab+ap+a^2}$

A) -1 B) 0 C) -2 D) 3 E) 1

35.- Si : $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \wedge B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

indique la suma. de la suma de los elementos de las matrices $C \wedge D$ siendo : $C=A\,.\,B$, y , $D=B\,.\,A$

A) 12 B) 13 C) 16 D) 9 E) 18

36.- Si : $\{a\,;b\,;c\} \subset \mathbb{R} \,/\, a \neq b \,\wedge\, b \neq c$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix},$$

calcular : $\dfrac{|B|}{(b-c)(c-a)}$

A) a B) $(a-b)$ C) b D) $(a-b)^2$ E) 0

37.- De la matriz : $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, se puede afirmar que es :

A) singular B) nilpotente C) involutiva D) idempotente E) no singular

38.- Sabiendo que :

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \wedge B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

hallar "x" de la siguiente ecuación : $2(x-4A)=3(B-2A)$

A) $\begin{bmatrix} 14 & 30 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -7 & 15 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 7 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

39.- Halle los valores de "α" para los cuales la matriz :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ \alpha & \alpha+2 & \alpha-2 \\ 4 & \alpha & 8 \end{bmatrix}; \text{ es singular.}$$

A) $\left\{-\frac{4}{3}\,;\,3\right\}$ B) $\left\{-3\,;\,\frac{4}{3}\right\}$ C) $\left\{4\,;\,-\frac{3}{4}\right\}$

D) $\left\{-4\,;\,\frac{3}{2}\right\}$ E) $\left\{-\frac{1}{3}\,;\,-4\right\}$

40.- Sea la matriz :

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

además el polinomio : $F(x) = x^{34} - 2x^9 + 1$; calcular la suma de los elementos de $F(A)$.

A) 3 B) 4 C) 6 D) 12 E) 5

41.- Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda :

( ) Sean : A^T y B^T matrices transpuestas de $A \wedge B$; luego : $(\alpha . A + \theta . B)^T = \alpha . A^T + \theta . B^T$; $\alpha \wedge \theta$ escalares.

( ) Una matriz y un determinante podrían ser iguales.

( ) $\alpha(A . B) = (\alpha . A) . B = A . (\alpha . B)$; $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

( ) $|\alpha A| = \alpha^n |A|$; $\alpha \in \mathbb{R}$ y "n" es el orden de A

( ) Un circular es un arreglo de números en filas y columnas.

A) VFVVF D) FVVFF

B) VVVVV E) VFFVF

C) VVVFV

42.- La matriz :

$$\begin{bmatrix}2+x & x\\ x & 3\end{bmatrix},$$

tiene por determinante al número: $(x + b)$, luego; el valor de "b" para que dicho número sea único es :

A) 0 B) 1 C) 7 D) 1/7 E) 49

43.- Calcular : $\dfrac{b+c+d}{a}$, si :

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ b & 0 & 1 & 1\\ c & 1 & 0 & 1\\ d & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\frac{1}{2}$

44.- Sea la expresión algebráica racional :

$F(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$; $x \neq 2$ y la matriz : $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

Calcular la transpuesta de la matriz $F(A)$.

A) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 4 & -5\end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}1 & -4\\ -4 & -5\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & -4\\ -4 & 5\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 5 & -4\end{bmatrix}$

45.- Sea la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden "n" donde: $a_{ij} = min\ \{i\,;j\}$. calcular el determinante de la inversa A:

A) 1 B) -1 C) 2 D) 1/2 E) N.A.

46.- Calcular el siguiente determinante :

$$\begin{vmatrix}15 & 16 & 17 & 18\\ 15 & 15 & 19 & 20\\ 15 & 15 & 15 & 21\\ 15 & 15 & 15 & 15\end{vmatrix}$$

A) 1 120 B) 112 C) -120

D) -1 200 E) -360

47.- Calcular el valor del determinante :

$$\begin{vmatrix} a^2 & (2a+1) & (2a+3) & (2a+5) \\ b^2 & (2b+1) & (2b+3) & (2b+5) \\ c^2 & (2c+1) & (2c+3) & (2c+5) \\ d^2 & (2d+1) & (2d+3) & (2d+5) \end{vmatrix}$$

A) a B) $abcd$ C) $ab+bc+bd$

D) 0 E) N.A.

48.- Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} (a+b) & a & a & a & \dots & a \\ a & (a+b) & a & a & \dots & a \\ a & a & (a+b) & a & \dots & a \\ \vdots & & & & & \\ a & a & a & a & \dots & (a+b) \end{vmatrix}$$

A) $b^n(an+b)$ D) $b^n(a+b)$

B) $b^{n+1}(an+b)$ E) $b^{n-1}(an+b)$

C) $b^{n-1}(a+nb)$

49.- El equivalente de :

$$\sqrt[3]{\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}} \text{ ; es :}$$

A) $a+1$ B) $(a+1)^2$ C) $a-1$

D) $(a-1)^2$ E) $(a-1)^3$

50.- Dada una matriz A de orden 4, simétrica e invertible que cumple las siguientes condiciones :

I) $A\cdot\left[\dfrac{A}{5}\right]^T = 5I$

II) $3A^5 - |A|\,A = \left(-5A^{-1}\right)^T - 3A^T A^4 + \left|\sqrt[4]{6}\,A^T\right| A$;

calcular : Traz (A)

A) 5 B) 10 C) 20 D) 125 E) 625

51.- Calcular el siguiente determinante de orden "n".

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

A) n B) 1 C) 2^n D) $2^{n+1}-1$ E) N.A.

52.- Calcular el determinante de la siguiente matriz de orden "n".

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

A) 2^{n+1} B) $n!$ C) $(n-2)!$

D) $-(n-2)!$ E) $-2(n-2)!$

18 Sistemas Lineales

18.1) DEFINICION

Se llama sistema de ecuaciones, o, sistema de ecuaciones simultáneas al conjunto de dos ó más ecuaciones que se verifican para un mismo valor de la, o, las incognitas.

Ejemplo.- *El sistema :* $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 5x-y=3 \end{cases}$

Consta de 2 ecuaciones :

$3x+2y=7$ .... (I)

$5x+\ y=7$ .... (II)

Observar que ambas ecuaciones se verifican para : $x=1 \wedge y=2$

18.1A SOLUCION DE UN SISTEMA

Son los valores que toman las incógnitas para que simultáneamente verifiquen todas las ecuaciones dadas.

Ejemplo.- *Para el sistema mostrado a continuación :* $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 5x-y=3 \end{cases}$

La solución será : $x=1 \quad \wedge \quad y=2$.

18.1B CONJUNTO SOLUCION

Es aquel conjunto que tiene por elementos a los valores de las incógnitas de un sistema.

Si un sistema presenta una sola incógnita entonces, los elementos del conjunto solución se anotan de forma individual separados por puntos y comas.

Ejemplo : C.S. $=\{a\,;b\,;c\,;d\,....\}$

Si un sistema presenta dos incógnitas entonces, los elementos del conjunto solución se agrupan en pares ordenados $(x\,;y)$.

Ejemplo : C.S. $=\{(a\,;b)\,,(c\,;d),....\}$

Si un sistema presenta tres incógnitas entonces, los elementos del conjunto solución se agrupan en temas ordenadas $(x\,;y\,;z)$

Ejemplo : C.S. $=\{(a\,;b\,;c)\,,(d\,;e\,;f),....\}$

18.1C PRINCIPIOS FUNDAMENTALES PARA LA TRANSFORMACION DE UN SISTEMA.

I) Si en un sistema de ecuaciones, se suma miembro a miembro dos o más ecuaciones; la ecuación que se obtiene es equivalente a las del sistema.

II) Si en un sistema de ecuaciones, se suma miembro a miembro una de sus ecuaciones con la que resulta de multiplicar otra de sus ecuaciones por un factor no nulo; la ecuación que se obtiene es equivalente a las del sistema.

18.2) CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Los sistemas de ecuaciones de acuerdo a su posibilidad de solución se podrán clasificar en :

18.2A SISTEMAS COMPATIBLES

Es aquel sistema de ecuaciones que si admite soluciones. Estas a su vez podrán ser :

I) Sistema Compatible Determinado

Si presenta un número finito de soluciones. Puede observarse que en estos sistemas existen igual número de ecuaciones que de incógnitas.

II) Sistema Compatible Indeterminado

Si presenta un número infinito de soluciones. Un sistema de este tipo se reconoce cuando existen más incógnitas que ecuaciones.

18.2B SISTEMAS INCOMPATIBLES

Son aquellos que no admiten solución alguna. Generalmente en estos sistemas el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas.

18.2C SISTEMAS EQUIVALENTES

Se llamarán *Sistemas Equivalentes* a aquellos sistemas que siendo diferentes, admiten las mismas soluciones.

18.3) SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Es aquel sistema que se encuentra formado por dos o más ecuaciones de 1er grado, independientemente del número de incógnitas que en ellas se presenten.

18.4) METODOS DE RESOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL

18.4A METODO DE SUSTITUCION

Consiste en despejar de una de las ecuaciones, una de las incógnitas en función de la(s) otra(s), para luego reemplazarla en cualquier otra ecuación del sistema, con la finalidad de obtener una nueva ecuación con una incógnita menos. De existir solo dos ecuaciones corresponde aquí encontrar el valor de una incógnita; si existen más ecuaciones entonces, se debe proceder del mismo modo hasta obtener una sola ecuación con una sola incógnita. Una vez encontrado el valor de una de las incógnitas, se procederá a reemplazarla en las otras ecuaciones para poder encontrar los valores de las demás incógnitas.

Ejemplo.- *Resolver el sistema :* $\begin{cases} 2x - y = 4 ....(\mathrm{I}) \\ x + y = 2 ....(\mathrm{II}) \end{cases}$

Resolución.-

Teniendo en cuenta el método de sustitución, el sistema se resolverá así :

De (II) despejamos "x" : $x = 2 - y$ .... (*)

Reemplazando (*) en (I) : $2(2 - y) - y = 4 \Rightarrow y = 0$

Finalmente $y = 0$, lo reemplazamos en (II), de donde obtendremos : $x = 2$

$$\therefore \quad \text{C.S.} = \{(2\,;0)\}$$

18.4B METODO DE IGUALACION

Este método es recomendable para aquellos sistemas formados por dos ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en despejar de ambas ecuaciones la misma incógnita para luego igualarlas, y obtener una nueva ecuación en función de una sola incógnita.

De esta última ecuación se obtiene el valor de la incógnita, para luego reemplazarla en cualquiera de las ecuaciones del sistema con la finalidad de encontrar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo.- *Resolver el sistema :* $\begin{cases} 3x - 2y = 7 ....(\mathrm{I}) \\ 2x + y = 5 ....(\mathrm{II}) \end{cases}$

Resolución.-

Teniendo en cuenta el método de igualación, el sistema se resolverá así :

De (I) despejamos "x" : $x = \dfrac{7+2y}{3}$

De (II) despejamos "x" : $x = \dfrac{5-y}{2}$

Igualando, obtenemos : $\dfrac{7+2y}{3} = \dfrac{5-y}{2} \Rightarrow 14 + 4y = 15 - 3y$

Es decir : $y = \dfrac{1}{7}$

Finalmente reemplazando $y = \dfrac{1}{7}$, en la ecuación (II), se consigue :

$$2x + \frac{1}{7} = 5 \Rightarrow x = \frac{17}{7}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\left(\frac{17}{7}\,;\frac{1}{7}\right)\right\}$$

18.4C METODO DE REDUCCION

Consiste en multiplicar a una de las ecuaciones del sistema (o a veces a más de una) por un factor no nulo para luego sumarla o restarla con otra ecuación, con la finalidad de eliminar una o más incógnitas, de este modo se logra obtener una nueva ecuación en función de una sola incógnita, la cual al ser hallada se deberá de reemplazar en cualquiera de las ecuaciones del sistema para así hallar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo.- *Resolver el sistema :* $\begin{cases} x - 2y = 5 ....(I) \\ x + \ y = 4.........(II) \end{cases}$

Resolución.-

Teniendo en cuenta el método de reducción, el sistema se resolverá así :

Mutliplicamos por 2 a la ecuación (II) y se obtiene : $2x + 2y = 8$

Recordando que la ecuación (I) es : $x - 2y = 5$

Sumando miembro a miembro estas dos últimas ecuaciones, se obtiene : $3x = 13 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{13}{3}$

Finalmente, reemplazando $x = \frac{13}{3}$ en (II), se consigue : $\frac{13}{3} + y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$

$$C.S. = \left\{ \left(\frac{13}{3} ; -\frac{1}{3} \right) \right\}$$

18.4D METODO DE LOS DETERMINANTES

Este método permite emplear el concepto de determinante especialmentepara la resolución de aquellos sistemas en donde existen 3 ó más incógnitas mediante un conocido procedimiento llamando : *La Regla de Cramer.*

Regla de Cramer : En todo sistema lineal de "n" ecuaciones con "n" incógnitas, el valor de cada incógnita es una fracción, cuyo denominador es el determinante del sistema, y el numerador es este mismo determinante en el que se ha reemplazado la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes, es decir, por aquellos términos ubicados en el 2do miembro de cada ecuación.

Sea el sistema lineal : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$; llamaremos :

Δ_s = Determinante del sistema $\qquad$ Δ_y = Determinante de y

Δ_x = Determinante de x $\qquad$ Δ_z = Determinante de z

Donde deberá recordarse que :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Finalmente, según la regla de Cramer la solución del sistema se obtiene así :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \quad ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} \quad \wedge \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Resolver el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \;..............(I) \\ \dfrac{7}{x}-\dfrac{5}{y}=\dfrac{11}{6} \;..............(II) \end{cases}$$

A) {(2 ; 3)} *B) {(3 ; 2)}* *C) {(-2 ; 3)}* *D) {(2 ; 1)}* *E) {(-2 ; -3)}*

Resolución.-

Para resolver el sistema, utilizaremos el método de reducción :

Multiplicando por 5 a la ecuación (I) se consigue : $\dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{25}{6}$

Ahora, reconocemos que la ecuación (II) establece que : $\dfrac{7}{x}-\dfrac{5}{y}=\dfrac{11}{6}$

Sumando estas dos últimas ecuaciones, obtenemos : $\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x}=\dfrac{25}{6}+\dfrac{11}{6}$

Efectuando las operaciones indicadas : $\dfrac{12}{x}=\dfrac{36}{6} \Rightarrow x=2$

Luego reemplazando $x = 2$ en (I), se obtiene : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}$

Transponiendo y efectuando, se consigue : $\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=3$

Finalmente el conjunto solución del sistema será : **C.S. : {(2 ; 3)}** **RPTA. A**

2.- Resolver :

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{a}{b-c} \;..............(I) \\ \dfrac{x+c}{y+b}=\dfrac{a+b}{a+c} \;..............(II) \end{cases}$$

A) {(a + c - b ; a + b - c)} *B) {(a +b - c ; a + c - b)}* *C) {(a + b - c ; a + b - c)}*

D) {(a - b - c ; a - b + c)} *E) N.A.*

Resolución.-

Recordemos la siguiente propiedad de proporciones : Si $\dfrac{m}{n}=\dfrac{p}{q} \Rightarrow \dfrac{m \pm n}{m - n}=\dfrac{p \pm q}{p - q}$

Aplicando esta propiedad en la ecuación (I) : $\dfrac{(x+y)+(x-y)}{(x+y)-(x-y)}=\dfrac{a+(b-c)}{a-(b-c)}$

Quitanto paréntesis y reduciendo : $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a+b-c}{a-b+c} \Rightarrow x=\left(\dfrac{a+b-c}{a-b+c}\right)y$ ...(III)

Reemplazando el valor obtenido para "x" en la ecuación (II), se tendrá : $\dfrac{\left(\dfrac{a+b-c}{a-b+c}\right)y+c}{y+b}=\dfrac{a+b}{a+c}$

Multiplicando en aspa, se obtiene : $\left(\frac{a+b-c}{a-b+c}\right)(a+c)\,y + (a+c)\,c = (a+b)\,y + (a+b)\,b$

Transponiendo todos los términos en y, al 1er miembro, se obtiene :

$$\left(\frac{a+b-c}{a-b+c}\right)(a+c)\,y - (a+b)\,y = (a+b)\,b - (a+c)\,c$$

Efectuando operaciones en cada miembro, se establece que :

$$\left[\frac{(a+b-c)(a+c)-(a-b+c)(a+b)}{a-b+c}\right] y = ab + b^2 - ac - c^2$$

Luego de efectuar las multiplicaciones indicadas en el corchete, nos queda :

$$\left[\frac{ab-ac+b^2-c^2}{a-b+c}\right] y = ab + b^2 - ac - c^2$$

Finalmente, luego de simplificar en cada miembro, encontramos que : $y = a - b + c$ ..... (IV)

Por último reemplazando (IV) en (III), obtenemos : $x = a + b - c$

$\therefore$ **C.S. = $\{(a + b - c\,;\,a - b + c)\}$** **RPTA. B**

3.- Resolver el sistema :

$$\begin{cases} 5x+4y=\dfrac{xy}{6} \text{ ....(I)} \\ 3x+2z=\dfrac{xz}{8} \text{ ....(II)} \\ 3y+5z=\dfrac{yz}{6} \text{ ....(III)} \end{cases}$$

para luego indicar el valor de y :

A) 48 ***B) 80*** ***C)60*** ***D) 36*** ***E) 120***

Resolución.-

Este ejercicio es un típico caso de sistema lineal que tiene la apariencia de ser de 2do grado dado que dos variables siempre están juntas multiplicándose entre sí. Nuestra estrategia consistirá en expresar a las variables en forma de fracciones, de modo que pueda ser más fácil trabajar con ellas. Veamos :

Dividiendo a ambos miembros de (I) por xy : $\frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{6}$ .... (α)

Dividiendo a ambos miembros de (II) por xz : $\frac{3}{z} + \frac{2}{x} = \frac{1}{8}$ .... (β)

Dividiendo a ambos miembros de (III) por yz : $\frac{3}{z} + \frac{5}{y} = \frac{1}{6}$ .... (θ)

Igualando los primeros miembros de (α) y (θ), se consigue :

$$\cancel{\frac{5}{y}} + \frac{4}{x} = \frac{3}{z} + \cancel{\frac{5}{y}} \Rightarrow z = \frac{3x}{4} \text{ .... (IV)}$$

Reemplazando (IV) en (β), se obtiene : $\dfrac{3}{\frac{3x}{4}} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{8}$

Resolviendo encontramos que : $x = 48$. Al reemplazar en (IV) : $z = 36$

Reemplazando estos valores en (α), obtenemos : $\frac{5}{y} + \frac{4}{48} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 60}$ **RPTA. C**

4.- Encontrar el valor de "x" del sistema :
$$\begin{cases} \dfrac{m}{x-a} + \dfrac{n}{y-b} = \dfrac{m-n}{b-a} \text{ ....(I)} \\ \dfrac{r}{x-a} - \dfrac{s}{y-b} = \dfrac{r+s}{b-a} \text{ ....(II)} \end{cases}$$

A) b ***B) a*** ***C) ab*** ***D) a - b*** ***E) a + b***

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en aplicar el método de reducción expuesto en el item 18.4C.

En (I) multiplicamos a ambos miembros por (s) $\quad \dfrac{ms}{x-a} + \dfrac{ns}{y-b} = \dfrac{ms-ns}{b-a}$ .... (III)

En (II) multiplicamos a ambos miembros por (n) $\quad \dfrac{nr}{x-a} - \dfrac{ns}{y-b} = \dfrac{nr+ns}{b-a}$ .... (III)

Luego sumando miembro a miembro (III) y (IV), obtenemos : $\quad \dfrac{\cancel{ms+nr}}{x-a} = \dfrac{\cancel{ms+nr}}{b-a}$

Simplificando nos queda : $\quad \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{1}{b-a}$

Multiplicando en aspa y despejando : $\quad x - a = b - a \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = b}$ **RPTA. A**

5.- Calcular : x - y + z - w del sistema :
$$\begin{cases} x+y+z=15 \text{................ (I)} \\ x+y+w=16 \text{................ (II)} \\ x+z+w=18 \text{................ (III)} \\ y+z+w=20 \text{................ (IV)} \end{cases}$$

A) 3 ***B) 6*** ***C) -6*** ***D) -3*** ***E) 12***

Resolución.-

Sumando todas las ecuaciones miembro a miembro, se obtiene :

$$3(x + y + z + w) = 69 \quad \Rightarrow \quad x + y + z + w = 23 \quad \text{............. (V)}$$

Luego sustituyendo sucesivamente en (V), tendremos :

(IV) en (V) : $20 + x = 23 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

(III) en (V) : $18 + y = 23 \quad \Rightarrow \quad y = 5$

(II) en (V) : $16 + z = 23 \quad \Rightarrow \quad z = 7$

(I) en (V) : $15 + w = 23 \quad \Rightarrow \quad w = 8$

Finalmente el valor pedido será : $x - y + z - w = \boxed{-3}$ **RPTA. D**

6.- Calcular el valor de z^2 a partir del sistema :
$$\begin{cases} xy + x + y = 23 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ xz + x + z = 41 \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \\ yz + y + z = 27 \ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$$

A) 4 ***B) 36*** ***C) 16*** ***D) 25*** ***E) 49***

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en transformar cada ecuación dada, sumando 1 a ambos miembros con la finalidad de factorizar en el primer miembro :

De (I) : $xy + x + y + 1 = 23 + 1$

Agrupando : $(xy + x) + (y + 1) = 24$

Factorizando lo indicado : $x(y + 1) + (y + 1) = 24$

Factorizando $(y + 1)$: $(y + 1)(x + 1) = 24$ .... (α)

De (II) : $xz + x + z + 1 = 41 + 1$

Agrupando : $(xz + x) + (z + 1) = 42$

Factorizando lo indicado : $x(z + 1) + (z + 1) = 42$

Factorizando $(z + 1)$: $(z + 1)(x + 1) = 42$ .... (β)

De (III) : $yz + y + z + 1 = 27 + 1$

Agrupando : $(yz + y) + (z + 1) = 28$

Factorizando lo indicado : $y(z + 1) + (z + 1) = 28$

Factorizando $(z + 1)$: $(z + 1)(y + 1) = 28$ .... (θ)

Luego multiplicando miembro a miembro (α), (β) y (θ); se obtiene : $(x+1)^2 \ (y+1)^2 \ (z+1)^2 = 24 \cdot 42 \cdot 28$

Extrayendo raíz cuadrada se consigue : $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 7 \cdot 8 \cdot 3$ ... (IV)

Finalmente dividiendo miembro a miembro (IV) entre (α), se tendrá : $\dfrac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x+1)(y+1)} = \dfrac{7 \cdot 8 \cdot 3}{24}$

Simplificando en cada miembro, tendremos : $z + 1 = 7 \Rightarrow z = 6$

Finalmente el valor pedido será : $z^2 = 36$ **RPTA. B**

7.- Resolver el siguiente sistema :
$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ 5x - 2y + z = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \\ 3x - y + 2z = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$$

A) {(3 ; 1 ; 4)} ***B) {(2 ; 4 ; 3)}*** ***C) {(1 ; 2 ; 3)}***

D) {(3 ; 4 ; 2)} ***E) {(2 ; 5 ; 4)}***

Resolución.-

El sistema dado es un típico caso en el que resulta conveniente aplicar la regla de Cramer. Veamos:
Primero hallaremos los determinantes aplicando el método de Sarrus :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_s = -32 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -5 \\ 9 & -2 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_x = -96$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 5 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_y = -128 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 5 & -2 & 9 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_z = -64$$

Finalmente : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta_s} = \dfrac{-96}{-32} \Rightarrow x = 3 \qquad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_s} = \dfrac{-128}{-32} \Rightarrow y = 4$

$z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta_s} = \dfrac{-64}{-32} \Rightarrow z = 2 \qquad$ **C.S. = {(3 ; 4 ; 2)}** **RPTA. D**

8.- Luego de resolver el sistema : $\begin{cases} x - 2y = -13 \text{........ (I)} \\ 2z + 3y = \ \ 19 \text{........ (II)} \\ 3x - z + 4y = \ \ 9 \text{........ (III)} \end{cases}$ ***, indicar el valor de :*** $x + y + z$

A) 4 ***B) 2*** ***C) 6*** ***D) 1*** ***E) 8***

Resolución.-

Con la finalidad de aplicar la regla de Cramer, ordenamos y completamos cada ecuación del sistema del modo siguiente :

$$\begin{cases} 1x - 2y + 0z = -13 \\ 0x + 3y + 2z = \ \ 19 \\ 3x + 4y - 1z = \ \ 9 \end{cases}$$

A continuación hallaremos los determinantes :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_s = -23 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -13 & -2 & 0 \\ 19 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_x = 69$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -13 & 0 \\ 0 & 19 & 2 \\ 3 & 9 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_y = -115 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -13 \\ 0 & 3 & 19 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_z = -46$$

Finalmente : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta_s} = \dfrac{69}{-23} \Rightarrow x = -3 \quad \wedge \quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_s} = \dfrac{-115}{-23} \Rightarrow y = 5$

$z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta_s} = \dfrac{-46}{-23} \Rightarrow z = 2 \qquad \therefore \quad x + y + z = \boxed{4}$ **RPTA. A**

9.- Al resolver el sistema : $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y+1} = \dfrac{5}{4} \text{............. (I)} \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{y+1} = \dfrac{1}{4} \text{............. (II)} \end{cases}$ ***, se obtiene :***

A) $x = 1$; $y = 2$ ***B)*** $x = 2$; $y = 1$ ***C)*** $x = 1$; $y = 3$

D) $x = 3$; $y = 2$ ***E)*** $x = 2$; $y = 3$ ***UNI 90***

Resolución.-

Para resolver este sistema, nuestra estrategia consistirá en aplicar el método de reducción expuesto en el item 18.4C.

Multiplicando por (4) a la ecuación (I), se consigue : $\frac{4}{x} + \frac{12}{y+1} = \frac{20}{4}$

A continuación la ecuación (II) establece que : $\frac{4}{x} - \frac{7}{y+1} = \frac{1}{4}$

Restando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos : $\frac{19}{y+1} = \frac{19}{4}$

Simplificando y despejando, obtenemos : $\frac{1}{y+1} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y = 3$

Luego reemplazando $y = 3$ en la ecuación (I), se consigue : $\frac{1}{x} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$$C.S. = \{(2\ ;\ 3)\}$$ **RPTA. E**

10.- Al resolver el sistema : $\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 ....\ (I) \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 ....\ (II) \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 ....\ (III) \end{cases}$ ***, el valor de "y" es igual a :***

A) ***-abc*** ***B)*** ***a + b + c*** ***C)*** ***abc*** ***D)*** ***a (a + b + c)*** ***E)*** ***ab + bc + ac*** ***UNI 93-I***

Resolución.-

Transponiendo los términos independientes del sistema, éste será equivalente a :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = -a^3 \\ x + by + b^2z = -b^3 \\ x + cy + c^2z = -c^3 \end{cases}$$

Salta a la vista que la solución del sistema resultará más directa si empleamos la regla de Cramer, en donde el valor de la incognita "y" se podrá calcular así:

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} \quad .... \ (IV)$$

Hallemos los determinantes :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta_s = (b - a)\,(c - b)\,(c - a)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -a^3 & a^2 \\ 1 & -b^3 & b^2 \\ 1 & -c^3 & c^2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = (b - a)\,(c - a)\,(c - b)\,(ab + bc + ac)$$

Ahora si reemplazamos en (IV), se consigue : $y = \frac{\cancel{(b-a)}\,\cancel{(c-a)}\,\cancel{(c-b)}\,(ab + bc + ac)}{\cancel{(b-a)}\,\cancel{(c-b)}\,\cancel{(c-a)}}$

Finalmente nos queda : $\boldsymbol{y = ab + bc + ac}$ **RPTA. E**

18.5) ANALISIS DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA

Dado el sistema lineal :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Según la regla de Cramer su solución está dada por :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_s} \quad ; \quad i = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots ; n$$

donde : Δ_i es el determinante del sistema en donde se ha sustituído la columna de los coeficientes de la variable x_i , por la columna de los términos independientes.

Luego analizando cuidadosamente a ésta relación se podrá deducir que el sistema es :

18.5A COMPATIBLE DETERMINADO.

Si : $\Delta_s \neq 0$, frecuentemente también se dice que el sistema admite solución única.

18.5B COMPATIBLE INDETERMINADO.

Si : $\Delta_s = 0 \ \wedge \ \Delta_i = 0 . \ \ \forall i = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots ; n$

18.5C INCOMPATIBLE

Si : $\Delta_s = 0 \ \wedge \ \Delta_i \neq 0$ para algún $i = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots ; n$

Observación:

Usando los conocimientos básicos de la Geometría Analítica, diremos en forma particular, que el sistema :

$a_1 x + b_1 y = c_1$ ..... Ecuación de una recta

$a_2 x + b_2 y = c_2$ ..... Ecuación de una recta

I) Sistema Compatible Determinado : $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ «Las rectas se cortan en un solo punto»

II) Sistema Compatible Indeterminado : $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ «Las rectas son coincidentes»

III) Sistema Incompatible : $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ «Las rectas son paralelas»

18.6) SISTEMAS DE MAS ECUACIONES QUE INCOGNITAS

Un sistema de más ecuaciones que incógnitas generalmente es incompatible.

Si se considera un sistema de "$n + k$" ecuaciones con "n" incógnitas, al resolver el sistema formado por las "n" primeras ecuaciones puede ocurrir que los "n" valores hallados, verifiquen a las "k" ecuaciones restantes o que no las verifiquen en su totalidad. En el primer caso se podrá afirmar que la solución hallada es la solución de todo el sistema, mientras que en el segundo caso el sistema resulta ser incompatible.

Ejemplo.- *Las ecuaciones :*

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - y = 18$$
$$4x + 7y = -1$$

Forman un sistema pues se verifican simultáneamente para : $x = 5 \wedge y = -3$

En consecuencia el sistema : $\begin{cases} 2x+3y = 1 \\ 3x - y = 18 \\ 4x+7y = -1 \end{cases}$

Admite solución; a pesar de tener más ecuaciones que incógnitas.

Ejemplo.- *Las ecuaciones :*

$$2x - y = 1$$
$$x + y = 8$$
$$x - 2y = 4$$

No forman un sistema pues no existe ningún valor para $x \wedge y$ que verifiquen simultáneamente a las 3 ecuaciones.

Debes observar que resolviendo las dos primeras ecuaciones se obtiene : $x = 3 \wedge y = 5$, sin embargo estos valores no verifican la tercera ecuación.

18.6A PROPIEDAD PARTICULAR.

Para que "n" ecuaciones de primer grado con "n - 1" incógnitas formen un sistema, es necesario que el determinante que se forma con los coeficientes de todas las incógnitas más los términos independientes sea igual a cero, y que alguno de los determinantes de orden : n - 1 formado con los coeficientes de las incógnitas sea diferente de cero.

Consideremos las siguientes ecuaciones :

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad .... (I)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad .... (II)$$
$$a_3x + b_3y = c_3 \quad .... (III)$$

En este caso tenemos 3 ecuaciones con 2 incógnitas, entonces estas forman un sistema, si se cumple que :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo.- *Las ecuaciones :*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x - y &= 18 \\ 4x + 7y &= -1 \end{aligned}$$

Forman un sistema pues : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 18 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Ejemplo.- *Las ecuaciones :*

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 8 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

No forman un sistema pues : $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$

18.7) SISTEMAS DE MÁS INCOGNITAS QUE ECUACIONES

Un sistema de más incógnitas que ecuaciones, generalmente es Compatible Indeterminado. Frecuentemente a este tipo de sistema se le llama : *Sistemas Indeterminados* o *Ecuaciones Diofánticas*.

Si se considera un sistema de "n" ecuaciones con "$n + k$" incógnitas y se resuelve el sistema de las "n" ecuaciones con las "n" primeras incógnitas, teniendo en cuenta que las "k" incógnitas restantes se asocian a los términos independientes, la solución dependerá de las "k" incógnitas. Luego dando valores a éstas últimas se podrán conocer a las primeras.

Ejemplo.- *Halle las soluciones del sistema :*

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}) \\ x - y \quad\;\; = 32 \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}) \end{cases} , \text{ si : } z \in \mathbb{N}$$

<u>Resolución</u>.-

Debemos observar que el sistema mostrado consta de 3 incógnitas y 2 ecuaciones :

De (I) : $x + y = z + 2$ .... (III)

Efectuando : (III) + (II) se consigue : $2x = z + 5 \Rightarrow x = \dfrac{z+5}{2}$ .... (IV)

Efectuando : (III) - (II) se consigue : $2y = z - 1 \Rightarrow y = \dfrac{z-1}{2}$ .... (V)

Finalmente de (IV) y (V) la solución del sistema será :

$$\left.\begin{array}{l} z = 1 \;;\; 2 \;;\; 3 \;;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; n \\ x = 3 \;;\; \frac{7}{2} \;;\; 4 \;;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \left(\frac{n+5}{2}\right) \\ y = 0 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; 1 \;;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \left(\frac{n-1}{2}\right) \end{array}\right\} n \in \mathbb{N}$$

18.8) SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS

Un sistema de ecuaciones lineales se llamará *homogénea* si todos los términos independientes son nulos, es decir :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

En todo sistema lineal homogéneo se admite como solución a :

$$x_1 = 0 \;;\; x_2 = 0 \;;\; x_3 = 0 \;;\ldots\ldots;\; x_n = 0$$

Todas las incognitas son iguales a cero, razón por la cual es llamada Solución Trivial o Impropia.

18.8A PROPIEDAD PARTICULAR

Si el Sistema Lineal Homogéneo mostrado anteriormente, admite soluciones aparte de la solución Trivial, se deberá cumplir que :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots\cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

En tal caso se podrá afirmar que el sistema es compatible indeterminado, es decir, acepta infinitas soluciones siendo todas ellas proporcionales entre sí.

18.9) FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sea el siguiente un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a la siguiente ecuación matricial :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots\cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\cdots\cdots a_{3n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A \cdot X = B}}$$

Donde :

A = Matriz de los coeficientes

X = Matriz de las incógnitas

B = Matriz de los términos independientes

Siendo el orden de la matriz A : $m \cdot n$, el de la matriz X : $n \cdot 1$ y el de la matriz B : $m \cdot 1$.

De acuerdo con lo expuesto en el item 17.11 , la solución de una ecuación matricial de la forma dada, es :

$$\boxed{\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}}$$

Ejemplo.- *Resolver matricialmente, el siguiente sistema :* $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$

<u>**Resolución**</u>.-

De acuerdo con lo expuesto, la ecuación matricial equivalente al sistema dado es :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}$$

Es decir: $\quad A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B \quad$ .... (*)

Hallemos A^{-1} : $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A) = \dfrac{1}{-19}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{5}{19} & \frac{-3}{19} \end{bmatrix}$

Luego la matriz incógnita X viene dada por :

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{5}{19} & -\frac{3}{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{....... (**)}$$

Finalmente sustituyendo (**) en (*) se consigue :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{de donde :} \quad x = 1 \;\wedge\; y = 2$$

$\therefore \quad$ **C.S. = (1 ; 2)**

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

11.- Determinar el valor de "m" para que el sistema : $\begin{cases} 3x+2my = n+2 \\ 5x+2(m+2)y = 30 \end{cases}$

sea indeterminado.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución.-

En atención a la observación (II), expuesta en el item 18.5, el sistema dado será indeterminado si se cumple que :

$$\underbrace{\frac{3}{5} = \frac{2m}{2(m+2)}} = \frac{n+2}{30}$$

De la igualdad indicada, se obtiene : $3(m+2) = 5m \Rightarrow m = 3$ **RPTA. C**

12.- ¿Qué condición debe cumplir "a" para que el sistema : $\begin{cases} 3ax+7y=1 \\ 2ax+5y=2 \end{cases}$ **, sea compatible determinado?**

A) a > 0 B) a < 0 C) a = 2 D) a ≠ 0 E) a ≠ 7

Resolución.-

En base a lo expuesto en el item 18.5A, el sistema dado será compatible determinado, si se cumple que :

$$\begin{vmatrix} 3a & 7 \\ 2a & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ , es decir : } 15a - 14a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$ **RPTA. D**

13.- Hallar las soluciones enteras no negativas de la siguiente ecuación : $5x - 3y = 10$, para luego indicar un valor de x.

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 11

Resolución.-

Observar que en la única ecuación dada existen 2 incógnitas, es decir, existen más incógnitas que ecuaciones.

Luego se puede deducir que la ecuación es indeterminada, en consecuencia ésta se resolverá asi : $5x - 3y = 10$

Es recomendable despejar la incógnita de menor coeficiente : $y = \dfrac{5x-10}{3}$

Transformando convenientemente al segundo miembro para que el análisis sea más fácil, se consigue : $y = (x-3) + \dfrac{2x-1}{3}$ ... (I)

Por condición $x \wedge y$, son números enteros, luego podemos deducir que el 2do sumando, también es un número entero, es decir : $\frac{2x-1}{3} = k$; (k # entero)

Despejando, tendremos : $x = \frac{3k+1}{2}$

Acomodando la expresión : $x = k + \frac{k+1}{2}$ ...... (II)

Nuevamente debemos reconocer que : $\frac{k+1}{2} = \text{T}$; (T # entero)

Despejando encontramos : $k = 2\text{T} - 1$

Luego reemplazando en (II), se obtiene : $x = (2\text{T} - 1) + \text{T}$ $\Rightarrow$ $x = 3\text{T} - 1$ .... (α)

Reemplazando (α) en (I), tendremos : $y = (3\text{T} - 1) - 3 + 2\text{T} - 1$ $\Rightarrow$ $y = 5\text{T} - 5$ .... (β)

Finalmente si en (α) y (β) damos valores enteros y positivos a "T", obtenemos valores enteros no negativos para $x \wedge y$.

T = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ....

x = 2 ; 5 ; 8 ; **11** ....

y = 0 ; 5 ; 10 ; 15 .... **RPTA. E**

14.- Luego de resolver la siguiente ecuación : 2x - 3y = 7 , en $\mathbb{Z}^+$; indicar cuál de los siguientes valores de "x" no verifica dicha ecuación.

A) 8 *B) 5* *C) 9* *D) 11* *E) 14*

Resolución.-

Siguiendo el mismo procedimiento del problema anterior, la ecuación dada se resolverá del siguiente modo :

Despejando la incógnita de menor coeficiente : $x = \frac{3y+7}{2}$

Acomodando, la expresión queda así : $x = (y + 3) + \frac{y+1}{2}$ .... (I)

Como $x \wedge y$ son $\mathbb{Z}^+$, deducimos que : $\frac{y+1}{2} = \text{T}$ / $\text{T} \in \mathbb{Z}^+$

Al despejar encontrarmos que : $y = 2\text{T} - 1$ .... (α)

Reemplazando (α) en (I) y despejando se consigue : $x = 3\text{T} + 2$ .... (β)

Finalmente dando valores $\mathbb{Z}^+$ a "T" en (α) y (β), obtenemos los valores buscados para $x \wedge y$:

T = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ....

x = 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; ....

y = 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ....

De los valores indicados en los distractores, el único valor para x que no satisface la ecuación es : $x = 9$ **RPTA. C**

15.- ¿Para qué valor de λ el sistema siguiente : $\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ \lambda y + z = 1 \\ \lambda z + x = \lambda \end{cases}$ ***, admite infinitas soluciones?***

A) 1 ***B) 0*** ***C) 2*** ***D) -1*** ***E) -2*** ***UNI 95-II***

Resolución.-

Podemos observar que el sistema dado presenta 3 ecuaciones y 3 incógnitas, por lo tanto éste tiene la apariencia que supone emplear el cálculo de determinantes para así utilizar el criterio expuesto en el item 18.5B; sin embargo este camino resultaría muy tedioso por el análisis que cada determinante requerirá. Por lo tanto creo aconsejable aplicar un método equivalente y más directo que nos conducirá de un modo igualmente preciso a la respuesta; para ello bastará con recordar lo visto en el item 14.4B relativo a la discusión de la solución de una ecuación de 1er grado, la cual establece que :

$x = -b/a$, es una ecuación compatible indeterminada con infinitas soluciones si : $a = 0 \wedge b = 0$

Luego sumando miembro a miembro las 3 ecuaciones del sistema dado, se consigue :

$$\lambda\ (x + y + z) + (x + y + z) = 1 + \lambda$$

$$\Rightarrow \qquad (\lambda + 1)(x + y + z) = (\lambda + 1) \qquad \text{............ (I)}$$

Podemos observar que el sistema admitirá infinitas soluciones si :

$$\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \qquad \textbf{RPTA. D}$$

16.- Siendo A una matriz y T un escalar, la solución del sistema : $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ***,***

es : $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ***. Dar el valor de verdad de :***

I) det (A) $\neq$ 0 y el sistema corresponde a dos rectas que se intersectan en un punto.

II) det (A) $\neq$ 0 y el sistema corresponde a dos rectas que no se intersectan.

III) det (A) $\neq$ 0 y el sistema corresponde a dos rectas que coinciden :

A) FVV ***B) VFF*** ***C) VVF*** ***D) FFV*** ***E) FVF***

Resolución.-

En primer lugar podemos decir que el sistema dado equivale a : $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ ..... (I)

En (I), hemos supuesto que : $\qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

De aquí podemos observar que : $\qquad \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Según todas las proposiciones : $\qquad \det(A) \neq 0$

Esto significa que : $\qquad a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{11} \cdot a_{22} \neq a_{21} \cdot a_{12}$

Dividiendo entre $a_{22} \cdot a_{21}$, tendremos : $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} \neq \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$ .... (II)

Teniendo en cuenta lo expuesto en la observación I del item 18.5, la relación (II) nos permite afirmar que el sistema presenta solución única .

Por dato, la solución del sistema (I) se obtiene de : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \cdot T \\ 1 \cdot T \end{bmatrix}$

De este sistema se deduce que : $x = 3 - 2T \quad \wedge \quad y = T$

Considerando la relación (II) y "T" como un valor fijo podemos concluir que : det(A) $\neq 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que se intersectan en un sólo punto.

RPTA. B

17.- Sea "m" un entero tal que el sistema de ecuaciones : $\begin{cases} 2x + 3y = 8......(I) \\ mx - y = 37....(II) \\ 3x + 8y = m....(III) \end{cases}$ ***; sea compatible si : $(x_0 \,;\, y_0)$ es la solución de dicho sistema. Hallar el valor de : $E = m - (x_0 + y_0)$***

A) 0 ***B) 1*** ***C) 2*** ***D) 30*** ***E) 4*** ***UNI 97-I***

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 18.6A, el sistema dado será compatible si se cumple que : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ m & -1 & 37 \\ 3 & 8 & m \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando el determinante por el método de Sarrus y resolviendo la ecuación, se obtiene : $m = 5$

Reemplazando en (I) : $2x + 3y = 8$

Reemplazando en (II) : $5x + y = 37$

Resolviendo este último sistema por el método de reducción, se obtiene : $x = 7 \quad \wedge \quad y = -2$

Finalmente el valor pedido será : $E = 5 - (7 - 2) =$ **0** **RPTA. A**

MISCELANEA

18.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{3x-2y+3} + \dfrac{5}{x+4y-7} = -\dfrac{4}{21} \quad \text{............ (I)} \\ \dfrac{7}{3x-2y+3} - \dfrac{3}{x+4y-7} = \dfrac{8}{15} \quad \text{............ (II)} \end{cases}$$

Indicar el valor de : x - y

A) 1 B) -1 C) 7 D) -1 E) 14

Resolución.-

Nuestra estrategia para resolver el sistema consistirá en aplicar el método de reducción expuesto en el item 18.4C. Veamos :

Efectuando : 3 × (I) + 5 × (II), se obtiene : $\dfrac{9}{3x-2y+3} + \dfrac{35}{3x-2y+3} = -\dfrac{12}{21} + \dfrac{40}{15}$

Efectuando las operaciones indicadas : $\dfrac{44}{3x-2y+3} = \dfrac{44}{21}$

Despejando, encontramos que : $3x - 2y + 3 = 21$ .... (α)

Reemplazando (α) en (I) , se consigue : $\dfrac{3}{21} + \dfrac{5}{x+4y-7} = -\dfrac{4}{21}$

Transponiendo términos y efectuando : $\dfrac{5}{x+4y-7} = -\dfrac{1}{3}$

Y despejando encontramos que : $x + 4y - 7 = -15$ .... (θ)

Resolviendo (α) y (θ), por el mismo método de reducción, tendremos :

$$\begin{array}{lcl} 3x - 2y = 18 & \xrightarrow{\text{por } 2} & 6x - 4y = 36 \quad \text{............. } (\beta) \\ x + 4y = -8 & \longrightarrow & x + 4y = -8 \quad \text{............. } (\gamma) \\ \hline \end{array}$$

$$\Sigma : \quad 7x = 28 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Reemplazando este resultado en (γ), se tendrá : $y = -3$

Finalmente el valor pedido será : $x - y = 4 - (-3) =$ **7** **RPTA. C**

19.- Determinar el valor de "k" para qué el sistema :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \quad \text{.............(I)} \\ x - y + z = 0 \quad \text{.............(II)} \\ 3x + ky + z = 0 \quad \text{.............(III)} \end{cases}$$

sea indeterminado.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Resolución.-

Según lo expuesto en el item 18.A, el sistema lineal homogéneo dado, será indeterminado si se cumple que :

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante según el método de Sarrus, se consigue :

$$(-2 + 3k - 15) - (-9 - 5 + 2k) = 0$$

Efectuando las operaciones indicadas y reduciendo, nos queda :

$$k - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 3} \quad \textbf{RPTA. D}$$

20.- Calcular el valor de : x y z, del sistema :

$$\begin{cases} 2x + 3y - \ z = -3 \text{ ....(I)} \\ 3x - 4y + \ z = \ \ 9 \text{ ....(II)} \\ 5x + 2y + 3z = \ \ 9 \text{ ....(III)} \end{cases}$$

A) -5 B) 1 C) 2 D) -2 E) -1

Resolución.-

Dada las características del sistema dado, aplicaremos la regla de Cramer. Para ello hallaremos los determinantes :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_s = -66 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 9 & -4 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_x = -66$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_y = 66 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_z = -132$$

Finalmente : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta_s} \Rightarrow x = 1 \quad \wedge \quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_s} \Rightarrow y = -1$

$z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta_s} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow$ El valor pedido es : $x\,y\,z = \boxed{-2}$

RPTA. D

21.- Dados los sistemas :

$$\begin{cases} x - \ y = a \text{ ....(I)} \\ x - 3y = b \text{ ....(II)} \end{cases} \wedge \begin{cases} by - x = c \text{ ....(III)} \\ \ x + y = 6 \text{ ....(IV)} \end{cases} ;$$

calcular "c" sabiendo que son equivalente. Además : 2a + b = - 14

A) 42 B) -7 C) 7 D) -35 E) -42

Resolución.-

De acuerdo con el item 18.2C, los sistemas dados, serán equivalentes si ellos admiten las mismas soluciones. Corresponde entonces resolver cada sistema para luego igualar sus soluciones. Veamos :

Resolvamos el 1er sistema según el método de reducción, haciendo (I) - (II) : $2y = a - b$

Despejando encontramos que : $y = \frac{a-b}{2}$

Reemplazando este resultado en (I) : $x - \frac{a-b}{2} = a$

Transponiendo términos, obtenemos : $x = \frac{3a-b}{2}$

Luego la solución del sistema será : $x = \frac{3a-b}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{a-b}{2}$ ... (α)

Ahora resolveremos el 2do sistema por el mismo método de reducción, haciendo (III) + (IV) : $(b+1)y = c+6$

Y despejando, encontramos que : $y = \frac{c+6}{b+1}$

Reemplazando este resultado en (IV) : $x + \frac{c+6}{b+1} = 6$

Luego de despejar y efectuar operaciones : $x = \frac{6b-c}{b+1}$

Luego la solución del sistema será : $x = \frac{6b-c}{b+1} \quad \wedge \quad y = \frac{c+6}{b+1}$ ... (θ)

Seguidamente y por condición del problema, de (α) y (θ), tendremos :

Igualando las x : $\frac{3a-b}{2} = \frac{6b-c}{b+1}$ .... (V)

Igualando las y : $\frac{a-b}{2} = \frac{c+6}{b+1}$ .... (VI)

Efectuando : (V) + (VI) conseguimos : $\frac{4a-2b}{2} = \frac{6b+6}{b+1}$

Simplificando, obtenemos que : $2a - b = 6$ .... (β)

Pero por dato se sabe que : $2a + b = -14$ .... (γ)

Sumando miembro a miembro, se obtiene : $4a = -8 \Rightarrow a = -2$

Reemplazando en (γ) se tendrá : $b = -10$

Finalmente reemplazando estos resultados en (V), se obtendrá el valor de : c $\quad \frac{3(-2)-(-10)}{2} = \frac{6(-10)-c}{-10+1}$

Efectuando y despejando concluímos que : $2 = \frac{60+c}{9} \Rightarrow$ $\mathbf{c = -42}$

RPTA. E

22.- Resolver : $\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} & \text{............ (I)} \\ mx + ny + pz = 3 & \text{............ (II)} \end{cases}$

Para luego indicar el valor de : y

A) $\dfrac{b}{ma+mb+pc}$ *B)* $\dfrac{2b}{m+a+b}$ *C)* $\dfrac{3b}{mn+abc}$

D) $\dfrac{3b}{ma+nb+pc}$ *E)* $\dfrac{b}{ma+nb+pc}$

Resolución.-

La presentación de las ecuaciones no permiten reconocer fácilmente que se trata de un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Ahora dadas las características de estas ecuaciones, procederemos a su resolución utilizando para ello un parámetro k ; veamos :

De (I) , tendremos que : $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = k$

Despejando, tendremos : $x = ak \;\wedge\; y = bk \;\wedge\; z = ck$ ...(III)

Reemplazando (III) en (II) se consigue : $mak + nbk + pck = 3$

Factorizando k , tendremos : $(ma + nb + pc)\,k = 3$

Despejando, nos queda : $k = \dfrac{3}{ma+nb+pc}$

Finalmente reemplazando este resultado en (III) : $y = \dfrac{3b}{ma+nb+pc}$ **RPTA. D**

23.- Luego de resolver el sistema : $\begin{cases} 12\,(x+y) = 5xy \text{ ....(I)} \\ 18\,(y+z) = 5yz \text{ ....(II)} \\ 36\,(x+z) = 13xz \text{ ....(III)} \end{cases}$;

el valor de : x + y - z , es :

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución.-

Procediendo del mismo modo como se hizo en el Prob. 3, reacomodamos cada ecuación dada, con la finalidad de tener incógnitas y números en distintos miembros de la igualdad. Veamos :

Dividiendo (I) por $12xy$: $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{12}$ .... (α)

Dividiendo (II) por $18yz$: $\dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{5}{18} \Rightarrow \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{18}$ .... (β)

Dividiendo (III) por $36xz$: $\dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{13}{36} \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{36}$ .... (θ)

Efectuando : (α) + (β) + (θ), se tiene : $\dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} = \dfrac{5}{12} + \dfrac{5}{18} + \dfrac{13}{36}$

Luego de efectuar operaciones, obtenemos : $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{38}{36}$

Simplificando, nos queda : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{19}{36}$ .... (γ)

Esta última expresión será la clave para poder determinar cada una de las incógnitas. Para ello requeriremos sustituir sucesivamente las expresiones anteriores en (γ). Observa :

Reemplazando (α) en (γ) : $\frac{5}{12}+\frac{1}{z}=\frac{19}{36} \Rightarrow z=9$

Reemplazando (β) en (γ) : $\frac{1}{x}+\frac{5}{18}=\frac{19}{36} \Rightarrow x=4$

Reemplazando (θ) en (γ) : $\frac{1}{y}+\frac{13}{36}=\frac{19}{36} \Rightarrow y=6$

Finalmente el valor pedido, será : $x+y-z=4+6-9=$ **1** **RPTA. A**

24.- Halle "x" del sistema :
$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=24 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)\\(z+1)(x+1)=18 \ldots\ldots\ldots\ldots(II)\\(y+1)(z+1)=12 \ldots\ldots\ldots\ldots(III)\end{cases}$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

Resolución.-

Empleando el mismo argumento del Prob. 6, multiplicaremos miembro a miembro todas las ecuaciones del sistema, de este modo se obtendrá una expresión en donde luego se podrá sustituir cualquiera de las ecuaciones originales para determinar el valor de cada incógnita. Veamos :

Multiplicando (I) × (II) × (III) : $(x+1)^2\ (y+1)^2\ (z+1)^2=24 \cdot 18 \cdot 12$

Aplicando los teoremas de exponentes : $[(x+1)(y+1)(z+1)]^2=(12)^2 \cdot 36$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros, se consigue : $(x+1)(y+1)(z+1)=72 \quad \ldots \text{(IV)}$

Luego como se pide el valor de "x" será suficiente: dividir (IV) entre (III) : $\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(y+1)(z+1)}=\frac{72}{12}$

Simplificando, tendremos que : $x+1=6 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x=5}$ **RPTA. E**

25.- Luego de resolver el sistema :
$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+5\sqrt[3]{z}=39 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)\\\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=31 \ldots\ldots\ldots\ldots(II)\\5\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=7 \ldots\ldots\ldots\ldots(III)\end{cases}$$
; calcular el valor de : $x\,y+z$

A) 118 *B) 218* *C) 318* *D) 128* *E) 228*

Resolución.-

Sumando todas las ecuaciones del sistema tenemos : $7\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)=77$

Simplificando, se consigue establecer que : $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=11 \quad \ldots \text{(IV)}$

A continuación reacomodaremos cada ecuación del sistema con la finalidad de reemplazar en ellas la relación (IV); observa :

Reacomodando la ecuación (I) : $\underbrace{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}} + 4\sqrt[3]{z} = 39$ ......(*)

Reemplazando (IV) en (*), tendremos : $11 + 4\sqrt[3]{z} = 39 \Rightarrow 4\sqrt[3]{z} = 28$

Simplificando y elevando al cubo : $z = 7^3 \Rightarrow z = 343$

Reacomodando la ecuación (II) : $\underbrace{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}} + 4\sqrt[3]{y} = 31$ ......(**)

Reemplazando (IV) en (**), tendremos : $11 + 4\sqrt[3]{y} = 31 \Rightarrow 4\sqrt[3]{y} = 20$

Simplificando y elevando al cubo : $y = 5^3 \Rightarrow y = 125$

Reacomodando la ecuación (III) : $\underbrace{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}} + 4\sqrt[3]{x} = 7$ ......(***)

Reemplazando (IV) en (***), tendremos : $11 + 4\sqrt[3]{x} = 7 \Rightarrow 4\sqrt[3]{x} = -4$

Simplificando y elevando al cubo : $x = -1$

Finalmente el valor pedido será : $xy + z = (-1)(125) + 343 =$ **218** **RPTA. B**

26.- Indicar el valor de "a" para : x = 5 en el sistema : $\begin{cases} (2a+1)x-(a+3)y = 1 \text{ ....(I)} \\ (2a-1)x-(a+2)y = -1 \text{ ....(II)} \end{cases}$

A) 7 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 11***

Resolución.-

Dado que el valor de "x" es conocido, trataremos de eliminar "y" con la finalidad de obtener una nueva ecuación en función de la incógnita "a". Veamos :

Haciendo transposición de términos en (I), tendremos : $(2a+1)x - 1 = (a+3)y$

Haciendo transposición de términos en (II), obtenemos : $(2a-1)x + 1 = (a+2)y$

Ahora dividiendo miembro a miembro estas dos ecuaciones, obtenemos : $\dfrac{(2a+1)\;x-1}{(2a-1)\;x+1} = \dfrac{(a+3)\;y}{(a+2)\;y}$

Simplificando "y" y sustituyendo $x = 5$, se obtiene : $\dfrac{(2a+1)\cdot 5-1}{(2a-1)\cdot 5+1} = \dfrac{a+3}{a+2}$

Efectuando operaciones : $5(2a+1)(a+2) - a - 2 = 5(2a-1)(a+3) + a + 3$

Reduciendo términos, encontramos : $8 - a = a - 12 \Rightarrow$ $\boldsymbol{a = 10}$ **RPTA. D**

27.- Del sistema : $\begin{cases} 4(3x+2y) = 7xy \text{ ....(I)} \\ 6(5x+2z) = 11xz \text{ ....(II)} \\ 12(5y+3z) = 19yz \text{ ....(III)} \end{cases}$ ***; calcular el valor de :*** $2x^{-1} + 3y^{-1} + 5z^{-1}$

A) $\frac{12}{31}$ *B)* $\frac{6}{31}$ *C)* $\frac{31}{12}$ *D)* $\frac{31}{6}$ *E)* $\frac{21}{5}$

Resolución.-

Transformando cada ecuación del sistema así :

De (I) : $\frac{3x+2y}{xy} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{3}{y} + \frac{2}{x} = \frac{7}{4} \Rightarrow 2 . x^{-1} + 3y^{-1} = \frac{7}{4}$ ...... (α)

De (II) : $\frac{5x+2z}{xz} = \frac{11}{6} \Rightarrow \frac{5}{z} + \frac{2}{x} = \frac{11}{6} \Rightarrow 2x^{-1} + 5z^{-1} = \frac{11}{6}$ ...... (β)

De (III) : $\frac{5y+3z}{yz} = \frac{19}{12} \Rightarrow \frac{5}{z} + \frac{3}{y} = \frac{19}{12} \Rightarrow 3y^{-1} + 5z^{-1} = \frac{19}{12}$ ...... (θ)

Sea "T" el valor pedido, es decir : $T = 2x^{-1} + 3y^{-1} + 5z^{-1}$ ...... (γ)

Efectuando (α) + (β) + (θ) se consigue : $2\left(2x^{-1}+3y^{-1}+5z^{-1}\right) = \frac{7}{4} + \frac{11}{6} + \frac{19}{12}$ .... (*)

Reemplazando (*) en (γ), tendremos : $2T = \frac{7}{4} + \frac{11}{6} + \frac{19}{12}$

Finalmente se tendrá : $2T = \frac{62}{12} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{31}{12}}$ **RPTA. C**

28.- Dado el sistema : $\begin{cases} x(x+2y+3z) = 80 \text{ ....(I)} \\ 2y(x+2y+3z) = 32 \text{ ....(II)} \\ 3z(x+2y+3z) = 144 \text{ ....(III)} \end{cases}$ ***, encontrar el valor positivo de z.***

A) 3 *B) 2* *C) 5* *D) 7* *E) 6*

Resolución.-

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones del sistema y factorizando, se consigue : $(x + 2y + 3z)\,[x + 2y + 3z] = 80 + 32 + 144$

Efectuando el producto indicado, tendremos : $(x + 2y + 3z)^2 = 256$

Extrayendo raíz cuadrada, se obtiene : $x + 2y + 3z = 16$ ... (IV)

Finalmente reemplazando (IV) en (III), obtendremos el valor de z : $3z\,(16) = 144$

De donde concluímos que : $48z = 144 \Rightarrow \mathbf{z = 3}$ **RPTA. A**

29.- Halle el valor de "x" del sistema : $\begin{cases} x + y + z = 0 \text{ ....(I)} \\ ax + by + cz = 0 \text{ ....(II)} \\ bcx + acy + abz = 1 \text{ ....(III)} \end{cases}$

A) $\frac{1}{(a-b)(c-a)}$ *B)* $\frac{1}{(a-b)(a-c)}$ *C)* $\frac{1}{abc}$ *D)* $\frac{1}{(a+b)(a+c)}$ *E) N.A.*

Resolución.-

Para resolver este sistema aplicaremos el método de los determinantes conocida como la "Regla de Cramer". Según este método, se sabe que :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

A continuación hallaremos los determinantes y estos se calcularán según Sarrus :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_s = (a-b)(a-c)(c-b) \quad \ldots. (\alpha)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ 1 & ac & ab \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_x = c-b \quad \ldots. (\beta)$$

Ahora reemplazamos (α) y (β) en (IV) : $x = \dfrac{c-b}{(a-b)(a-c)(c-b)}$

Finalmente al simplificar, nos queda : $x = \dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$ **RPTA. B**

30.- Para qué valor de "n" las ecuaciones : $\begin{cases} nx+y=1 \ldots\ldots\ldots (I) \\ x+y=2 \ldots\ldots\ldots (II) \\ x-y=n \ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$ ***, forman un sistema.***

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

Resolución.-

De acuerdo a lo expuesto en el item 18.6A I, II ∧ III forman un sistema si se cumple que :

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante según Sarrus, se consigue :

$$\begin{array}{c} n \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 2 \\ 1 \quad -1 \quad n \\ n \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \\ -2n \\ n \end{array}\right. \quad \Sigma = 1-n \\ 2\cdot(-1)\cdot n = -2n \\ n\cdot 1\cdot 1 = n \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} n^2 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right\} \Leftarrow \begin{array}{l} n\cdot 1\cdot n = n^2 \\ 1\cdot(-1)\cdot 1 = -1 \\ 1\cdot 1\cdot 2 = 2 \end{array} \quad \Sigma = n^2+1$$

$$\Rightarrow (n^2+1) - (1-n) = 0$$

Reduciendo encontramos que : $n^2 + n = 0$

Factorizando n, tendremos : $n(n+1) = 0$

Al igualar a cero cada factor, deducimos que : $n = 0 \quad \vee \quad n = -1$ **RPTA. B**

31.- Luego de resolver el sistema : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \ldots\ldots\ldots (I) \\ 2x + 5y + 3z = 2 \ldots\ldots\ldots (II) \\ x + 8z \quad = 7 \ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$ ***, por el método matricial;***

indicar el valor de : $x + z + y$

A) -31 ***B) 31*** ***C) 55*** ***D) 72*** ***E) 12***

Resolución.-

La condición del problema nos sugiere emplear el método matricial en su resolución, teniendo en cuenta esta técnica el sistema se deberá expresar asi :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \ldots\ldots\ldots (I) \\ 2x + 5y + 3z = 2 \ldots\ldots\ldots (II) \\ x + 0y + 8z = 7 \ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$$

De donde debemos plantear :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Y teniendo en cuenta la solución de este sistema, nuestra nueva igualdad será :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \ldots (\alpha)$$

Como se puede apreciar en esta última igualdad es necesario hallar a la matriz inversa de la matriz formada con los coefientes de las incógnitas. De este modo, sea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto , se establece que :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1}$$

De acuerdo con la definición :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ Adj.}(A)$$

Apicando la definición a nuestra matriz conseguimos :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \ldots\ldots (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α) :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto indicado tendremos :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ -18 \\ -6 \end{bmatrix}$$

De aqui es fácil deducir que : $x = 55$, $y = -18$ $\wedge$ $z = -6$

Finalmente el valor pedido será : $\boldsymbol{x + y + z = 31}$ **RPTA. B**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Calcular : $x - y$ de : $\begin{cases} 10x + 9y = 8 \\ 8x - 15y = -1 \end{cases}$

A) 6 B) $\frac{1}{2}$ C) 3 D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

2.- ¿Qué valor de "x" satisface el sistema :

$$\begin{cases} 9x - 4y = 2 \\ 3x + 8y = 3 \end{cases} \quad ?$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

3.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ 4z + 6y + 4z = 5 \end{cases} ;$$

calcular el valor de : $\frac{x}{yz}$

A) 6 B) 12 C) 4 D) 3 E) 12

4.- Calcular el valor de "$x + y$" del sistema :

$$\frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = \frac{3}{2} \quad \wedge \quad \frac{4}{\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

5.- Calcular $x^2 + y^2$ del sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y} + \dfrac{4}{2x-3y} = 5 \\ \dfrac{15}{2x+y} + \dfrac{2}{2x-3y} = 5 \end{cases}$$

A) 10 B) 17 C) 26 D) 5 E) 2

6.- Encontrar el valor de "x" del sistema :

$$\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 3x + my = 4 \end{cases} ; \quad m \neq 0$$

A) $\frac{3m-8}{m+6}$ B) $\frac{3m+8}{m-6}$ C) $\frac{3m+8}{m^2+6}$

D) $\frac{3m+8}{m+6}$ E) N.A.

7.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab \\ (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2 - b^2) \end{cases} ;$$

indicar el valor de "y"

A) $a + b$ B) $a - b$ C) $a + ab$

D) $b + ab$ E) $b - a$

8.- Si : $(x_0 ; y_0)$ es la solución del sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{m}{x-a} + \dfrac{n}{y-b} = \dfrac{m-n}{b-a} \\ \dfrac{r}{x-a} - \dfrac{p}{y-b} = \dfrac{r+p}{b-a} \end{cases}$$

calcular : $ab - x_0\, y_0$

A) 0 B) $\frac{ab}{2}$ C) $-ab$ D) $ab - 1$ E) N.A.

9.- Hallar "x" del sistema : $\begin{cases} 1/x + 1/y = 5 \\ 1/y + 1/z = 7 \\ 1/x + 1/z = 6 \end{cases}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{16}$ E) 2

10.- Halle el valor de "x" del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

A) $\frac{(c+d)\ (c-d)}{a+b}$ B) $\frac{(c-d)\ (a-b)}{(b-d)\ (a-c)}$

C) $\frac{c-d}{b-a}$ D) $\frac{b}{c}$ E) $\frac{(c-d)\ (b-d)}{(c-a)\ (b-a)}$

NIVEL B

11.- Calcular el valor de : $x-y+z-w$, del sistema :

$$\begin{cases} x+y+x=-2 \\ y+z+w=\ 8 \\ z+w+x=\ 7 \\ w+x+y=\ 2 \end{cases}$$

A) -3 B) -5 C) 3 D) 5 E) -8

12.- Si : $(x_0\ ;\ y_0)$ es la solución del siguiente

sistema : $\begin{cases} \sqrt{x+\ y-\ 2\sqrt{xy}}=\sqrt{y} \\ \sqrt{4x+9y-12\sqrt{xy}}=\ 7 \end{cases}$;

calcular el valor de : x_0-2y_0

A) 93 B) 96 C) 98 D) 102 E) 125

13.- Halle w del sistema : $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=\ 8 \\ z+v=\ 9 \\ v+w=11 \\ x+w=\ 9 \end{cases}$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 16 E) 3

14.- Calcular $x+y+z$ a partir del sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{5x+2y}=6 \\ \dfrac{xz}{3x+2z}=8 \\ \dfrac{yz}{3y+5z}=6 \end{cases}$$

A) 24 B) 64 C) 48 D) 128 E) 36

15.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3x+y-2}+\dfrac{3}{x+4y+1}=-\dfrac{7}{24} \\ \dfrac{1}{3x+y-2}-\dfrac{2}{x+4y+1}=-\dfrac{7}{12} \end{cases} ;$$

indicar el valor de : $2x+y$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 0

16.- Halle el valor de x del sistema :

$$\frac{x+y-1}{x-y+1}=a \quad \wedge \quad \frac{x+y-1}{x-y+1}=ab$$

A) $\dfrac{a+1}{ab+1}$ B) $\dfrac{a-1}{ab+1}$ C) $\dfrac{a+1}{ab-1}$

D) $\dfrac{a+1}{a+b}$ E) $\dfrac{b+1}{ab+1}$

17.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3 \\ x-by+b^2z=b^3 \\ x-cy+c^2z=c^3 \end{cases} ;$$

indicar el valor de : $\dfrac{x-abc}{y\ .\ z}$

A) 0 B) abc C) $a+b+c$

D) $ab+bc+ac$ E) NA.

18.- ¿Qué valor debe asignarse al parámetro k a

fin que el sistema : $\begin{cases} (2k+2)x+5y=7 \\ (k+2)x+4y=8 \end{cases}$,

no admita solución?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19.- Si el sistema : $\begin{cases} 3kx+2y+1=0 \\ (2k+1)x-8y-3=0 \end{cases}$,

admite solución única, el parámetro k es :

A) $\dfrac{1}{14}$ B) $k\in\mathbb{R}$ C) $\dfrac{1}{7}$

D) $k\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{7}\right\}$ E) $k\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{14}\right\}$

20.- Calcular : $a-b$, si el siguiente sistema :

$$\begin{cases} 3x+5y=\ 1 \\ ax-by=10 \end{cases},$$

admite infinita soluciones.

A) 20 B) 40 C) 30 D) 60 E) 80

21.- Si el sistema :

$$\begin{cases} (a+b)x + \ \ (a-b)y = 42 \\ (2a+b)x + (3a-2b)y = 113 \end{cases},$$

admite como solución a : $x = -2 \ \wedge \ y = 5$. Calcular el valor de : $a+b$.

A) 7 B) 10 C) 11 D) 3 E) 4

22.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w = 40 \\ 2x+3y+4z+w = 34 \\ 3x+4y+z+2w = 32 \\ 4x+y+2z+3w = 34 \end{cases};$$

el valor que no corresponde a una de sus incógnitas es :

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23.- Del sistema : $\begin{cases} mx - y + 3z = 9 \\ 3x - z = 0 \\ x + y - nz = 0 \end{cases},$

donde : x , $y \wedge z$; son valores positivos que están en progresión aritmética y que cumplen la condición de que su producto es igual a su suma, ¿Qué valor asume : $m+n$?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

24.- En el sistema : $\begin{cases} 5x - 2y = m \\ x + 9y = m \end{cases};$

¿Qué valor debe asignarse a "m" para que x exceda en 7 a y ?

A) 40 B) 47 C) 53 D) 55 E) 63

25.- Si : $x \in \mathbb{N}^* \ \wedge \ y \in \mathbb{N}^*$ ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación :

$$27x + 19y = 222 \ ?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) infinitas

NIVEL C

26.- Si : $(x \ ; \ y) \subset \mathbb{N}^*$ ¿Cuántas soluciones tendrá la siguiente ecuación : $x + y = 2\,000$

A) infinitas B) 2 000 C) 2 001

D) 1 999 E) 1 998

27.- Si en el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases},$$

$a \neq 1 \ \wedge \ a \neq -2$; hallar el valor de y.

A) $\dfrac{-a-1}{a+2}$ B) $\dfrac{a+1}{a+2}$ C) $\dfrac{a-1}{a+2}$

D) $\dfrac{1}{a+2}$ E) $\dfrac{a^2+1}{a+2}$

28.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 3\left(a^2+b^2\right) \\ ax - by = 2\left(a^2+b^2\right) \end{cases};$$

indicar el valor de x

A) $a+b$ B) $2a+b$ C) $a-b$

D) $2a-b$ E) $a+2b$

29.- Si el sistema : $\begin{cases} (n-5)x + 21y = 105 \\ 2x + \ \ 3y = m-1 \end{cases},$

es incompatible; es cierto que :

A) $\begin{cases} m = 16 \\ n = 19 \end{cases}$ B) $\begin{cases} m \neq 16 \\ n \neq 19 \end{cases}$ C) $\begin{cases} m = 16 \\ n \neq 19 \end{cases}$

D) $\begin{cases} m \neq 16 \\ n = 19 \end{cases}$ E) N.A.

30.- Halle z del sistema :

$$\begin{cases} (b+c)(y+z) - az = b-c \\ (a+c)(x+z) - by = c-a \\ (a+b)(x+y) - cz = a-b \end{cases}$$

A) $\dfrac{c-b}{a+b+c}$ B) $\dfrac{a-c}{a+b+c}$ C) $\dfrac{a+b}{a+b+c}$

D) $\dfrac{2b-a}{a+b+c}$ E) $\dfrac{b-a}{a+b+c}$

31.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} (a+c)y+(a+b)z-(b+c)x=2a^3 \\ (a+b)z+(b+c)x-(a+c)y=2b^3 \\ (b+c)x+(a+c)y-(a+b)z=2c^3 \end{cases} ;$$

indicar el valor de z

A) $a^2 = ab + b^2$ B) $a^2 + ab + b^2$

C) $a^2 - ab + 1$ D) $a^2 - ab - b^2$

E) $a^2 - 3ab + b^2$

32.- Calcular el valor de : $x - y + z$ de :

$$x + y = y + z + 4 = x + z - 8 = 6$$

A) 11 B) 14 C) 15 D) 17 E) 9

33.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} 2x- \ y+ \ 3z=1 \\ 5x+4y- \ 6z=7 \\ x+5y+11z=8 \end{cases} ;$$

indicar el valor de : $x + y + z$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

34.- Calcular la suma de todos los valores de "n" que hacen que el sistema :

$$\begin{cases} x+ \ (n+1)y=0 \\ (1-n)x+ \ \ ny \ = 1+n \\ (1+n)x+(12-n)y=-n-1 \end{cases} ,$$

sea compatible.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

35.- Calcular el valor de : $m + n$ del sistema :

$$\begin{cases} mx+3y+2z=a \\ 3x+my+ \ z=b \\ 2x+3y+nz=c \end{cases} ,$$

sabiendo que : $z = 2x = 3y \ \wedge \ b = \frac{3}{5}a = -\frac{c}{6}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

36.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{5x+3y+z-4} + \dfrac{5}{2x-y+3z+7} = -\dfrac{13}{6} \\ \dfrac{4}{2x-y+3z+7} + \dfrac{2}{4x-2y+z-5} = -\dfrac{43}{30} \\ \dfrac{1}{5x+3y+z-4} + \dfrac{6}{4x-2y+z-5} = -\dfrac{7}{15} \end{cases}$$

indicar el valor de : $x \cdot y \cdot z$

A) 6 B) -4 C) -12 D) -12/5 E) 24

37.- Halle el valor de "n" para que en el siste-

ma : $\begin{cases} 3x+7y+2z=1 \\ 2x+3y+7z=1 \\ nx+2y+3z=0 \end{cases}$,

se cumpla que : $y = z$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) N.A.

38.- Calcular el valor de : $x \cdot y$ del sistema :

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{5x+25y} = \sqrt{5}+25 \\ \sqrt{x+5y} - \sqrt{5x+5y} = 5\sqrt{5}-5 \end{cases}$$

A) 25 B) 0 C) -750 D) -625 E) -120

39.- Siendo x é y dos números reales que verifican :

$$\sqrt{2x} + 2\sqrt{1-x-y} + \sqrt{3y} = 3 \ ;$$

calcular el valor de : $x - 3xy + y$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 2

40.- Si el sistema : $\begin{cases} x+ \ y+nz=2 \\ 2x+3y- \ z=1 \\ 3x+4y+2z=n \end{cases}$,

admite solución única, n podrá ser :

A) cualquier número real

B) 2

C) cualquier número real diferente de 2

D) cualquier número real diferente de 3

E) cualquier número real diferente de -3

19 Sistemas de Grado Superior

19.1) DEFINICION

Se llama sistema de ecuaciones de grado superior al sistema de ecuaciones formado por dos o más ecuaciones, donde al menos una de ellas es de grado mayor o igual que dos.

19.2) MÉTODO DE RESOLUCIÓN

Para resolver un sistema de grado superior se recomienda despejar una de las incógnitas de aquella ecuación de menor grado para luego reemplazarla en alguna otra ecuación con la finalidad de obtener una nueva ecuación que esté en función de una incógnita menos.

A continuación se indican los métodos de resolución para aquellos sistemas compuestos por :

19.2A UNA SUMA Y UN PRODUCTO

Estos sistemas están compuestos por dos ecuaciones : una suma y un producto, con dos variables cada una; donde la suma es de primer grado y el producto de segundo grado. En estos casos se recomienda formar una ecuación cuadrática en la cual sus soluciones sean las soluciones del sistema, pero con una doble alternativa.

Otro método para resolver este sistema consiste en despejar de la suma una de las incógnitas y reemplazarla en el producto con la finalidad de obtener una nueva ecuación con una sola incógnita.

19.2B POLINOMIOS HOMOGÉNEOS DEL MISMO GRADO.

En estos casos se recomienda expresar a una de las incógnitas como el producto de la otra incógnita por una constante $(y = kx)$; para luego reemplazarla en las ecuaciones y de este modo deducir los valores de k . Se puede notar que k asume tantos valores como lo indica el grado del sistema.

19.3) TEOREMA ADICIONAL

El número total de soluciones que presenta un sistema de ecuaciones estará expresado por el producto de los grados de todas las ecuaciones que conforman el sistema.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Resolver el sistema : $\begin{cases} x+y=11 \\ xy=28 \end{cases}$

A) $x=7\,;\,y=4$ ***B)*** $x=4\,;\,y=7$ ***C)*** $x=2\,;\,y=14$ ***D)*** $x=y=\sqrt{2}+4$ ***E)*** $x=y=1$

Resolución.-

Según las recomendaciones expuestas en el item 19.2A, formaremos una ecuación cuadrática en "T", para lo cual será necesario recordar la reconstrucción de una ecuación cuadrática, expuesta en el item 15.5. Para ello supondremos que x e y son las raíces de dicha ecuación, tal que:

$$T^2 - ST + P = 0 \;;\; \text{donde :} \begin{cases} S = x+y = 11 \\ P = xy = 28 \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos, tendremos : $T^2 - 11T + 28 = 0$

Luego resolviendo esta ecuación cuadrática según el criterio del aspa simple, obtenemos :

$$(T-7)\;(T-4) = 0$$

Igualando a cero cada factor, deducimos que : $T_1 = 7 \;\wedge\; T_2 = 4 \;\vee\; T_1 = 4 \;\wedge\; T_2 = 7$

Finalmente el conjunto solución del sistema, será : $\text{C.S.} = \{(7\,;4) \vee (4\,;7)\}$ **RPTA. C**

2.- ¿Cuántas soluciones reales tiene el sistema : $\begin{cases} x+y=19 \\ xy=15 \end{cases}$ ***?***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) N.A.***

Resolución.-

Siguiendo el mismo procedimiento del problema anterior, plantearemos :

$$T^2 - ST + P = 0 \;;\; \text{donde :} \begin{cases} S = x+y = 19 \\ P = xy = 15 \end{cases}$$

Reemplazando datos : $T^2 - 19T + 15 = 0$

Resolviendo esta ecuación por la fórmula de Carnot, se obtiene : $T = \dfrac{19 \pm \sqrt{21}}{2}$

En consecuencia se establece que : $T_1 = \dfrac{19+\sqrt{21}}{2} \;\wedge\; T_2 = \dfrac{19-\sqrt{21}}{2}$

O también : $T_1 = \dfrac{19-\sqrt{21}}{2} \;\wedge\; T_2 = \dfrac{19+\sqrt{21}}{2}$

Finalmente el conjunto solución del sistema será :

$$\text{C.S.} = \left\{\left(\frac{19+\sqrt{21}}{2}\,;\,\frac{19-\sqrt{21}}{2}\right),\;\left(\frac{19-\sqrt{21}}{2}\,;\,\frac{19+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$$ **RPTA. B**

3.- Si $(x_0 ; y_0)$ es la solución del sistema : $\begin{cases} x+y=3.....(I) \\ xy=2.....(II) \end{cases}$ **, donde : $x_0 > y_0$; calcular :**

$2x_0 - 3y_0$

A) 7 **B) 2** **C) 0** **D) 1** **E) 5**

Resolución.-

El sistema se resolverá mediante el método de la reducción, para lo cual, de (I) despejamos "x" : $x = 3 - y$ ... (III)

Reemplazando (III) en (II), tendremos : $(3 - y)\,y = 2$

Efectuando operaciones, se establece que : $y^2 - 3y + 2 = 0$

Resolviendo la ecuación según el criterio del aspa simple se consigue : $(y - 1)(y - 2) = 0$

Igualando a cero cada factor concluímos que : $y = 1 \;\vee\; y = 2$

Reemplazando $y = 1$ en (III), obtenemos : $x = 2$

Reemplazando $y = 2$ en (III), obtenemos : $x = 1$

Sin embargo, por condición del problema $x > y$, en consecuencia la solución del sistema será : $x = 2 \;;\; y = 1$

Finalmente lo solicitado será : $2x_0 - 3y_0 = \boxed{1}$ **RPTA. D**

4.- Si $(x_0 ; y_0)$ es la solución del sistema : $\begin{cases} x+y=12..............(I) \\ (x+4)(y+8)=24..............(II) \end{cases}$ **,**

donde : $x_0 < y_0$; calcular : $x_0 - 2y_0$

A) $\sqrt{30}$ **B) $-\sqrt{30}$** **C) $-6\sqrt{30}$** **D) $6\sqrt{30}$** **E) $3\sqrt{30}$**

Resolución.-

Con la finalidad de obtener un sistema compuesto por la suma y el producto de dos expresiones, en la ecuación (I), sumamos 12 a ambos miembros :

$$x + y + 12 = 12 + 12$$

Agrupando convenientemente, tendremos : $(x + 4) + (y + 8) = 24$ .... (III)

Luego, con (II) y (III) formamos una ecuación cuadrática, tal que :

$$T^2 - ST + P = 0 \quad ; \quad \text{donde :} \begin{cases} S=(x+4)+(y+8)=24 \\ P=(x+4)\,(y+8)=24 \end{cases}$$

Es decir : $T^2 - 24T + 24 = 0$

Resolviendo esta ecuación por la fórmula de Carnot, se obtiene :

$$T = \frac{24 \pm 4\sqrt{30}}{2} = 12 \pm 2\sqrt{30}$$

En consecuencia : $T_1 = 12 + 2\sqrt{30} \quad \vee \quad T_2 = 12 - 2\sqrt{30}$ .... (IV)

$T_1 = 12 - 2\sqrt{30} \quad \vee \quad T_2 = 12 + 2\sqrt{30}$ .... (V)

Recordando que $(x + 4) \wedge (y + 8)$, son las raíces de la ecuación cuadrática, se establece que :

De (IV) : $x + 4 = 12 + 2\sqrt{30} \Rightarrow x = 8 + 2\sqrt{30}$

$y + 8 = 12 - 2\sqrt{30} \Rightarrow y = 4 - 2\sqrt{30}$

De (V) : $x + 4 = 12 - 2\sqrt{30} \Rightarrow x = 8 - 2\sqrt{30}$

$y + 8 = 12 + 2\sqrt{30} \Rightarrow y = 4 + 2\sqrt{30}$

Por condición la solución del sistema debe verificar : $x_0 < y_0$; en consecuencia dicha solución es : $\left(8-2\sqrt{30}\ ;\ 4+2\sqrt{30}\right)$

Finalmente, lo solicitado será : $x_0 - 2y_0 = \mathbf{-6\sqrt{30}}$ **RPTA. C**

5.- Resolver el sistema : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \text{.......(I)} \\ xy = 3 \text{.......(II)} \end{cases}$ ***, para luego indicar el número de soluciones que admite.***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Con la finalidad de obtener una relación que involucre a una ecuación lineal, procederemos a efectuar la siguiente operación :

(I) + 2 (II) : $x^2 + y^2 + 2xy = 10 + 2(3)$

Efectuando y reduciendo, se puede establecer que : $(x + y)^2 = 16$

Extrayendo raíz cuadrada nos queda : $x + y = \pm 4$ ... (*)

Con (*) y (II), formamos la ecuación cuadrática : $T^2 - ST + P = 0$

Con : $x + y = 4$ tendremos : $T^2 - 4T + 3 = 0$

Resolviendo esta ecuación según el criterio del aspa simple se consigue : $(T - 3)(T - 1) = 0$

Igualando a cero cada factor obtenemos : $T_1 = 3 \wedge T_2 = 1 \vee T_1 = 1 \wedge T_2 = 3$

Es decir, el conjunto solución del sistema es : $C.S. = \{(3 ; 1) \vee (1 ; 3)\}$

Con $x + y = -4$, trendremos : $m^2 + 4m + 3 = 0$

Resolviendo esta ecuación según el criterio del aspa simple se consigue : $(m + 3)(m + 1) = 0$

$m_1 = -3 \wedge m_2 = -1 \vee m_1 = -1 \wedge m_2 = -3$

Es decir el conjunto solución del sistema es : C.S. = {(-3 ; - 1) , (-1 ; -3)}

Finalmente se concluye que el sistema dado admite 4 soluciones. **RPTA. D**

6.- Si : $\left(x_0 ; y_0\right)$, es la solución del sistema : $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=11 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ xy+y^2=3 \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$

indicar un valor de : $x_0^2+y_0^2$

A) 12 *B) 20* *C) 5* *D) 81* *E) 60*

<u>Resolución</u>.-

El sistema dado contiene ecuaciones polinómicas homogéneas de dos variables : x , y ; por lo tanto es recomendable utilizar el método de resolución expuesto en el item 19.2B. Veamos :

Hagamos la siguiente sustitución : $y = kx$ ..... (III)

Remplazando (III) en (I) : $x^2+3kx^2+k^2x^2=11 \Rightarrow x^2\left(1+3k+k^2\right)=11$ ..... (IV)

Remplazando (III) en (II) : $kx^2+k^2x^2=3 \Rightarrow x^2\left(k+k^2\right)=3$ ..... (V)

Dividiendo miembro a miembro (IV) y (V), se consigue : $\dfrac{1+3k+k^2}{k+k^2}=\dfrac{11}{3}$

Multiplicando en aspa y reduciendo, encontramos : $8k^2+2k-3=0$

Resolviendo esta ecuación obtenemos : $k=\frac{1}{2} \vee k=-\frac{4}{3}$

a) Con : $k=\frac{1}{2}$ en (III) conseguimos : $x = 2y$ ....(VI)

Luego, reemplazando (VI)en (II), se tendrá : $3y^2=3 \Rightarrow y=1 \vee y=-1$

Reemplazando estos resultados en (VI), se obtiene : $y=1 \Rightarrow x=2$

Del mismo modo encontramos que : $y=-1 \Rightarrow x=-2$

Es decir si : $k=\frac{1}{2}$ las soluciones del sistema serán : $(2 ; 1) \vee (-2 ; -1)$ .... (α)

b) Con : $k=-\frac{4}{3}$ en (III) conseguimos : $x=-\frac{3}{4}y$ .... (VII)

Luego, reemplazando (VII) en (II) se tendrá : $\dfrac{y^2}{4}=3 \Rightarrow y=2\sqrt{3} \vee y=-2\sqrt{3}$

Reemplazando estos resultados en (VII) se obtiene : $y=2\sqrt{3} \Rightarrow x=-3\sqrt{3}/2$

Del mismo modo encontramos que : $y=-2\sqrt{3} \Rightarrow x=3\sqrt{3}/2$

Es decir si : $k=-\frac{4}{3}$ las soluciones del sistema serán : $\left(-3\sqrt{3}/2 ; 2\sqrt{3}\right) \vee \left(3\sqrt{3}/2 ; -2\sqrt{3}\right)$ ... (θ)

Finalmente de (α) y (θ) se deduce que : $x_0^2 + y_0^2 = 75/4 \vee 5$ **RPTA. C**

7.- ¿Cuántas soluciones racionales presenta el sistema : $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \text{ .... (I)} \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5 \text{ .... (II)} \end{cases}$?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) N.A*

Resolución.-

Haciendo una inspección de las ecuaciones, deducimos que estas son polinomiales homogéneas, por lo tanto deberemos emplear el mismo método que el del ejercicio anterior. Observa :

Hacemos la siguiente sustitución : $y = kx$ .... (III)

Reemplazando (III) en (I) : $x^2 - kx^2 + k^2x^2 = 3$

Factorizando, nos queda : $x^2\left(1-k+k^2\right) = 3$ .... (IV)

Reemplazando (III) en (II) : $2x^2 - kx^2 - k^2x^2 = 5$

Factorizando, nos queda : $x^2\left(2-k-k^2\right) = 5$ .... (V)

Dividiendo miembro a miembro (IV) y (V), se consigue : $\dfrac{1-k+k^2}{2-k-k^2} = \dfrac{3}{5}$

Multiplicando en aspa y reduciendo : $8k^2 - 2k - 1 = 0$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos : $k = \dfrac{1}{2} \vee k = -\dfrac{1}{4}$

a) Con : $k = \dfrac{1}{2}$ en (IV), conseguimos : $x^2\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right) = 3 \Rightarrow x = \pm 2$

Reemplazando $x = 2$ en (III), tendremos : $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)(2) = 1$

Reemplazando $x = -2$ en (III), tendremos : $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)(-2) = -1$

En consecuencia si : $k = \dfrac{1}{2}$ las únicas soluciones racionales del sistema serán: $(2 ; 1) \vee (-2 ; -1)$

RPTA. B

Observación.- Si $k = -\dfrac{1}{4}$ el sistema no presenta soluciones racionales. Su comprobación se dejará para el lector.

8.- Si $\left(x_0 ; y_0\right)$ ***es la solución del sistema :*** $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 160 \text{ .... (I)} \\ (x+y)(x^2+y^2) = 580 \text{ .... (II)} \end{cases}$ ***; obtener el valor de :*** $x_0 + y_0$.

A) 10 *B) 12* *C) 100* *D) 120* *E) 1 000*

Resolución.-

Siendo un sistema polinomial homogéneo, haremos : $y = kx$ .... (III)

Reemplazando (III) en (I) : $(x - kx)\left(x^2 - k^2x^2\right) = 160$

Factorizando el 1er miembro : $x^3(1 - k)\left(1 - k^2\right) = 160$ .... (IV)

Reemplazando (III) en (II) : $(x + kx)\left(x^2 + k^2x^2\right) = 580$

Factorizando el 1er miembro : $x^3(1 + k)\left(1 + k^2\right) = 580$ .... (V)

Dividiendo miembro a miembro (IV) y (V), se obtiene : $\dfrac{(1-k)\overbrace{(1-k)\cancel{(1+k)}}^{(1-k^2)}}{\cancel{(1+k)}\left(1+k^2\right)} = \dfrac{160}{580}$

Simplificando, multiplicando en aspa y reduciendo : $21k^2 - 58k + 21 = 0$

Resolviendo ésta ecuación se obtiene : $k = \dfrac{7}{3} \vee k = \dfrac{3}{7}$

a) Con : $k = \dfrac{7}{3}$ reemplazando en (V) y se obtiene : $x^3\left(1+\frac{7}{3}\right)\left(1+\frac{49}{9}\right) = 580 \Rightarrow x = 3$

Reemplazando este resultado en (III), deducimos que : $y = \left(\dfrac{7}{3}\right)(3) \Rightarrow y = 7$

En consecuencia la solución del sistema será : $(x ; y) = (3 ; 7)$ ..... (α)

b) Con : $k = \dfrac{3}{7}$ reemplazando en (V) se tendrá : $x^3\left(1+\frac{3}{7}\right)\left(1+\frac{9}{49}\right) = 580 \Rightarrow x = 7$

Reemplazando este resultado en (III), deducimos que : $y = \left(\dfrac{3}{7}\right)(7) \Rightarrow y = 3$

En consecuencia otra solución del sistema será : $(x ; y) = (7 ; 3)$ ...... (θ)

Finalmente de (α) y (θ) se concluye que : $x + y =$ **10** **RPTA. A**

9.- Luego de resolver el sistema : $\begin{cases} xy = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ xz = 18 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II) \\ yz = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$ ***, indicar el valor de:*** $x - y + z$

A) 4 ***B) -1*** ***C) -2*** ***D) -4*** ***E) -5***

Resolución.-

Multiplicando miembro a miembro todas las ecuaciones dadas se consigue :

$$(xy)(xz)(yz) = 30 . 15 . 18 \quad \Rightarrow \quad (xyz)^2 = (15)^2 . (36)$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros se consigue : $xyz = 90 \vee -90$

a) Resolviendo en base a la raíz : $xyz = 90$ ......(IV)

Ahora sustituyendo sucesivamente (I), (II) y (III) en (IV) se consigue : $z = 3 \wedge y = 6 \wedge x = 5$ ....(α)

b) Resolviendo en base a la raíz : $xyz = -90$ ......(V)

Si ahora reemplazamos sucesivamente (I), (II) y (III) en (V), se consigue : $z = -3 \wedge y = -6 \wedge x = -5$ ....(β)

Finalmente de (α) y (β) el conjunto solución del sistema será : $C.S. = \{(5;6;3) \vee (-5;-6;-3)\}$

En consecuencia : $x - y + z = 2 \vee -2$ **RPTA. C**

10.- ¿Cuántas soluciones reales admite el sistema : $\begin{cases} x^5 - y^5 = 992 \text{.........(I)} \\ x - y = 2 \text{...........(II)} \end{cases}$?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en transformar las ecuaciones por medio de un cambio de variable, de modo que se pueda obtener una ecuación con una sola incógnita. Dada las características del sistema conviene realizar el siguiente cambio de variable :

$$x = m + n \quad \wedge \quad y = m - n \text{ ....(III)}$$

Reemplazando (III) en (II), tendremos : $(m + n) - (m - n) = 2 \Rightarrow n = 1$

Reemplazando (III) en (I), se obtiene : $(m+1)^5 - (m-1)^5 = 992$

Desarrollando cada binomio y reduciendo términos, se consigue : $m^4 + 2m^2 - 99 = 0$

Factorizando por el método del aspa simple, encontramos : $(m^2 - 9)(m^2 + 11) = 0$

Igualando a cero cada factor comprobamos que solo existirán raices reales con : $m^2 - 9 = 0$

Descomponiendo en factores, tendremos : $(m + 3)(m - 3) = 0$

Igualando otra vez a cero concluímos que : $m = 3 \vee -3$

a) Con $m = 3$, reemplazamos en (III), obteniéndose : $x = 4 \wedge y = 2$

b) Con $m = -3$, reemplazamos en (III), obteniéndose : $x = -2 \wedge y = -4$

Finalmente las soluciones reales del sistema serán : $\mathbf{(x ; y) = (4 ; 2) \vee (-2 ; -4)}$

RPTA. B

MISCELANEA

11.- Si : $\begin{cases} xy + x = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ xy + y = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$ **, hallar la suma de los valores de x**

A) -4 **B) -2** **C) 6** **D) 2** **E) -6** **PUCP 94 - I**

<u>Resolución</u>.-

Despejando xy de (I) : $xy = 12 - x$ .... (III)

Despejando xy de (II) : $xy = 15 - y$ .... (IV)

Igualando (III) ∧ (IV) : $12 - x = 15 - y$ .... (V)

Despejando y de (V) : $y = x + 3$ .... (VI)

Reemplazando (VI) en (I) : $x(x + 3) + x = 12$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Resolviendo esta ecuación según el criterio del aspa simple se consigue : $x_1 = -6$; $x_2 = 2$

Finalmente la suma pedida será : $x_1 + x_2 = \boxed{-4}$ **RPTA. A**

12.- La suma de todos los valores para x ∧ y, que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 41 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 901 \end{cases} \text{, es :}$$

A) $\dfrac{40}{390}$ **B)** $\dfrac{82}{390}$ **C)** $\dfrac{80}{390}$ **D)** $\dfrac{72}{390}$ **E)** $\dfrac{41}{390}$ **UNI 85 - I**

<u>Resolución</u>.-

Hagamos los siguientes cambios de variables : $\dfrac{1}{x} = m \;\wedge\; \dfrac{1}{y} = n$ ..... (*)

Luego el sistema a resolver será : $\begin{cases} m + n = 41 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ m^2 + n^2 = 901 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$

De (I) despejamos "n" : $n = 41 - m$ ....(III)

Reemplazando (III) en (II) : $m^2 + (41 - m)^2 = 901$

Desarrollando la potencia y simplificando, se consigue : $m^2 - 41m + 390 = 0$

Resolviendo esta ecuación según el criterio del aspa simple se obtiene : $m = 26 \;\vee\; m = 15$

a) Con $m = 26$, en (III) se consigue : $n = 15$

Sustituyendo en (*) y despejando, encontramos : $x = \frac{1}{26} \wedge y = \frac{1}{15}$

b) Con $m = 15$, en (III) se consigue : $n = 26$

Sustituyendo en (*) y despejando, encontramos : $x = \frac{1}{15} \wedge y = \frac{1}{26}$

Finalmente la suma de todos los valores de $x \wedge y$ será : $\frac{1}{26} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{26} = \frac{82}{390}$

RPTA. B

13.- Calcular : x + y del sistema : $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 49 \text{ ....(I)} \\ x + xy + y = -19 \text{....................(II)} \end{cases}$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Aparentemente el sistema dado debe resolverse por el mismo mecanismo de los ejercicios anteriores, sin embargo al hacerlo comprobaremos que este camino es muy tedioso. En este caso conviene sumar las ecuaciones (I) $\wedge$ (II) miembro a miembro, puesto que asi logran aparecer un trinomio cuadrado perfecto que a la larga permite expresar toda la ecuación en función de una variable compuesta que por coincidencia es lo solicitado. Veamos :

Efectuando (I) + (II) : $\underbrace{x^2 + 2xy + y^2} + x + y = 49 - 19$

Reconociendo el T.C.P. : $(x+y)^2 + (x+y) - 30 = 0$

Aplicando aspa simple obtenemos : $[\underbrace{x+y} - 5]\,[\underbrace{x+y} + 6] = 0$

De donde finalmente concluímos que : $x + y = -6 \vee 5$ **RPTA. E**

14.- Resolviendo el sistema : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0 \text{ ....(I)} \\ x - 2y + 2 = 0 \text{....................(II)} \end{cases}$ ***, se concluye :***

A) x = 14 ; y = 8 ***B) x = -4 ; y = -1*** ***C)*** $x = \frac{52}{2}$; $y = \frac{21}{5}$

D) x = 12 ; y = 4 ***E) No tiene solución real*** ***UNI 88***

Resolución.-

Despejando x de la ecuación (II) se obtiene : $x = 2(y - 1)$ ..... (III)

Reemplazando (III) en (I) : $[2(y-1)]^2 + y^2 - 6\,[2(y-1)] + 4y + 5 = 0$

Reduciendo en el primer miembro se tendrá : $5y^2 - 16y + 21 = 0$

Encontremos el discriminante de esta última ecuación : $\Delta = (-16)^2 - 4(5)(21) = -164$

Como : $\Delta < 0$, podemos concluir que el sistema *no admite* solución real **RPTA. E**

15.- Calcular el menor valor de x que satisface el sistema : $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23 \ldots\ldots\text{(I)} \\ x^2+y^2+\quad xy\quad =19 \ldots\ldots\text{(II)} \end{cases}$

A) 1 ***B) 2*** ***C) -7*** ***D) -5*** ***E) -3***

Resolución.-

Nuestra estrategia para resolver el sistema dado consistirá en formar en cada ecuación el binomio al cuadrado $(x+y)^2$ con la finalidad de encontrar una nueva ecuación donde la incógnita sea : $(x+y)$. Veamos :

Transformando (I), obtenemos : $(x+y)^2 - 2xy + 2(x+y) = 23$ ...... (III)

Transformando (II), conseguimos : $2(x+y)^2 - 2xy = 38$ .... (IV)

Restando (IV) - (III), se consigue : $(x+y)^2 - 2(x+y) = 15$

Transponiendo 15 al 1er miembro : $(x+y)^2 - 2(x+y) - 15 = 0$

Resolviendo esta ecuación según el criterio del aspa simple se consigue : $x+y=5 \vee x+y=-3$

a) Con : $x+y=5$, en (IV), se consigue : $xy=6$

Resolviendo estas dos ecuaciones, se obtiene : $x=3 \wedge y=2 \vee x=2 \wedge y=3$

b) Con : $x+y=-3$ en (IV), se consigue : $xy=-10$

Resolviendo estas dos ecuaciones, se obtiene : $x=-5 \wedge y=2 \vee x=2 \wedge y=-5$

Finalmente se observa que el menor valor que asume x es : **- 5** **RPTA. D**

16.- Si x , y ∧ z son enteros no negativos, entonces con respecto a las soluciones del sistema: $\begin{cases} x^3-y^3-z^3=3xyz \ldots\ldots\ldots\text{(I)} \\ x^2=2(y+z) \ldots\ldots\text{(II)} \end{cases}$

se concluye que :

A) Existen cuatro soluciones ***D) No existen soluciones enteras***

B) Existen tres soluciones ***E) Existen más de cuatro soluciones***

C) Existen solo dos soluciones

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 4.13, relativa a Implicaciones Notables, se sabe que :

$$a^3+b^3+c^3=3abc \quad \Leftrightarrow \quad a+b+c=0 \vee a=b=c \quad \ldots\ldots(*)$$

Transformando la ecuación (I), se tiene : $x^3+(-y)^3+(-z)^3=3(x)(-y)(-z)$

Luego según (*), se debe cumplir que : $x-y-z=0 \vee x=-y=-z$

Por condición : x , $y \wedge z$, son enteros no negativos , por tal razón al sustituir : $x = -y = -z$,en (II), comprobamos que no verifica dicha condición . En consecuencia solo se cumple :

$$x - y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y + z \quad \text{.................(III)}$$

Reemplazando (III) en (II) se consigue : $x^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 2 \ \vee \ x = 0$

a) Con : $x = 2$, en (III) se tendrá : $y + z = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=1;0;2 \\ z=1;2;0 \end{cases}$

Por lo tanto : ¡Existen tres soluciones!

b) Con : $x = 0$, en (III) se tendrá : $y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Por lo tanto : ¡Existe una solución más !

Finalmente podemos afirmar que el sistema dado presenta cuatro soluciones **RPTA. A**

17.- Luego de resolver el sistema : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \text{ ....(I)} \\ xy+xz-yz=7 \text{ ....(II)} \\ x+y+z=6 \text{ ....(III)} \end{cases}$ ***; indicar un valor de : $x - y + z$***

A) -2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) 1***

Resolución.-

Elevando al cuadrado a ambos miembros de la ecuación (III) se consigue :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 36 \quad \text{...... (IV)}$$

Sustituyendo (I) en (IV) : $14 + 2(xy + xz + yz) = 36$

Transponiendo términos y simplificando : $xy + xz + yz = 11$ .... (V)

Restando (V) - (II) obtenemos : $2yz = 4 \quad \Rightarrow \quad yz = 2$ ...... (VI)

Reemplazando (VI) en (II): $xy + xz - 2 = 7 \quad \Rightarrow \quad x(y + z) = 9$ ......(VII)

Agrupando términos en (III) tendremos : $x + (y + z) = 6$ .... (*)

Resolviendo (*) y (VII), podemos deducir que : $x = 3 \quad \wedge \quad y + z = 3$ ...... (**)

Resolviendo (**) y (VI), encontramos que : $y = 1 \ \wedge \ z = 2 \ \vee \ y = 2 \ \wedge \ z = 1$

Finalmente el conjunto solución del sistema será : C.S. = $\{ (3;1;2) \vee (3;2;1) \}$

En consecuencia : $x - y + z = \mathbf{2} \ \vee \ \boxed{\mathbf{4}}$

RPTA. C

18.- Sean x_0 ; y_0 las soluciones positivas del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12} \;............(I) \\ x^2 - y^2 = 7..............(II) \end{cases}$$

Entonces el valor de : $2x_0 + 3y_0$ es:

A) 15 B) 17 C) 18 D) 19 E) 12 UNI 93-I

Resolución.-

Efectuando operaciones en la ecuación (I), obtenemos : $12(x^2+y^2) = 25xy$

Efectuando y transponiendo términos : $12x^2 - 25xy + 12y^2 = 0$

Descomponiendo por aspa simple e igualando a cero cada factor : $y = \frac{4}{3}x \;\vee\; \frac{3}{4}x$

Sustituyendo : $y = \frac{3}{4}x$, en (II) : $x^2 - \frac{9}{16}x^2 = 7$

Reduciendo términos, se consigue : $x = 4$ (¡Unica solución positiva!)

Y como : $y = \frac{3}{4}x$, podemos deducir que : $y = 3$

Finalmente la solución del sistema es : $x = 4$; $y = 3$

En consecuencia, lo solicitado será : $2x_0 + 3y_0 = \boxed{17}$ **RPTA. B**

Observación.- *Queda para el estudiante comprobar que con $y = \frac{4}{3}x$, se obtienen soluciones imaginarias*

19.- Resolver el sistema : $\begin{cases} x^2 + xy + xz = 18 \;.....(I) \\ y^2 + yz + yx = -12 \;.....(II) \\ z^2 + zx + zy = 30 \;.......(III) \end{cases}$ ***, e indicar un valor de : $x - 2y + z$***

A) 4 B) -3 C) -2 D) 6 E) 12

Resolución.-

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones del sistema conseguimos :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 18 - 12 + 30$$

Reconociendo que el 1er miembro es el cuadrado de un trinomio, tendremos :

$$(x+y+z)^2 = 36 \;\Rightarrow\; x + y + z = 6 \;\vee\; x + y + z = -6$$

De (I) factorizamos x , y encontramos que : $x(x + y + z) = 18$ ....(*)

Si : $x + y + z = 6$, en (*) deducimos que : $x = 3$

Si : $x + y + z = -6$, en (*) deducimos que : $x = -3$

De (II) factorizamos y , y encontramos que : $y(y + z + x) = -12$ ....(**)

Si : $x + y + z = 6$, en (**) deducimos que : $y = -2$

Si : $x + y + z = -6$, en (**) deducimos que : $y = 2$

De (III) factorizamos z , y encontramos que : $z(z + x + y) = 30$ ....(***)

Si : $x + y + z = 6$, en (***) deducimos que : $z = 5$

Si : $x + y + z = -6$, en (**) deducimos que : $z = -5$

Es decir el conjunto solución del sistema será : C.S. = { (3 ; -2 ; 5) $\vee$ (-3 ; 2 ; -5) }

Finalmente, lo solicitado será : $x - 2y + z =$ **-12** $\vee$ **12** **RPTA. E**

20.- Encontrar el mayor valor de y que verifica el sistema :
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 481 \text{............(I)} \\ x - \sqrt{xy} + y = 13 \text{..............(II)} \end{cases}$$

A) 16 ***B) 15*** ***C) 9*** ***D) 12*** ***E) 21***

Resolución.-

En la ecuación (I) transformamos el primer miembro con auxilio de la equivalencia de Argan'd visto en el Cap.4 relativo a Productos Notables. Veamos :

$$\left(x+\sqrt{xy}+y\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right) = 481 \quad \text{................ (III)}$$

Sustituyendo (II) en (III): $\left(x+\sqrt{xy}+y\right)(13) = 481$

Luego de simplificatr nos queda : $x + \sqrt{xy} + y = 37$ .... (IV)

Sumando : (II) + (IV) : $2x + 2y = 13 + 37 \Rightarrow x + y = 25$ .... (V)

Reemplazando (V) en (II),obtenemos : $25 - \sqrt{xy} = 13$

Despejando y elevando al cuadrado : $\sqrt{xy} = 12 \Rightarrow xy = 144$ ...... (VI)

Despejando x de (V), y reemplazando en (VI), tendremos : $y^2 - 25y + 144 = 0$

Resolviendo esta ecuación según el criterio del aspa simple se consigue :

$y = 9 \vee y =$ **16** **RPTA. A**

21.- El valor positivo de : $x + y + z$ deducido del sistema :

$$\begin{cases} 2x+y+z=xy+yz\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ 2y+x+z=xz+xy\ldots\ldots\ldots\ldots(II) \\ 2z+x+y=xz+yz\ldots\ldots\ldots\ldots(III) \\ x^2+y^2+z^2=2\ldots\ldots\ldots\ldots(IV) \end{cases} \quad , \text{ es :}$$

A) $2+\sqrt{6}$　　B) $1+\sqrt{6}$　　C) $3-\sqrt{6}$　　D) $-2+\sqrt{6}$　　E) $-1+\sqrt{6}$　　**UNI 93 - II**

Resolución.-

Sumando miembro a miembro las tres primeras ecuaciones se consigue :

$$4(x+y+z) = 2(xy+xz+yz) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

Con la finalidad de aprovechar esta última relación ,creo oportuno recordarte el cuadrado de un trinomio visto en el Cap.4 , con lo cual podemos plantear que :

$$(x+y+z)^2 = \underbrace{x^2+y^2+z^2} + \underbrace{2(xy+xz+yz)} \quad \ldots\ldots\ldots (VI)$$

Si ahora sustituímos (IV) $\wedge$ (V) en (VI), obtenemos : $\quad (x+y+z)^2 = 2 + 4(x+y+z)$

Transponiendo términos : $\quad (x+y+z)^2 - 4(x+y+z) = 2$

Sumando 4 a ambos miembros con la finalidad de completar cuadrados en el primer miembro, se obtiene : $\quad (x+y+z)^2 - 4(x+y+z) + 4 = 6$

Reemplazando el 1er miembro por el T.C.P. : $\quad [(x+y+z)-2]^2 = 6$

Extrayendo raíz cuadrada : $\quad (x+y+z) - 2 = \sqrt{6}$

Finalmente, encontramos que : $\quad x+y+z = \boxed{2+\sqrt{6}}$ 　　**RPTA. A**

22.- Proporcionar la suma de los valores positivos de x que se obtienen al resolver:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18\ldots\ldots\ldots(I) \\ xy(x+1)(y+1)=72\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

A) 3　　B) 4　　C) 5　　D) 6　　E) 7

Resolución.-

Transformando cada ecuación del sistema :

De (I) se tiene : $\quad x^2 + x + y^2 + y = 18$

Factorizando, se tiene : $\quad x(x+1) + y(y+1) = 18 \quad \ldots\ldots\ldots (III)$

De (II) se tiene : $\quad xy(x+1)(y+1) = 72$

Factorizando, se tendrá : $\quad [x(x+1)][y(y+1)] = 72 \quad \ldots\ldots\ldots (IV)$

De (III) $\wedge$ (IV) notamos que :

$$x(x+1)=6 \quad \vee \quad y(y+1)=12 \quad \wedge \quad x(x+1)=12 \quad \vee \quad y(y+1)=6$$

a) Trabajando con : $x(x+1)=6 \ \wedge \ y(y+1)=12$

Al resolver para x se obtiene : $x_1=2 \ ; \ x_2=-3$

Al resolver para y se obtiene : $y_1=3 \ ; \ y_2=-4$

b) Trabajando con : $x(x+1)=12 \ \wedge \ y(y+1)=6$

Al resolver para x se obtiene : $x_3=3 \ ; \ x_4=-4$

Al resolver para y se obtiene : $y_3=2 \ ; \ y_4=-3$

Finalmente el valor pedido será : $x_1+x_3=$ **5** **RPTA. C**

23.- Sean : a $\wedge$ b números enteros ; se sabe que la solución $(x_0 \ ; \ y_0)$ del sistema :

$$\begin{cases} y-2x-a=0 \,........ \text{(I)} \\ y^2-xy+x^2-b=0 \,........ \text{(II)} \end{cases}$$

son números racionales . Si $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros ,podemos decir que :

A) $x_0 \in \mathbb{Z} \ ; \ y_0 \notin \mathbb{Z}$ ***B)*** $\{x_0 \ ; \ y_0\} \subset \mathbb{Z}$ ***C)*** $x_0 \notin \mathbb{Z} \ ; \ y_0 \in \mathbb{Z}$

D) $x_0 \notin \mathbb{Z}$ ***, pero*** $2x_0 \in \mathbb{Z}$ ***E)*** $y_0 \notin \mathbb{Z}$ ***, pero*** $3\,y_0 \in \mathbb{Z}$ ***UNI 93-II***

Resolución.-

Despejando y de (I) , obtenemos : $y=2x+a$ ..... (III)

Reemplazando (III) en (II), se consigue : $(2x+a)^2-x(2x+a)+x^2-b=0$

Efectuando y reduciendo, tendremos : $3x^2+3ax+\left(a^2-b\right)=0$

Resolviendo por la fórmula cuadrática : $x=\dfrac{-3a\pm\sqrt{12b-3a^2}}{6}$ ....(IV)

Por condición, x es un número racional; en consecuencia el discriminante,deberá ser un cuadrado perfecto, luego : $\Delta=12b-3a^2=k^2$ ....(V)

Reemplazando (V) en (IV) : $x=\dfrac{-3a\pm k}{6}$ ....(VI)

De (V) podemos deducir que : k es múltiplo de 3 y de igual paridad que a (si $a\to$ par , $k\to$ par; si $a\to$ impar , $k\to$ impar). En consecuencia la forma general de k será : $k=3T$ ....(VII)

Reemplazando (VII) en (VI): $x = \frac{-3a \pm 3T}{6} \Rightarrow x = \frac{-a \pm T}{2}$ .... (VIII)

De (VII) podemos deducir que $k \wedge T$ son de igual paridad (si $T \to$ par , $k \to$ par ; si $T \to$ impar, $k \to$ impar) y como : $a \wedge k$ son de igual paridad, podemos concluir afirmando de que : $a \wedge T$ también son de igual paridad.

De (VIII) debemos reconocer que la operación : $-a \pm T$, siempre genera un número par, pues $a \wedge T$ son de igual paridad, es decir una suma o diferencia entre ellos, genera siempre un número par. En consecuencia ya se puede afirmar que x es un número entero.

Finalmente de (III) podemos deducir que y es entero pues a es entero (dato) y x también lo es. Es decir la solución del sistema : $(x ; y)$, es entero.

RPTA. B

24.- Luego de resolver el sistema : $\begin{cases} \sqrt{x+2y} + \sqrt{3x} = 4 \quad ....(I) \\ \sqrt{(2x+y)^2 - (x-y)^2} = 3 .....(II) \end{cases}$ ***, indicar un valor de x***

A) 3 ***B)*** -1 ***C)*** $-\frac{1}{3}$ ***D)*** $\frac{13}{3}$ ***E)*** $\frac{7}{3}$

Resolución.-

Aplicando diferencia de cuadrados en el radicando de la ecuación (II), obtendremos :

$$\sqrt{(x+2y)\ (3x)} = 3$$

Descomponiendo el radical : $\sqrt{x+2} \ . \ \sqrt{3x} = 3$ .... (III)

Utilizando la recomendación expuesta en el item 19.2A con (I) $\wedge$ (III) podemos formar una ecuación cuadrática :

$$T^2 - ST + P = 0 \quad \Rightarrow \quad T^2 - 4T + 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación según el criterio del aspa simple se obtiene :

$$T_1 = 1 \quad \wedge \quad T_2 = 3 \text{ .... (IV)}$$

$$\text{ó , } \quad T_1 = 3 \quad \wedge \quad T_2 = 1 \text{ .... (V)}$$

a) A partir de (IV) podemos establecer que : $\sqrt{x+2y} = 1 \quad \wedge \quad \sqrt{3x} = 3$

Resolviendo obtenemos : $x = 3 \quad \wedge \quad y = -1$

b) A partir de (V) se puede establecer que : $\sqrt{x+2y} = 3 \quad \wedge \quad \sqrt{3x} = 1$

Resolviendo obtenemos : $x = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad y = \frac{13}{3}$

Finalmente el conjunto solución del sistema será : $C.S. = \left\{(3 ; -1) , \left(\frac{1}{3} ; \frac{13}{3}\right)\right\}$

RPTA. A

25.- Resolver el siguiente sistema : $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \;;\; x>y \\ x+y=4 \end{cases}$ ***, para luego indicar el valor de : $x+3y$***

A) 6 ***B) 5*** ***C) 4*** ***D) 7*** ***E) 7/2*** ***UNI 93 - II***

Resolución .-

Transformando la 1ra ecuación, se tendrá : $(x+y)^2 - xy = 13$ ....(I)

Reemplazando la 2da ecuación en (I) se consigue : $16 - xy = 13 \Rightarrow xy = 3$ ...(II)

Dado que $x > y$, de la 2da ecuación $\wedge$ (II),se obtiene : $x = 3 \;\wedge\; y = 1$

Finalmente el valor pedido será : $x + 3y = \boxed{6}$ **RPTA. A**

26.- Si : $\{x, y, z\} \subset \mathbb{R} \;/\; x^2 + y^2 + z^2 + 14 = 2(x - 2y + 3z)$; calcular el valor de : $x + y + z$

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

Transponiendo todos los términos al primer miembro se consigue :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$$

Si ahora agrupamos convenientemente, observaremos que :

$$x^2 - 2(x)(1) + y^2 + 2(y)(2) + z^2 - 2(z)(3) + 14 = 0 \quad .....(*)$$

Aqui debo hacerte notar que : $14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$; luego reemplazando en (*) y reacomodando se obtiene :

$$\underbrace{x^2 - 2(x)(1) + 1^2} + \underbrace{y^2 + 2(y)(2) + 2^2} + \underbrace{z^2 - 2(z)(3) + 3^2} = 0$$

Podemos reconocer que cada término indicado es un T.C.P., luego :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0 \quad ....(**)$$

Como x, y, z son números reales, la relación (**) solo se cumplirá si :

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$$

Finalmente : $x + y + z = \boxed{2}$ **RPTA. B**

27.- Si $x \wedge y$ son los números positivos que satisfacen el sistema :

$$\begin{cases} -3x^2+xy+y^2=51 \text{.............(I)} \\ 5xy-(x+y)^2=61 \text{.............(II)} \end{cases} \text{ ; calcular el valor de } 3x-2y$$

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E) 3

Resolución.-

Utilizando las recomendaciones del item 19.2B, haremos el siguiente cambio de variable : $y = kx$ .... (III)

Observar que k es positivo pues $x \wedge y$ por condición lo son. Luego, reemplazando (III) en (I) : $-3x^2 + kx^2 + k^2x^2 = 51$

Factorizando x^2, tendremos : $x^2(k^2 + k - 3) = 51$ .... (IV)

Reemplazando (III) en (II), se tiene : $3kx^2 - x^2 - k^2x^2 = 61$

Factorizando x^2, se tendrá : $x^2(3k - 1 - k^2) = 61$ .... (V)

Dividiendo miembro a miembro (IV) $\wedge$ (V) : $\dfrac{k^2+k-3}{3k-1-k^2} = \dfrac{51}{61} \Rightarrow 28k^2 - 23k - 33 = 0$

De donde el valor positivo de k es : $k = \dfrac{11}{7}$

Luego reemplazando en (IV), se consigue : $x^2\left(\dfrac{121}{49}+\dfrac{11}{7}-3\right) = 51 \Rightarrow x = 7$

Reemplazando estos valores en (III) : $y = \left(\dfrac{11}{7}\right)(7) \Rightarrow y = 11$

Finalmente, lo solicitado será : $3x - 2y =$ **-1** **RPTA. A**

28.- Para que el par de ecuaciones : $4x^2 + 5xy - 2y^2 = 6a$ .....(I)

$-x^2 - 2xy + y^2 = -a$ .....(II)

tenga raíces reales, entonces "a" debe siempre satisfacer :

A) $a > 0$ B) $a < 0$ C) $-1 \leq a < 1$ D) $0 < a < 1$ E) $a \in \mathbb{R}$ UNI 93 - II

Resolución.-

El sistema dado es polinomial homogénea y por tanto es recomendable hacer la sustitución : $y = kx$, en ambas ecuaciones. Veamos :

Sustituyendo en (I), se tendrá : $4x^2 + 5kx^2 - 2k^2x^2 = 6a$

Factorizando x^2, se establecerá : $x^2\left(4+5k-2k^2\right) = 6a$ ....(III)

Sustituyendo en (II), se tendrá : $-x^2 - 2kx^2 + k^2x^2 = -a$

Factorizando x^2, obtendremos : $x^2\left(-1-2k+k^2\right) = -a$ ....(IV)

Dividiendo miembro a miembro (III) $\wedge$ (IV), se obtiene : $\dfrac{4+5k-2k^2}{-1-2k+k^2} = -6$

Efectuando y transponiendo términos, obtenemos : $4k^2 - 7k - 2 = 0$

Resolviendo esta ecuación se consigue : $k = -\frac{1}{4} \quad \vee \quad k = 2$

a) Con : $k = -\frac{1}{4}$, reemplazamos en (IV) y se obtiene : $x^2\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\right) = -a$

Efectuando y despejando, encontramos que : $x^2 = \dfrac{16a}{7}$

Como $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se podrá plantear que : $\dfrac{16a}{7} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$ ...... (V)

b) Con : $k = 2$, reemplazamos en (IV) y se obtiene : $x^2\,(-1 - 4 + 4) = -a$

Efectuando y despejando, encontramos que : $x^2 = a$

Como $x^2 \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, se podrá plantear que : $a \geq 0$ ...... (VI)

Finalmente de (V) y (VI) se concluye que : $a \geq 0 \Rightarrow \mathbf{a > 0} \vee a = 0$ **RPTA. A**

29.- Calcular a, b, c sabiendo que el sistema : $\begin{cases} a^2x^2 + b^2y^2 = 1 \text{..........(I)} \\ xy = c \text{..........(II)} \end{cases}$ ***; admite únicamente dos soluciones diferentes .***

A) $\frac{1}{4}$ *B)* $-\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)* $\frac{1}{8}$ *E)* 1

Resolución.-

Despejando y de (II) se consigue : $y = \dfrac{c}{x}$ .... (III)

Reemplazando (III) en (I) : $a^2x^2 + \dfrac{b^2c^2}{x^2} = 1$

Efectuando y transponiendo términos, obtenemos : $a^2x^4 - x^2 + b^2c^2 = 0$

Resolviendo por la fórmula cuadrática : $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a^2b^2c^2}}{2a^2}$

Debemos recordar que si el sistema admite únicamente dos soluciones diferentes, x solo podrá asumir dos valores diferentes; en consecuencia se deberá cumplir que :

$$1 - 4a^2b^2c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2b^2c^2 = \frac{1}{4}$$

Finalmente : $abc = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \frac{1}{2}$ RPTA. C

30.- Dada la ecuación de la circunferencia : $x^2 + y^2 = 1$ para cuál de los siguientes valores de "a", la recta L : $x + 2y = a$, es tangente a dicha circunferencia.

A) 1 B) 2 C) $-\sqrt{3}$ D) $-\sqrt{5}$ E) - 2 UNI 97-II

Resolución.-

El sistema es : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \text{ ....} & \text{(I)} \\ x + 2y = a \text{ ....} & \text{(II)} \end{cases}$

Despejando x de (II), se consigue : $x = a - 2y$ ....(III)

Reemplazando (III) en (I) : $(a-2y)^2 + y^2 = 1$

Efectuando operaciones, obtenemos : $5y^2 - 4ay + \left(a^2 - 1\right) = 0$ ....(IV)

Debemos observar que como la recta es tangente a la circunferencia, estas se cortan solo en un punto en consecuencia la ecuación (IV) debe admitir raices iguales, es decir para esta ecuación se plantea :

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad (-4a)^2 - 4(5)\left(a^2 - 1\right) = 0$$

Efectuando operaciones, obtenemos : $16a^2 - 20a^2 + 20 = 0$

Reduciendo y transponiendo términos : $a^2 = 5$

Finalmente concluímos que : $a = \sqrt{5} \quad \vee \quad -\sqrt{5}$ RPTA. D

31.- Si resolvemos el siguiente sistema : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 5 \text{..........} & \textit{(I)} \\ x^2y + xy^2 = 1 \text{..........} & \textit{(II)} \end{cases}$

¿Cuántas soluciones obtenemos?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) N.A.

Resolución.-

Teniendo en cuenta lo expuesto en el item 19.3, el número de soluciones del sistema, viene expresado por el producto de los grados de las ecuaciones que conforman el sistema; es decir :

$$\#_{sol} = \text{Grado (I) . Grado (II)} \quad \Rightarrow \quad \#_{sol} = (3)\,(3) = 9$$ RPTA. D

32.- Sabiendo que : $x \neq y$. Calcular el valor de $x + y$, luego de resolver el sistema :

$$\sqrt[6]{x^6 + 3x^2y^2 + y^6} = 2xy - 3 \text{ ....} \quad (I)$$

$$y\left(y^2-1\right)=x\left(x^2-1\right)+xy(y-x) \quad .... (II)$$

A) 5 **B)** $\pm\sqrt{5}$ **C)** $\pm\sqrt{7}$ **D)** $\pm\sqrt{3}$ **E)** $\pm\sqrt{6}$

Resolución.-

En la 2[da] ecuación , transponemos y agrupamos términos en el 1[er] miembro, obteniéndose :

$$\underbrace{y^3-x^3}-\underbrace{y+x}-xy(y-x)=0$$

Agrupando los términos indicados y factorizando , conseguimos :

$$\underbrace{(y-x)}\left(y^2+xy+x^2\right)-\underbrace{(y-x)}-xy\underbrace{(y-x)}=0$$

Extrayendo el factor común indicado : $(y-x)\left(x^2+xy+y^2-1-xy\right)=0$

Como : $x \neq y$, podemos notar que se debe cumplir que : $x^2+xy+y^2-1-xy=0$

Eliminado términos semejantes decir : $x^2+y^2=1$ .... (III)

Elevando (III) al cubo, según la equivalencia de Cauchy, obtenemos : $x^6+y^6+3\left(x^2y^2\right)\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{1}=(1)^3$

Sustituyendo lo indicado y reordenando, obtenemos : $x^6+3x^2y^2+y^6=1$ .... (IV)

Reemplazando (IV) en (III), se tendrá : $\sqrt[6]{1}=2xy-3$

Efectuando y transponiendo términos : $2xy=4$ .... (V)

A continuación sumamos miembro a miembro (III) $\wedge$ (V) : $x^2+y^2+2xy=1+4$

Reconociendo el T.C.P. en el 1[er] miembro, nos queda : $(x+y)^2=5$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x+y=\pm\sqrt{5}}$$

RPTA. B

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Halle x del sistema : $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=3 \end{cases}$

A) $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

D) $5+\sqrt{13}$ E) $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$

2.- Indicar el menor valor de "y" luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ x+y=3 \end{cases}$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) -5

3.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} x^3+y^3=335 \\ x+y=5 \end{cases} ;$$

indicar un valor de : $x-y$

A) 5 B) -5 C) 9 D) 8 E) 12

4.- Dado el sistema : $\begin{cases} xy(x+y)=420 \\ x^3+y^3=468 \end{cases}$;

calcular $2x+2y$

A) 12 B) 22 C) 16 D) 18 E) 24

5.- Hallar $x+y+z$, si : x, $y \wedge z$, son las soluciones positivas del sistema:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=8 \\ xz=21 \end{cases}$$

A) 18 B) 20 C) 12 D) 25 E) 15

6.- Resolver el sistema : $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{6} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

A) $-\dfrac{1}{7}$; $\dfrac{2}{7}$; $-\dfrac{6}{7}$ D) $\pm\dfrac{2}{7}$; $\pm\dfrac{3}{7}$; $\pm\dfrac{6}{7}$

B) $\dfrac{1}{7}$; $-\dfrac{2}{7}$; $\dfrac{6}{7}$ E) ±1 ; ±2 ; ±6

C) $\pm\dfrac{1}{7}$; $\pm\dfrac{2}{7}$; $\pm\dfrac{6}{7}$

7.- La suma de todas las "x" más la suma de todas las "y" que satisfacen el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2+x-2y=20 \\ 2x^2+2y^2+5x+3y=9 \end{cases} ; \text{ es :}$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) -1 E) 2

8.- Calcular: $x+y$, del sistema:

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=(10-x-y)^2 \\ xy+x+y=11 \end{cases}$$

A) 5 B) 6 C) 16 D) 14 E) 10

9.- ¿ Qué valor de "x" verifica el sistema ;

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=49 \\ x^4+x^2y^2+y^4=931 \end{cases} ?$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

10.- Si x_0 ; y_0 son las soluciones positivas del sistema:

$$\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70 \\ 6x^2+xy-y^2=50 \end{cases} ;$$

calcular el valor de : $2x_0+y_0$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 8

11.- Calcular : $x+y$, del sistema :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{5-y}=4 \\ x-y=8 \end{cases}$$

A) 1 B) -1 C) -2 D) 2 E) 4

NIVEL B

12.- Halle la diferencia del mayor valor de x con el menor valor de z, que verifica en sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 35 \\ xy = 15 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13.- Si x_0 ; y_0 son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 37 \\ x - y = 3 \end{cases} ;$$

calcular el valor de : $x_0 + y_0$

A) 5 B) 3 C) 9 D) 7 E) 14

14.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} x + y + z = 19 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 133 \\ x^2 = yz \end{cases} ;$$

indicar el mayor valor de z.

A) 6 B) 4 C) 9 D) 5 E) 12

15.- Calcular: $x \cdot y \cdot z$, del sistema :

$$\begin{cases} x(x+y+z) = 16 \\ y(x+y+z) = 16 \\ z(x+y+z) = 4 \end{cases}$$

A) 6 B) $\frac{64}{9}$ C) $\frac{32}{27}$ D) $\frac{128}{9}$ E) $\frac{128}{27}$

16.- Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^4 + y^4 = 337 \end{cases} ;$$

indicar el mayor valor de x.

A) -3 B) 4 C) 5 D) 7 E) -4

17.- Si : $(x_0 ; y_0)$, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45 \\ \dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3} \end{cases} ;$$

calcular un valor de : $3x_0 - 2y_0$

A) 18 B) 12 C) 24 D) 6 E) 1

18.- Si x_0, y_0, z_0 ; es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \\ x + y + z = 9 \end{cases} ;$$

calcular el valor de : $x_0 - 2y_0 + z_0$

A) 0 B) 6 C) 3 D) 9 E) 12

19.- Calcular el valor de $3x - 2y$ del sistema :

$$\begin{cases} x^2(1+y^2) + y^2 = 49 \\ x + xy + y = 11 \end{cases}$$

A) 0 B) 4 C) -2 D) 5 E) $A \vee D$

20.- Al resolver el sistema :

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3y-2x}{y}} + \sqrt{\dfrac{4y}{3y-2x}} = 2\sqrt{2} \\ 3(x^2+1) = (y+1)(y-x+1) \end{cases} ;$$

se observa que la suma de todos los valores de "y" es :

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

21.- Encontrar las soluciones racionales del sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}} = \dfrac{5}{2} \\ xy - x - y = 2 \end{cases}$$

A) $x = 2 ; y = 4$ B) $x = -1 ; y = -\frac{1}{2}$

C) $x = 4 ; y = 2$

D) $x=4$; $y=2$ 　　　 E) $x=2$; $y=4$

$x=-1$; $y=-\frac{1}{2}$ 　　　 $x=-\frac{1}{2}$; $y=-1$

NIVEL C

22.- Halle la suma de todos los valores de x que satisfacen el sistema :

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\ (x+y)=65 \\ x^2+y^2+x+y=13 \end{cases}$$

A) 2　B) 3　C) 4　D) 5　E) 6

23.- ¿ Qué valor de x verifica el sistema :

$$\begin{cases} x+y-z=7 \\ x^2+y^2-z^2=37 \\ x^3+y^3-z^3=1 \end{cases} ?$$

A) 8　B) 9　C) 10　D) 11　E) 12

24.- Calcular x_0^2 si x_0 verifica el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xy+xz+yz=27 \end{cases}$$

A) 1　B) 4　C) 9　D) 16　E) 25

25.- Si : $\{x\,;y\,;z\}\subset\mathbb{R}$ /

$$x^2+y^2+z^2+31=2(1-2x+3y+4z)\ ;$$

calcular el valor de : $x+2y+z$

A) 0　B) 10　C) -6　D) 6　E) 8

26.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} x\sqrt{\frac{x}{y}}-y\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{15}{2} \\ x-y=3 \end{cases} ;$$

indicar la suma de todos los valores de x

A) 3　B) -3　C) 4　D) -4　E) 5

27.- Al resolver el sistema :

$$\begin{cases} (x-y)\sqrt{y}=\frac{\sqrt{x}}{2} \\ (x+y)\sqrt{x}=3\sqrt{y} \end{cases} ;$$

se observa que el mayor valor de x es :

A) $-\sqrt{2}$　B) $\sqrt{2}$　C) $2\sqrt{2}$

D) $-2\sqrt{2}$　E) $3\sqrt{2}$

28.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} x^2+xy+xz-x=2 \\ y^2+xy+yz-y=4 \\ z^2+xz+yz-z=6 \end{cases} ;$$

indicar el valor de y

A) $\frac{2}{3}$　B) 2　C) $\frac{4}{3}$　D) 1　E) $-\frac{3}{2}$

29.- Un valor de "x" en :

$$\begin{cases} x(x+y)\ (x+2y)\ (x+3y)=4 \\ (x+y)^2+(x+2y)^2=4 \end{cases} ;\quad \text{es :}$$

A) $-\frac{1}{2}$　B) -2　C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{3\sqrt{6}+2}{\sqrt{5}}$　E) $\frac{3\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}}$

30.- ¿ Cuántas soluciones reales tiene el sistema:

$$\begin{cases} x^3-5x-2y=0 \\ y^3-2x-5y=0 \end{cases}$$

A) 1　B) 3　C) 6　D) 9　E) 12

31.- Calcular el producto de todos los valores reales obtenidos para "x" al resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2y^2+xy=6 \\ x+y=3 \end{cases}$$

A) -3　B) 2　C) 1　D) 4　E) -6

32.- Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+12y}+\sqrt{y^2+12x}=33 \\ x+y=23 \end{cases};$$

para luego indicar un valor de x.

A) 8 B) 10 C) 4 D) 7 E) 6

33.- Halle el valor "n" y del sistema:

$$\begin{cases} x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52 \\ \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4} \end{cases}$$

A) 5 B) 15 C) -5 D) -15 E) 12

34.- Un valor real de "x" en : $\begin{cases} x^5-y^5=992 \\ x-y=2 \end{cases}$

viene a ser :

A) 25 B) 16 C) 64 D) -2 E) 9

35.- Luego de resolver el sistema :

$$\begin{cases} 2x+y=2z \\ 9z-7x=6y \\ x^3+y^3+z^3=216 \end{cases};$$

indicar el valor de x

A) 10 B) 5 C) 3 D) i E) $2i$

36.- Si el sistema : $\begin{array}{l} x^2+y^2=16 \\ y+5=kx \end{array}$;

admite una solución única ; ¿Qué valor asume x ?

A) $\frac{12}{5}$ B) $\frac{11}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) 2 E) $\frac{3}{4}$

37.- ¿ Para qué valor de "α" el sistema :

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ \alpha=x+y+z \end{cases}$$, tiene solución única.

A) 0,25 B) -0,25 C) 0,5

D) -0,5 E) 0,125

38.- Un valor de : $\sqrt[3]{3}\,x_0y_0$ donde $\{x_0\,;\,y_0\}$ es la solución del sistema :

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases};\ \text{es :}$$

A) 6 B) $\frac{1}{3}$ C) $2\sqrt[3]{3}$ D) $\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$ E) $\sqrt[3]{3}$

39.- Si $\{x_0\,;\,y_0\}$ es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x^3+y^3+x^2y+xy^2=32 \\ x^4y^2+x^2y^4=128 \end{cases};$$

donde: $x_0 \in \mathbb{Z} \wedge y_0 \in \mathbb{Z}$; calcular : x_0+y_0

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

40.- Si $\{x_0\,;\,y_0\}$ es la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \end{cases};$$

el valor de : x_0+y_0 , es :

A) 233 B) 243 C) 253

D) -243 E) Existen dos respuestas

20 Planteamiento de ecuaciones

20.1) DEFINICION

El planteamiento de una ecuación consiste en traducir un problema dado en forma de enunciado, a un lenguaje simbólico, es decir al interpretar correctamente el enunciado dado éste se podrá transformar en una ecuación de una o más incógnitas. Es necesario elegir apropiadamente los símbolos desconocidos (incógnitas) para que de este modo la ecuación planteada pueda resolverse por algún método sencillo estudiado anteriormente.

20.2) PLANTEO DE UNA ECUACION

20.2A ENUNCIADO

Aquí se dan las relaciones entre los datos y la o las incógnitas.

20.2B PLANTEO

Es el acto de formar la ecuación que relaciona la o las incógnitas con los datos.

20.2C DISCUSION

Aquí se analizará la posibilidad o imposibilidad de resolver el problema.

20.2D RESOLUCION

Es el proceso matemático que tiene por objeto la determinación de la o las incógnitas.

20.2E SOLUCION

Es el valor o conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen la o las ecuaciones planteadas.

20.2F VERIFICACION

Es la comprobación de los valores hallados en la información dada por el problema.

Ejemplo.- A continuación te presento un listado de frases típicas que suelen aparecer en los problemas, y a un costado su respectiva traducción matemática :

El resultado de sumar un número a 7 : $\rightarrow$ $7 + x$

La suma de algún número y 13 : $\rightarrow$ $y + 13$

El resultado de restar a 18 algún número : $\rightarrow$ $18 - z$

5 por algún número : $\rightarrow$ $5 \cdot n$

Dos veces la suma de un número y 5 : $\rightarrow$ $2(m + 5)$

Ejemplo.- Un número, aumentado en 5 da como suma 23

$$n + 5 = 23$$

Ejemplo.- *La suma de dos números reales es 40 y su diferencia 10. ¿Cuáles son los números?*

<u>**Resolución**</u>.-

De acuerdo al enunciado podemos establecer los siguientes pasos :

El mayor de los números es : x

Como la suma de los números es 40, el otro será : $40 - x$

La diferencia entre los dos números es 10 : $x - (40 - x) = 10$

Resolviendo esta ecuación se consigue : $x = 25$

En consecuencia los números buscados son : $x \wedge (40 - x) = 25 \wedge 15$

20.3) PLANTEO DE PROBLEMAS SOBRE MOVILES

Cuando un móvil desarrolla un movimiento uniforme, se verifica la siguiente relación matemática :

$$d = v \cdot t$$

Según esta relación la distancia recorrida d de un objeto en movimiento uniforme es igual al producto de su rapidez v, por el tiempo transcurrido t. Con frecuencia se suele mencionar la palabra velocidad por rapidez; debemos aclarar que el primero es una magnitud vectorial y el segundo es una cantidad escalar. Se atribuye esta confusión al hecho que la rapidez es el módulo de la velocidad. Nosotros trataremos en lo posible de establecer todos los problemas según las definiciones correctas establecidas por la Física.

Es recomendable hacer un gráfico que muestre los datos del problema pues generalmente la geometría del movimiento permite extraer alguna relación matemática entre las incógnitas participantes. Del mismo modo se sugiere que las unidades de medida a emplear en la resolución, correspondan a un mismo sistema de unidades.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- La distancia del sol a la tierra es aproximadamente 150 millones de kilómetros. ¿Qué tiempo tarda la luz del sol en llegar a la tierra, si la rapidez de la luz es de 300 000 kilómetros por segundo?

A) 6 ' 20 " *B) 7 ' 20 "* *C) 8 ' 20 "* *D) 9 ' 20 "* *E) 12"*

Resolución.-

Sea "t" el tiempo que tarda la luz del sol en llegar a la tierra.

Sabemos que : $d = v \cdot t$ .... (I)

Del enunciado se sabe que : $d = 150\,000\,000\,km \ \wedge \ v = 300\,000\,\frac{km}{s}$ .... (II)

Reemplazando (II) en (I) se consigue : $150\,000\,000\,\cancel{km} = (300\,000\,\frac{\cancel{km}}{s})\,t$

Despejando, se tiene : $t = 500\,segundos$

Como 60 *segundos* equivalen a 1 *minuto* , finalmente tendremos : $t = 8'\,20''$ **RPTA. C**

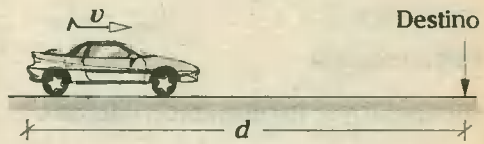
2.- Si un automovilista marcha a 40km/h llega a su destino a las 22h y si viaja a 60 km/h llegaría a las 20h. ¿Qué rapidez en km/h debe emplear para arribar a las 21h?

A) 42 *B) 45* *C) 46* *D) 48* *E) 50*

Resolución.-

Hagamos un gráfico para ilustrar el enunciado.

Sea "t" el tiempo que demora el automovilista en llegar a su destino a las 21 h, y sea "x" la rapidez que emplea en ese caso. Luego del enunciado se plantean 3 casos :



Caso (I)	Caso (II)	Caso (III)
$v_1 = 40$	$v_2 = 60$	$v_3 = x$
$d_1 = d$	$d_2 = d$	$d_3 = d$
$t_1 = t + 1$	$t_2 = t - 1$	$t_3 = t$

Según la relación matemática expuesta en el item 20.3, se tendrá :

Con los datos del caso (I) , tendremos : $d = 40(t + 1)$ .... (α)

Con los datos del caso (II) , tendremos : $d = 60\,(t - 1)$ .... (β)

Con los datos del caso (III) , tendremos : $d = x\,t$ .... (θ)

Igualando (α) y (β) : $40(t + 1) = 60\,(t - 1)$

Resolviendo encontramos : $2t + 2 = 3t - 3 \ \Rightarrow \ t = 5$ ....(*)

Reemplazando este valor en (α) : $d = 40(5+1) \Rightarrow d = 240$ ..... (**)

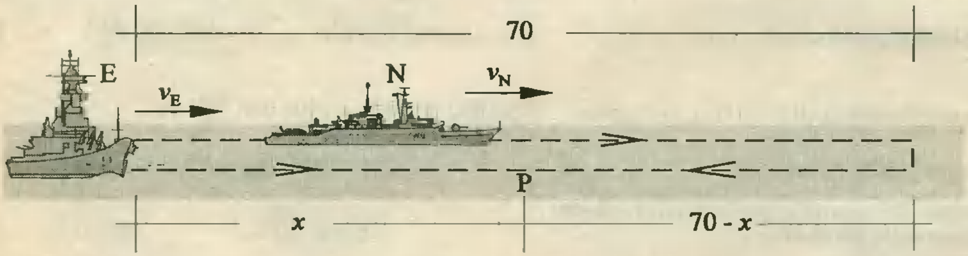
Finalmente reemplazamos (*) y (**) en (θ) : $240 = 5x \Rightarrow$ **$x = 48$** **RPTA. D**

3.- Una nave Argentina que marchaba con el resto de la escuadra recibió la orden de explorar en una zona de 70 millas en dirección que marchaba la escuadra, la rapidez de la escuadra es 35 millas/h. ¿Cuánto tiempo tardará la nave en incorporarse a la escuadra si su rapidez es 70 millas/h ,si además ella no se detiene en ningún momento?

A) 1h B) 1h 20 mín C) 1h 30 mín D) 1h 40 mín E) 2h UNI 85 - II

Resolución.-

El enunciado se puede elaborar el siguiente gráfico :



Del gráfico se observa que el punto de encuentro de los móviles es el punto P. Asimismo reconocemos que la distancia recorrida por la escuadra es "x" mientras que la distancia recorrida por la nave es : $70 + (70 - x) = 140 - x$

Sea "t" el tiempo que emplean los móviles en encontrarse, luego se puede plaantear :

Para la nave : $d_N = v_N t_N \Rightarrow 140 - x = 70t$ .... (I)

Para la escuadra $d_E = v_E t_E \Rightarrow x = 35t$ .... (II)

Sumando (I) $\wedge$ (II) miembro a miembro : $140 = 105t$

Despejando y simplificando, se obtiene : $t = \frac{4}{3}h \therefore$ **$1h = 20min$** **RPTA. B**

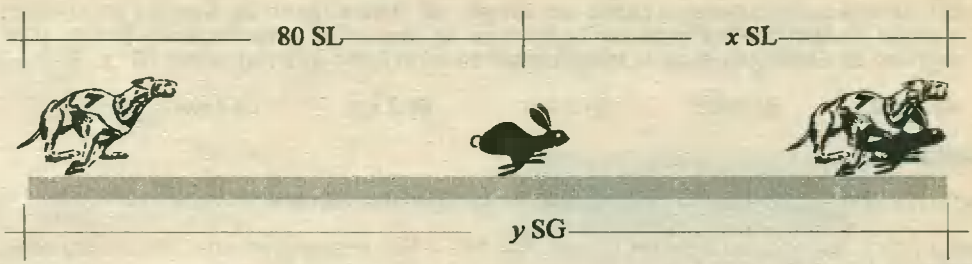
4.- Una liebre perseguida por un galgo se encuentra a 80 saltos de liebre delante del galgo. La liebre da 4 saltos mientras que en el mismo tiempo el galgo da 3. Si 5 saltos del galgo equivalen a 7 saltos de la liebre. ¿Cuántos saltos dará la liebre antes de ser alcanzada por el galgo?

A) 1 000 B) 1 500 C) 1 600 D) 1 250 E) 1 100 UNI 87

Resolución.-

En base a los datos del problema elaboraremos un gráfico en el que será necesario que reconozcas las siguientes notaciones :

G = galgo ; SG = saltos del galgo L = liebre ; SL = saltos de liebre



Del gráfico : $80\text{ SL} + x\text{ SL} = y\text{ SG}$ .... (I)

Por condición : $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$ .... (II)

También : $5\text{ SG} <> 7\text{ SL} \Rightarrow \text{SG} = \frac{7}{5}\text{ SL}$ .... (III)

Reemplazando (II) ∧ (III) en (I) se tendrá : $80\text{ SL} + x\text{ SL} = \frac{3}{4}x \cdot \frac{7}{5}\text{ SL}$

Simplificando y efectuando las operaciones indicadas, tendremos : $80 + x = \frac{21}{20}x$

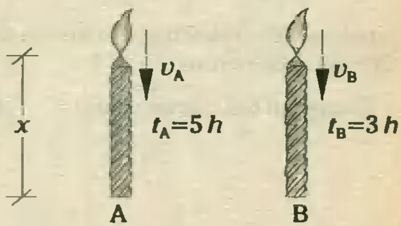
Finalmente, despejando nos queda : $x = 1\,600$ **RPTA. C**

5.- Dos velas de igual tamaño se prenden simultáneamente determinar cuántas horas después de ser prendidas la altura de una de ellas es el triple de la otra ,si cada vela se consume en 5 y 3 horas respectivamente.

A) 2h ***B) 2,5 h*** ***C) 3h*** ***D) 3,5h*** ***E) 4h***

Resolución.-

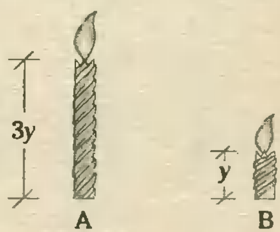
Según el enunciado, inicialmente se tiene :



Para la vela "A" : $d_A = v_A\, t_A \Rightarrow v_A = \frac{x}{5}$ .... (I)

Para la vela "B" : $d_B = v_B\, t_B \Rightarrow v_B = \frac{x}{3}$ .... (II)

Sea "t" el tiempo que transcurre desde que se prenden las velas hasta que la altura de una resulta ser el triple de la otra.. Entonces al final, se tendrá :



Para la vela "A" : $d_A = v_A\, t_A \Rightarrow x - 3y = v_1 t$...... (III)

Para la vela "B" : $d_B = v_B\, t_B \Rightarrow x - y = v_2 t$...... (IV)

Haciendo 3 . (IV) - (III) : $2x = (3v_2 - v_1)t$ ...(V)

Sustituyendo (I) y (II) en (V) : $2x = (3 \cdot \frac{x}{3} - \frac{x}{5})\, t$

Efectuando, se tiéne : $t = \frac{5}{2}h = 2{,}5\, h$ **RPTA. B**

6.- Un ciclista sube cuestas a razón de 3km/h, las baja a razón de 5km/h y en el llano va a razón de 4km/h. Para recorrer 11,5 km de "A" hasta "B" emplearía 2h 54 min. y en el regreso 3h 6min. ¿Cuál es la longitud del camino llano que hay entre "A" y "B"?

A) 2 km ***B) 3 km*** ***C) 5 km*** ***D) 7 km*** ***E) 4 km***

Resolución.-

Según los datos del problema, podemos elaborar la gráfica adjunta.

Sean x , $y \wedge z$ las longitudes de los tramos AM , MN y NB , respectivamente. De acuerdo con la condición del problema deberá cumplirse que :

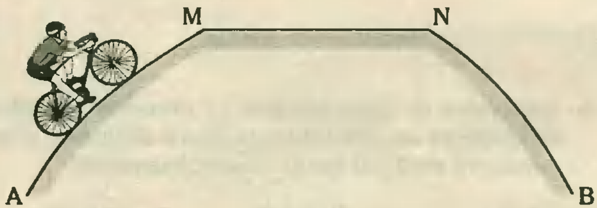
$$x + y + z = \frac{23}{2} \quad \text{.....................} \ (\text{I})$$

a) Viaje desde "A" hasta "B". La relación que existe en los tiempos empleados es así :

$$t_{AM} + t_{MN} + t_{NB} = t_T \quad \ldots\ldots \left(t = \frac{d}{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 2h\ 54\ min$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = \frac{29}{10}\ h \quad \ldots\ (\text{II})$$



b) Viaje desde "B" hasta "A"

$$t_{BN} + t_{NM} + t_{MA} = t_T$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{3} + \frac{y}{4} + \frac{x}{5} = 2h\ 6\ min$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = \frac{31}{10}\ h \quad \ldots\ (\text{III})$$

Finalmente resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (I), (II) $\wedge$ (III) según la regla de Cramer, obtenemos : $y = 4$

$\therefore$ Longitud del camino llano = **4 km** **RPTA. E**

20.4) PLANTEO DE PROBLEMAS SOBRE EDADES

En estos casos es conveniente llevar todos los datos a un cuadro donde se tendrá en cuenta que en toda variación de tiempo, en la que se podrá apreciar que la diferencia de edades en todo momento es constante.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

7.- Dentro de 12 años la edad de Pepito será el doble de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuál es la edad actual de Pepito?

A) 8 *B) 12* *C) 16* *D) 20* *E) 24*

Resolución.-

Sea "x" la edad actual de Pepito, entonces llevando toda la información del enunciado a un cuadro, tendremos :

Hace 4 *años*	Presente	Dentro de 12 *años*
$x - 4$	$x = ?$	$x + 12$

Por condición del problema se sabe que : $x + 12 = 2(x - 4)$

Resolviendo se obtiene que : $x = 20$ $\Rightarrow$ Pepito tiene : **20 *años*** **RPTA. D**

8.- Dentro de "a + b" años la edad de Carlos será "a" veces la edad de Juan y además se sabe que hace "a - b" años era "b" veces. ¿Cuántos años tiene Carlos?

A) $\dfrac{a^2+b^2-2a^2b}{a-b}$ *B)* $\dfrac{2a-2ab+b^2a^2}{a-b}$ *C)* $\dfrac{a^2-b^2+2a^2b}{a-b}$

D) $\dfrac{a^2+b^2+2a^2b}{a-b}$ *E)* $\dfrac{2a-2ab-b^2+a^2}{a-b}$

Resolución.-

Sean $x \wedge y$ las edades de Carlos y Juan respectivamente. Entonces, llevando toda la información del enunciado a un cuadro, se tendrá :

	Hace: $(a - b)$ *años*	Presente	Dentro de : $(a + b)$ *años*
Carlos	$x - (a - b)$	$x =?$	$x + (a + b)$
Juan	$y - (a - b)$	y	$y + (a + b)$

Por condición del problema se establece que :

a) En el pasado : $x - (a - b) = b[y - (a - b)]$ $\Rightarrow$ $x - by = b^2 - ab + a - b$ .... (I)

b) En el futuro : $x + (a + b) = a[y + (a + b)]$ $\Rightarrow$ $x - ay = a^2 + ab - a - b$ .... (II)

Resolviendo el sistema de ecuaciones (I) y (II), según la regla de Cramer se consigue :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b^2 - ab + a - b & -b \\ a^2 + ab - a - b & -a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -a \end{vmatrix}} = \frac{a^2 + b^2 - 2a^2b}{a - b}$$

Finalmente, Carlos tiene : $\boldsymbol{x = \left(\dfrac{a^2 + b^2 - 2a^2b}{a - b}\right)}$ ***años*** **RPTA. A**

9.- Hugo le dice a César: "La suma de nuestras edades es 46 años y tu edad es el triple de la edad que tenías cuando yo tenía el triple de la edad que tuviste cuando yo nací" ¿Cuántos años tiene César?

A) 22 ***B) 24*** ***C) 18*** ***D) 26*** ***E) 18***

Resolución.-

Considerando el nacimiento de César como el suceso referencial del tiempo, elaboramos el siguiente cuadro de datos :

	Nacimiento de César	Pasado	Presente
Hugo	0	$3y$	x
César	y	z	$3z = ?$

Por condición del problema se sabe que : $x + 3z = 46$ .... (I)

Sabiendo que la diferencia de edades entre dos personas se mantiene constante, de los datos del cuadro se deduce que :

$$y = z - 3y = 3z - x$$

(α)

(θ)

De (α) se establece que : $z = 4y$ ..... (II)

De (θ) se establece que : $x = 3z - y$ ..... (III)

Sustituyendo (II) en (III) : $x = 11y$ ..... (IV)

Sustituyendo (II) y (IV) en (I) : $11y + 3(4y) = 46$

Efectuando operaciones concluímos que : $y = 2$ ..... (*)

Reemplazando (*) en (II), encontramos : $z = 4(2) = 8$ ..... (**)

Finalmente, la edad de César en la actualidad es : $\boldsymbol{3z = 24}$ ***años*** **RPTA. B**

10.- Juan le dice a Carlos : "Yo tengo 30 años y mi edad es la mitad de la que tú tendrás cuando yo tenga la edad que tú tienes" ¿Cuántos años tiene Carlos?

A) 32 ***B) 38*** ***C) 42*** ***D) 45*** ***E) 60***

Resolución.-

Llevando toda la información del enunciado a un cuadro, se obtiene :

	Presente	**Futuro**
Juan	30	x
Carlos	$x = ?$	60

Dado que la diferencia de edades se mantiene constante, se deberá cumplir que :

$$30 - x = x - 60$$

Resolviendo : $x = 45$

Finalmente Carlos tiene : **45 *años*** **RPTA. D**

11.- José tiene hoy cuatro veces los años que tenía Carmen cuando él tenía 17 años. Si Carmen tiene hoy 18 años. ¿Cuántos años tiene José?

A) 25 ***B) 26*** ***C) 27*** ***D) 28*** ***E) 29***

Resolución.-

Trasladando todos los datos al siguiente cuadro, tendremos :

	Pasado	**Presente**
José	17	$4x = ?$
Carmen	x	18

Puesto que la diferencia de edades se mantiene constante, se deberá cumplir que :

$$17 - x = 4x - 18$$

Resolviendo : $x = 7$

Finalmente la edad de José es : $4x = 4\,(7) =$ **28** **RPTA. D**

12.- Luis le dice a Joel : "Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, si la suma de nuestras edades actuales es 42 años ¿Qué edad tendré cuando tengas la edad que yo tengo?"

A) 12 ***B) 18*** ***C) 24*** ***D) 28*** ***E) 30***

Resolución.-

Llevando toda la información del enunciado a un cuadro, se tendrá :

	Pasado	**Presente**	**Futuro**
Luis	y	$2x$	$z = ?$
Joel	x	y	$2x$

Por condición, se debe cumplir que :

$2x + y = 42$ .... (I)

Dado que la diferencia de edades se mantiene constante, se deberá cumplir que :

$$y - x = 2x - y = z - 2x$$

(α)

(β)

De (α) despejamos y , obteniéndose : $y = \frac{3}{2}x$ .... (II)

De (β) despejamos z , obteniéndose : $z = x + y$ .... (III)

Sustituyendo (II) en (I), se deduce que : $2x + \frac{3}{2}x = 42 \Rightarrow x = 12$ .... (IV)

Ahora reemplazando (IV) en (II) : $y = \frac{3}{2}(12) \Rightarrow y = 18$ ...... (V)

Finalmente de (IV) $\wedge$ (V) en (III) se consigue : $z = 12 + 18 =$ **30** **RPTA. E**

13.- Si un padre tiene ahora 2 años más que sus hijos juntos y hace 8 años tenía 3 veces la edad del hijo menor y 2 veces la del mayor. ¿Qué edad tiene ahora el hijo menor?

A) 24 ***B) 26*** ***C) 38*** ***D) 32*** ***E) 28***

Resolución.-

Sean x e y las edades de los hijos en la actualidad, entonces se podrá establecer que :

	Hace 8 años	Presente
Padre	$(x + y + 2) - 8$	$x + y + 2$
Hijo mayor	$x - 8$	x
Hijo menor	$y - 8$	$y = ?$

Por condición del problema se sabe que : $(x + y + 2) - 8 = 3(y - 8)$

Efectuando las operaciones indicadas, obtenemos : $2y - x = 18$ .... (I)

Asimismo se debe cumplir que : $(x + y + 2) - 8 = 2(x - 8)$

Efectuando y despejando, tendremos : $x - y = 10$ .... (II)

Sumando (I) $\wedge$ (II) miembro a miembro se consigue la edad del hijo menor : $y =$ **28 años** **RPTA. E**

20.5) PLANTEO DE PROBLEMAS SOBRE RELOJES

La mayoría de los problemas referidos a relojes tiene un fondo geométrico que deberá plantearse y resolverse para que el asunto referido al tiempo vinculado al problema , tenga una solución real y confiable. Para ello deberá tenerse en cuenta los siguientes aspectos cinemáticos vinculados a los elementos de un reloj mecánico, como son : El horario, el minutero y el segundero.

20.5A PARA EL HORARIO

Esta manecilla da una vuelta completa en medio día, luego :

$$12h <> 360^\circ \quad \Rightarrow \quad 1\,h <> 30^\circ$$

$$\mathbf{H}\,h <> (30\,\mathrm{H})^\circ \quad \vee \quad \left(\frac{\mathrm{H}}{30}\right) h <> \mathrm{H}^\circ$$

20.5B PARA EL MINUTERO

Esta manecilla da una vuelta completa en una hora, luego :

$$60\,min <> 360^\circ \quad \Rightarrow \quad 1\,min <> 6^\circ$$

$$\mathrm{M}\,min <> (6\,\mathrm{M})^\circ \quad \vee \quad \left(\frac{\mathrm{M}}{6}\right) min <> \mathrm{M}^\circ$$

20.5C PARA EL SEGUNDERO

Esta manecilla da una vuelta en un minuto, luego :

$$60\,s <> 360^\circ \quad \Rightarrow \quad 1\,s <> 6^\circ$$

$$\mathrm{N}\,s <> (6\,\mathrm{N})^\circ \quad \vee \quad \left(\frac{\mathrm{N}}{6}\right) s <> \mathrm{N}^\circ$$

Observación : Los desplazamientos angulares que experimentan las manecillas de un reloj durante un mismo intervalo de tiempo, tienen valores tales que guardan entre si una proporción constante. Para ello es necesario establecer las siguientes notaciones :

θ_h = Angulo barrido por el horario.

θ_m = Angulo barrido por el minutero.

θ_s = Angulo barrido por el segundero.

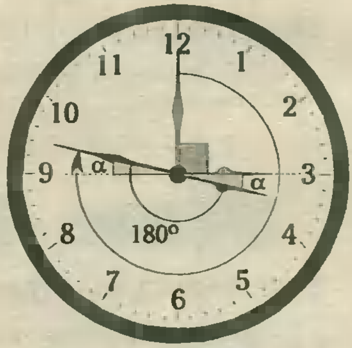
Se cumple : $$\theta_h = \frac{\theta_m}{12} = \frac{\theta_s}{720}$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

14.- ¿Aproximadamente a qué hora entre las 3 y 4 pm el horario y el minutero de un reloj forman un ángulo de 180º?

A) 3 h 29 min B) 3 h 49 min C) 3 h 52 min D) 3 h 10 min E) 3 h 27 min

Resolución.-



En general para resolver un problema de este tipo es necesario graficar una posición inicial para las agujas que marcan las horas y los minutos. Asi elegiremos como posición inicial de las agujas cuando estas indicaban : 3*pm* , siendo la posición final la que establece el problema.

Del gráfico podemos decir que la hora buscada viene dada por el desplazamiento α que experimenta el *horario*. Luego :

$$\theta_h = \alpha^\circ \text{ ..... (I)}$$

Asi mismo reconocemos que el minutero experimenta el siguiente desplazamiento :

$$\theta_m = (90 + \alpha + 180)^\circ = 270^\circ + \alpha^\circ \text{ .... (II)}$$

Recordemos que : $\theta_h = \dfrac{\theta_m}{12}$ .... (III)

Ahora, reemplazando (I) y (II) en (III), se consigue : $\alpha = \dfrac{270+\alpha}{12} \Rightarrow \alpha = \left(\dfrac{270}{11}\right)^\circ$

Debemos tener en cuenta que este resultado está en grados. Ahora corresponde reconocer que éste es también parte del ángulo barrido por el minutero desde la posición en que marcaba 9, hasta llegar a su posición final. Lo que corresponde hacer a continuación es convertir esta medida de α para el minutero, en su equivalente de tiempo; para ello emplearemos la equivalencia mostrada en el item 20.5B. Veamos :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{270}{11}\right)}{6}\,min \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{135}{33}\,min \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 4\,min \text{ .... (III)}$$

Esto significa que el minutero desde su posición inicial 12 , hasta su posición final ha empleado un tiempo de : 45 *min.* + α ≈ 49 *min.*

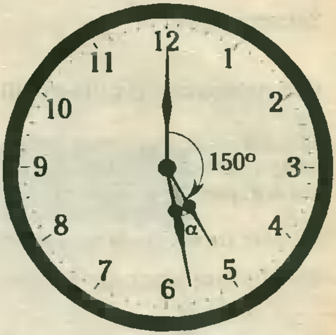
Finalmente del gráfico podemos observar que las agujas del reloj forman 180º aproximadamente a las :

3*h* 49 *min* **RPTA. B**

15.- ¿Qué hora es entre las 5 y las 6 pm cuando el minutero encuentra al horario?

A) $5h\ 27\frac{3}{11}$ ***min*** ***B)*** $5h\ 27\frac{2}{11}$ ***min*** ***C)*** $5h\ 29\frac{3}{11}$ ***min*** ***D)*** $5h\ 25\frac{2}{11}$ ***min*** ***E)*** $5h\frac{2}{13}$ ***min***

Resolución.-



Elegiremos como posición inicial de las agujas cuando éstas marcaban las 5*pm*. y como posición final cuando el minutero y el horario se superpongan, lo cual ocurrirá entre las marcas 5 y 6 . Luego :

Para el horario tenemos : $\theta_h = \alpha^\circ$ .... (I)

Para el minutero, se tiene : $\theta_m = 150^\circ + \alpha^\circ$ .... (II)

Sabiendo que : $\theta_h = \dfrac{\theta_m}{12}$ .... (III)

Reemplazamos (I) y (II) en (III) : $\alpha = \dfrac{150+\alpha}{12} \Rightarrow \alpha = \left(\dfrac{150}{11}\right)^\circ$

Tal como hicimos en el problema anterior, a partir de este resultado encontraremos el tiempo transcurrido para el minutero. Para ello convertiremos este resultado en minutos, utilizando la equivalencia expuesta en el item 20.5B. Veamos :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{150}{11}\right)}{6}\,min \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\frac{3}{11}\,mim$$

De este modo podemos asegurar que el minutero desde su posición inicial hasta su posición final ha empleado un tiempo de : 25 *min* + α = $27\frac{3}{11}$

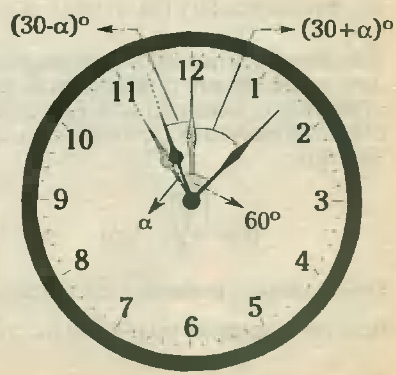
Finalmente podemos concluir que las agujas se superponen a las : **5*h* 27 $\frac{3}{11}$ *min*** **RPTA. A**

16.- ¿A qué hora entre las 11 y las 12 el horario y el minutero forman un ángulo de 60º por primera vez?

***A)** 11h 5 $\frac{3}{11}$ min* ***B)** 11h 6 $\frac{2}{11}$ min* ***C)** 11h 5 $\frac{5}{11}$ min*

***D)** 11h 5 $\frac{2}{13}$ min* ***E)** 11h 7 $\frac{5}{11}$ min*

Resolución.-



Teniendo en cuenta que la posición inicial de las agujas marcan 11 *am*, se observará que ellas formaban inicialmente un ángulo de 30º . Cuando el horario haya barrido un ángulo α, su posición con relación a la marca 12, formará un ángulo (30 - α)º . De este modo el minutero deberá haber barrido un ángulo (30 + α)º para que así las agujas puedan formar un ángulo de 60º. El gráfico muestra los desplazamientos angulares de cada aguja; luego :

Para el horario se tiene : $\theta_h = \alpha^\circ$ .... (I)

Para el minutero se tendrá : $\theta_m = 30^\circ + \alpha^\circ$ .... (II)

Sabemos que : $\theta_h = \frac{\theta_m}{12}$ .... (III)

Reemplazando (I) y (II) en (III) : $\alpha = \frac{30+\alpha}{12} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{30}{11}\right)^\circ$

Tal como hicimos en los ejercicios anteriores, a partir de este resultado encontraremos el tiempo transcurrido para el minutero : $\alpha = \frac{\left(\frac{30}{11}\right)}{6}\,min \Rightarrow \alpha = \frac{5}{11}\,min$

De este modo podemos asegurar que el minutero desde su posición inicial hasta su posición final ha empleado un tiempo de : $5\,min + \alpha = 5\frac{5}{11}$

Finalmente la condición del problema se cumplirá a las : **$11h\ 5\frac{5}{11}$ min** **RPTA. C**

17.- Con respecto al problema anterior. ¿Cuántos minutos después las agujas del reloj forman un ángulo de 60º por segunda vez?

A) $43\frac{7}{11}$ min *B) $41\frac{7}{11}$ min* *C) $42\frac{7}{11}$ min* *D) $43\frac{5}{11}$ min* *E) $47\frac{7}{11}$ min*

Resolución.-

Dado que la aguja del minutero es más rápida que la aguja del horario, existirá una nueva posición en que ambas agujas formen por segunda vez un ángulo de 60°. Considerando como posición inicial para el horario la marca 11, cuando esta manecilla haya barrido un ángulo β, el minutero formará con el horario un ángulo de 60°, siempre que haya superado la marca 9, de modo que el ángulo barrido por ésta desde dicha marca deberá ser también β, tal como se indica en el gráfico adjunto. Luego tendremos :

Para el horario se tiene : $\theta_h = \beta^\circ$ .... (I)

Para el minutero se tendrá : $\theta_m = 270^\circ + \beta^\circ$ .... (II)

Sabemos que : $\theta_h = \frac{\theta_m}{12}$ .... (III)

Reemplazando (I) y (II) en (III) : $\beta = \frac{270+\beta}{12} \Rightarrow \beta = \left(\frac{270}{11}\right)^\circ$

Tal como hicimos en los problemas anteriores, a partir de este resultado encontraremos el tiempo transcurrido para el minutero. Para ello convertiremos este resultado en minutos, utilizando la equivalencia expuesta en el item 20.5B. Veamos :

$$\beta = \frac{\left(\frac{270}{11}\right)}{6}\,min \Rightarrow \beta = 4\frac{1}{11}\,min$$

De este modo podemos asegurar que el minutero desde su posición inicial hasta su posición final ha empleado un tiempo de : $45\,min + \beta = 49\frac{1}{11}$

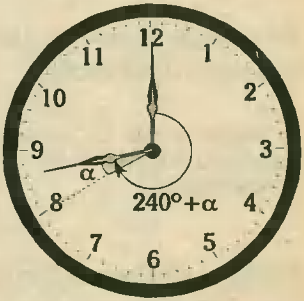
Finalmente el horario y el minutero forman por 2da vez un ángulo de 60° a las : $\boxed{11h\ 49\frac{1}{11} min}$ **RPTA. A**

18.- Carlos inició un viaje cuando las manecillas del reloj (horario y minutero) estaban superpuestas entre las 8 y las 9 am llegando a su destino entre la 2 y las 3 pm cuando las manecillas del reloj formaban un ángulo de 180º. ¿Qué tiempo duró el viaje de Carlos?

A) 6 h 2 min B) 6 h 20 min C) 6h D) 6h 45 min E) 6h 30 min

Resolución.-

La solución de este ejercicio se obtendrá resolviendo las dos circunstancias en que las manecillas del reloj se superponian y cuando formaban un ángulo de 180°. Entonces debemos resolver por separado para determinar la hora inicial y la hora final respectivamente, de este modo el tiempo transcurrido para el viaje se obtendrá restando dichas horas.



A) *Cálculo de la hora inicial.* Considerando como posición inicial las 8*am* , tendremos :

Del gráfico : $\theta_h = \alpha^o \quad \wedge \quad \theta_m = 240^o + \alpha^o$

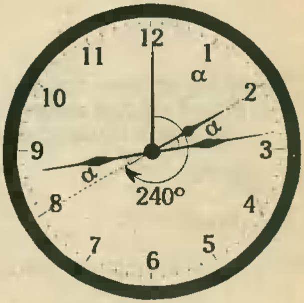
Como : $\theta_h = \frac{\theta_m}{12} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{240+\alpha}{12}$

De donde : $\alpha = \left(\frac{240}{11}\right)^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3\,\frac{7}{11}\ min$

Es decir, para el minutero han transcurrido : $\alpha = \frac{\left(\frac{240}{11}\right)}{6}\ min = \frac{40}{11} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3\frac{7}{11} min$

Esto significa que el viaje se inició a las : $t_i = 8h\ 43\frac{7}{11} min$ .... (1)

B) *Cálculo de la hora final.* Considerando como posición inicial las 2*pm*, tendremos que las agujas forman 180° cuando el minutero se ubica entre las marcas 8 y 9 . De este modo tendremos que :



Del gráfico : $\theta_h = \alpha^o \quad \wedge \quad \theta_m = 240^o + \alpha^o$

Como : $\theta_h = \frac{\theta_m}{12} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{240+\alpha}{12}$

De donde : $\alpha = \left(\frac{240}{11}\right)^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3\,\frac{7}{11}\ min$

Esto significa que el viaje culminó a las : $2\,h\ 43\frac{7}{11}\ min$, pasado meridiano $t_f = 14\,h\ 43\,\frac{7}{11}\ min$ .... (2)

Finalmente de (α) y (β) : La duración del viaje de Carlos fue :

$$\Delta t = t_f - t_i = 14h\ 43\,\frac{7}{11}\ min - 8h\ 43\,\frac{7}{11}\ min \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 6h}$$ **RPTA. C**

MISCELANEA

19.- *Un caño llena un recipiente en x horas y un desagüe lo vacía en la mitad del tiempo. Si el recipiente estuviera lleno en su tercera parte y se abrieran al mismo tiempo caño y desagüe. ¿En cuánto tiempo quedará vacío el recipiente?*

A) 1 h 30 min *B)* $\frac{x}{3}$ h *C)* $\frac{2x}{3}$ h *D)* $\frac{3x}{2}$ h *E)* 1h UNI 90

Resolución.-

Consideremos que L es la capacidad del tanque. Ahora se sabe que el caño llena el tanque en *x horas* ; luego en una hora llenará una fracción de él igual a : $\frac{L}{x}$ .... (I)

Del desagüe se sabe que vacía el tanque en $\frac{x}{2}$ *horas*. Esto significa que en una hora vacía : $\frac{L}{\frac{x}{2}} = \frac{2L}{x}$ .... (II)

Es evidente que el tanque quedará vacío si la rapidez con que se desagua es mayor que la rapidez con la que se llena. De este modo, de (I) y (II) deducimos que, en una hora el volumen desaguado es :

$$\frac{2L}{x} - \frac{L}{x} = \frac{L}{x}$$

Finalmente debemos encontrar el tiempo en horas que se necesita para desaguar un volumen igual a $\frac{L}{3}$. Para ello debemos reconocer que el volumen desaguado y el tiempo para que ello ocurra son entre sí directamente proporcionales, por lo tanto aplicaremos una regla de tres simple directa

Volumen a desaguar	**Tiempo**
$\frac{L}{x}$	$1h$
$\frac{L}{3}$	t

$$t = \frac{\frac{L}{3}\cdot 1h}{\frac{L}{x}} \Rightarrow \boxed{t = \frac{x}{3}h}$$ **RPTA. B**

20.- *Una persona compró cierto número de libros por S/. 180,00. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo precio, cada libro le hubiera costado S/. 1,00 más. ¿Cuántos libros compró esta persona?*

A) 32 *B)* 30 *C)* 2 *D)* 34 *E)* 38

Resolución.-

Sea "x" el número de libros comprados; entonces es evidente que : $x > 0$

Por condición los "x" libros costaron S/. 180,00 luego cada libro costó : $\frac{180}{x}$ .... (I)

Si el número de libros hubiera sido $(x - 6)$, el precio de cada libro hubiera sido : $\frac{180}{x-6}$ .... (II)

Por condición del problema, en este último caso cada libro debería costar S/. 1,00 más; en consecuencia de (I) y (II) se puede establecer que :

$$\frac{180}{x-6} = \frac{180}{x} + 1$$

Efectuando operaciones se obtiene : $x^2 - 6x - 1080 = 0$

Factorizando por el método de aspa simple : $(x - 36)(x + 30) = 0$

Igualando a cero cada factor obtenemos : $x = 36 \quad \vee \quad x = -30$

Puesto que : $x > 0$, concluímos que la persona compró : $x = 36$ **libros** RPTA. D

21.- Un terreno rectangular mide 40 metros de largo por 26 metros de ancho. Si en ambas dimensiones aumentamos x metros, el área aumentará en 432 metros cuadrados. ¿Cuál es el valor de x?

A) 3 m B) 6 m C) $\sqrt{72}$ m D) 12 m E) $\sqrt{432}$ m UNI 92

<u>**Resolución**</u>.-

De acuerdo con el enunciado podemos plantear dos casos :

1er Caso : Area inicial = (40) (26) .... (I)

2do Caso : Area final = $(40 + x)(26 + x)$ .... (II)

Por condición del problema se debe cumplir que : (Area inicial) + 432 = Area final .... (III)

Reemplazando (I) $\wedge$ (II) en (III) : $(40)(26) + 432 = (40 + x)(26 + x)$

Efectuando las operaciones indicadas : $1472 = 1040 + 66x + x^2$

Transponiendo términos, se establece que : $x^2 + 66x - 432 = 0$

Resolviendo esta ecuación se obtiene : $x = 6 \quad \vee \quad x = -72$

Como x es una longitud, concluímos que : $x =$ **6** RPTA. B

22.- ¿En qué día y hora del mes de abril de 1 996 (año bisiesto), se verificó que la fracción transcurrida del mes fue igual a la fracción transcurrida del año?

A) 6 de Abril ; 2h B) 4 Abril ; 3h C) 10 Abril ; 5h D) 2 Abril ; 3h E) 8 Abril ; 3h

<u>**Resolución**</u>.-

Como 1 996 fue un año bisiesto, el mes de febrero tuvo 29 *días*; en consecuencia dicho año nos dió 366 *días*. Suponiendo que x son los días transcurridas del mes de Abril, los días transcurridos del año serán :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Enero} = 31 \\ \text{Febrero} = 29 \\ \text{Marzo} = 31 \\ \text{Abril} = x \end{array}\right\} \Sigma = 91 + x$$

De este modo podemos decir que la fracción transcurrida del mes es : $\frac{x}{30}$

Asimismo, la fracción transcurrida del año será : $\frac{91+x}{366}$

Por condición del problema, se debe cumplir que : $\frac{x}{30} = \frac{91+x}{366}$

Resolviendo se obtiene : $x = \frac{65}{8} = 8\,días + \frac{1}{8}\,día$

Transformando la fracción del *día* a *horas*, concluimos que la condición dada se verificó el día : **8 de abril a las 3*h*** **RPTA. E**

23.- Dos cilíndros contienen un total de 688 galones de aceite. Si se saca 1/4 del contenido del primero y 2/5 del segundo, quedan 30 galones más en el primero que en el segundo. ¿Cuántos galones hay en cada cilíndro?

A) 288 ; 400 B) 328 ; 360 C) 368 ; 320 D) 210 ; 478 E) 250 ; 438

UNI 92

Resolución.-

Sean x e y los números de galones de aceite que poseen los cilindros respectivamente. Por condición del problema se sabe que : $x + y = 688$ .... (1)

Se sabe que del 1er cilíndro se sacan $\frac{1}{4}x$ galones, luego quedan : $\frac{3}{4}x$

Del mismo modo, del 2^{do} se sacan $\frac{2}{5}y$ galones , luego quedan : $\frac{3}{5}y$

Asimismo, por condición del problema se debe cumplir que : $\frac{3}{4}x = \frac{3}{5}y + 30$

Efectuando operaciones establecemos que : $5x - 4y = 200$ .... (2)

Finalmente resolviendo (1) $\wedge$ (2) obtenemos : $\boldsymbol{x = 328 \ \wedge \ y = 360}$ **RPTA. B**

24.- ¿Qué día del año 1 999 marcará la hoja de un almanaque, cuando el número de hojas arrancadas excede en 2 a los 3/8 del número de hojas que quedan?

A) 11 de Abril B) 12 de Abril C) 13 de Abril D) 14 de Abril E) 15 de Abril

Resolución.-

Debemos reconocer que 1 999 no es un año bisiesto, por lo tanto Febrero tendrá 28 *días* y el año 365 *días* respectivamente. Si x es el número de hojas arrancadas del almanaque, entonces faltarán arrancar $(365 - x)$ hojas.

Por condición del problema se sabe que : $x = \frac{3}{8}(365 - x) + 2$

Resolviendo se obtiene : $x = 101$

Es decir se arrancaron 101 hojas, las cuales corresponden a :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Enero} \quad : 31 \text{ hojas} \\ \text{Febrero} : 28 \text{ hojas} \\ \text{Marzo} \quad : 31 \text{ hojas}\end{array}\right\} \Sigma = 90 \text{ hojas}$$

Se observa que para completar el número total de hojas arrancadas (101), nos faltan arrancar 11 hojas; esto significa que del mes de Abril, han transcurrido 11 *días*, en consecuencia el día buscado es :

12 de Abril **RPTA. B**

25.- Dos comerciantes llegan a un mercado y desean llevar vino del mismo precio y calidad. Uno desea llevar 60 toneles y el otro 15 toneles. El vendedor les advierte que por cada tonel que compren ellos deben pagar un cierto impuesto; dado que los comerciantes solo tienen dinero justo para pagar el vino, más no los impuestos, deciden: El primero dejar 8 toneles de vino y el segundo 3 toneles de vino. Si ambos se retiran con S/. 1 800,00 del establecimiento. ¿Cuánto les resulta por cada tonel de vino más el impuesto?

A) S/. 1350,00 B) S/. 1200,00 C) S/. 1000,00 D) S/. 1500,00 E) S/. 900,00

UNI 93 - II

Resolución.-

Si x es el precio de cada tonel, el primer comerciante dejó de pagar $8x$ soles y el segundo $3x$ soles, por los toneles que dejaron de llevar. Si cada comerciante se retira con 1 800 *soles* en efectivo, cada uno invirtió ($8x$ -1 800) *soles* y ($3x$ - 1 800) *soles* respectivamente para pagar sus impuestos. Esto nos permite establecer que :

El primer comerciante llevó 52 toneles de vino y pago un impuesto igual a : $8x$ - 1800 es decir el impuesto que pago por cada tonel es : $\dfrac{8x-1800}{52}$ .... (I)

El segundo comerciante llevó 12 toneles de vino y pagó un impuesto igual a : $3x$ - 1800 es decir, el impuesto que pagó por cada tonel fue : $\dfrac{3x-1800}{12}$ .... (II)

Como ambos comerciantes pagan igual impuesto por cada tonel de (I) y (II) tenemos : $\dfrac{8x-1800}{52} = \dfrac{3x-1800}{12}$

Efectuando operaciones y despejando, encontramos : $x = 1200$ .... (III)

De (III) en (II), obtenemos el impuesto por cada tonel : 150

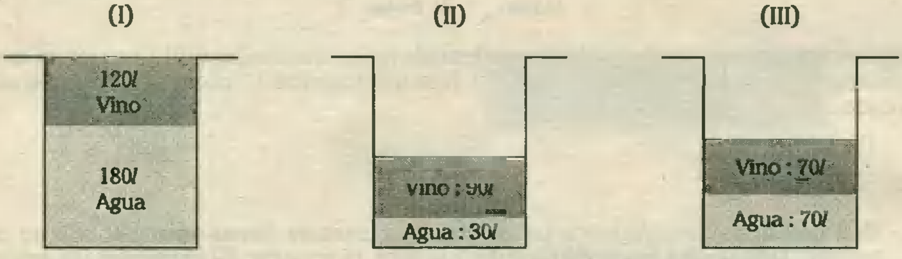
Finalmente : (Precio por tonel) + (Impuesto) = 1200 + 150 = **S/. 1350,00** **RPTA. A**

26.- Un barril contiene 120 litros de vino y 180 litros de agua, un segundo barril contiene 90 litros de vino y 30 litros de agua. ¿Cuántos litros deben tomarse de cada uno de los barriles para formar una mezcla homogénea que contenga 70 litros de agua y 70 litros de vino?

A) 100 ; 40 B) 90 ; 50 C) 70 ; 70 D) 80 ; 60 E) 110 ; 30

Resolución.-

Ilustrando el enunciado



Sean *x litros* los que se extraen del barril (I), luego del barril (II) se deben extraer $(140 - x)$ *litros*, para formar una nueva mezcla de 140*litros* en el barril (III). Asumiendo que los barriles iniciales poseen mezclas homogéneas de vino con agua, al extraer un determinado volumen de dicha mezcla, ésta guardará con el total una proporción definida con cada componente. Veamos :

a) Cálculo del número de litros de vino que se obtienen al extraer *x litros* del 1er barril .

$$(x \textit{ litros} \text{ de mezcla})\left(\frac{120l \text{ de vino}}{300l \text{ de mezcla}}\right) = \frac{2x}{5} \textit{litros} \text{ de vino}$$

b) Cálculo del número de litros de vino que se obtienen al extraer $(140 - x)$ *litros* del 2do barril.

$$(140 - x) \textit{ litros de mezcla}\left[\frac{90l \text{ de vino}}{120l \text{ de mezcla}}\right] = \frac{3(140-x)}{4} \textit{ litros} \text{ de vino}$$

Según condición del problema, la mezcla del barril (III) debe tener 70 *litros* de vino , luego :

$$\frac{2x}{5} + \frac{3(140-x)}{4} = 70$$

Resolviendo obtenemos : $x = 100$

Finalmente del 1er barril se toman **100 *l*** mientras que del 2do : **40 *l*** **RPTA. A**

27.- Dos campesinas llevan al mercado 100 manzanas; una ellas tenía mayor número de manzanas que la otra, no obstante ambas obtuvieron iguales sumas de dinero. Una de ellas le dice a la otra: «Si yo hubiera tenido la cantidad de manzanas que tú tuviste y tú la cantidad de manzanas que yo tuve, hubiéramos recibido respectivamente 15 y 20/3 soles. ¿Cuántas manzanas tenía cada una?

A)30 y 70 B) 35 y 65 C) 40 y 60 D) 45 y 55 E) 48 y 52 UNI 92

Resolución.-

Si x es la cantidad de manzanas que tenía la 1ra campesina, la 2da deberá tener $(100 - x)$. Ahora procederemos a plicar las condiciones del problema :

Si la primera hubiera tenido $(100 - x)$ manzanas hubiera obtenido 15*soles*, es decir cada manzana la hubiera vendido en : $\dfrac{15}{100-x}$ *soles*

Luego por vender todas las manzanas hubiera obtenido : $\left(\dfrac{15}{100-x}\right)(x)$ ..... (I)

Si la segunda hubiera tenido x manzanas, por cada manzana hubiera recibido : $\dfrac{\frac{20}{3}}{x} = \dfrac{20}{3x}$ soles

Luego de vender todas las manzanas habría obtenido : $\left(\dfrac{20}{3x}\right)(100 - x)$ ... (II)

Puesto que ambas obtuvieron la misma suma de dinero, de (I) y (II), tendremos : $\dfrac{15x}{100-x} = \dfrac{20(100-x)}{3-x}$

Resolviendo obtenemos : $x = 40 \quad \vee \quad x = -200$

Puesto que x es una cantidad positiva, tendremos que : $x = 40$

Finalmente la 1ra tenía **40** manzanas y la 2da **60** manzanas **RPTA. C**

28.- Cierto trabajo puede ser realizado por A y B en 70 días, por A y C en 84 días y por B y C en 140 días. ¿En qué tiempo haría B solo el trabajo?

A) 105 días B) 210 días C) 420 días D) 240 días E) 120 días

Resolución.-

Sea "L" el trabajo a realizar y sean : $x, y \wedge z$ los tiempos en días que tardan en hacer el trabajo A, B $\wedge$ C respectivamente. Ahora, encontraremos la fracción de trabajo que realiza cada uno de manera independiente :

En un día A, B y C hacen la fracción : $\dfrac{L}{x}$, $\dfrac{L}{y}$ $\wedge$ $\dfrac{L}{z}$, respectivamente.

Como A $\wedge$ B hacen el trabajo L en 70 días, en un día harán : $\dfrac{L}{x} + \dfrac{L}{y} = \dfrac{L}{70}$

De donde al simplificar se obtiene : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{70}$ .... (I)

Como A $\wedge$ C hacen el trabajo L en 84 días , en un día harán : $\dfrac{L}{x} + \dfrac{L}{z} = \dfrac{L}{84}$

Y simplificando se obtiene : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{84}$ .... (II)

Como B $\wedge$ C hacen el trabajo L en 140 días, en un día harán : $\dfrac{L}{y} + \dfrac{L}{z} = \dfrac{L}{140}$

Entonces al simplificar nos queda : $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{140}$ .... (III)

Sumando (I), (II) $\wedge$ (III) obtenemos : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{60}$ .... (IV)

Si la idea es encontrar y , reemplazaremos (II) en (IV) : $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{84} = \dfrac{1}{60} \Rightarrow$ $\boldsymbol{y = 120}$

Finalmente B trabajando solo terminará en : **210 días** **RPTA. B**

29.- Un obrero de una fábrica gasta diariamente las dos terceras partes del jornal en su alimentación, la quinta parte lo ahorra para pagar la modesta mensualidad de su habitación y el resto lo utiliza para gastos imprevistos. Si en un mes de 30 días, de los cuales no trabajó 2 días por encontrarse enfermo el monto de gastos imprevistos asciende a 40 nuevos soles los cuales los utilizó para pagar la receta del médico. ¿Cuál es el jornal del obrero?

A) 25 soles B) 18 soles C) 15 soles D) 20 soles E) 22 soles

Resolución.-

Sea x el jornal del obrero, según datos del problema su gasto por alimentación : $\frac{2}{3}x$. Asimismo su gasto por habitación será : $\frac{x}{5}$. Esto nos permite establecer un gasto diario que viene dado así :

$$\frac{2}{3}x + \frac{x}{5} = \frac{13x}{15}$$

Luego podemos deducir que el gasto mensual del obrero es : $30\left(\frac{13x}{15}\right) = 26x$

Como el obrero estuvo enfermo 2 *días*, solo pudo trabajar 28 *días*, en consecuencia su ingreso económico fue de : $28x$

De este modo los gastos imprevistos del obrero son : $28x - 26x = 2x$

Ahora por condición del problema, se debe cumplir que : $2x = 40$

Finalmente el jornal del obrero es de : $x = 20$ ***soles***

RPTA. D

30.- El Sr. Oscar le dice a José: "Hace 5 años mi edad excedía en 7 al duplo de la edad que tenías hace 4 años, pero dentro de 10 años mi edad será 4 veces la edad que tú tenías cuando tu hermano Ruben tenía la edad que yo tenía hace 38 años, cuando yo tenía la edad que tu hermano tendrá dentro de 22 años" ¿Cuántos años tiene Oscar?

A) 20 B) 50 C) 23 D) 40 E) 55

Resolución.-

Llevando toda la información del enunciado a un cuadro se tendrá:

	Tenía	Hace 5 *años*	Hace 4 *años*	Presente	Dentro 10 *años*	Dentro 22 *años*
Oscar	$z + 22$	$x - 5$	$x - 4$	x	$x + 10$	$x + 22$
José	w	$y - 5$	$y - 4$	y	$y + 10$	$y + 22$
Ruben	$x - 38$	$z - 5$	$z - 4$	z	$z + 10$	$z + 22$

Por condición del problema se sabe que : $x - 5 = 2(y - 4) + 7 \Rightarrow x - 2y = 4$ .... (I)

También se establece que : $x + 10 = 4w$ .... (II)

Utilizando la propiedad de que toda diferencia de edades se mantiene constante, a partir de los datos del cuadro, se cumplirá que :

Entre José y Rubén : $w - (x - 38) = y - z$ .... (III)

Entre Oscar y José : $(z + 22) - w = x - y \Rightarrow z = w + x - y - 22$ ... (IV)

Sustituyendo (IV) en (III) se consigue : $w = y - 8$ .... (V)

Reemplazando (V) en (II) se obtiene : $x - 4y = -42$ .... (VI)

Efectuando 2(I) - (VI) : $2x - x = 8 - (-42)$

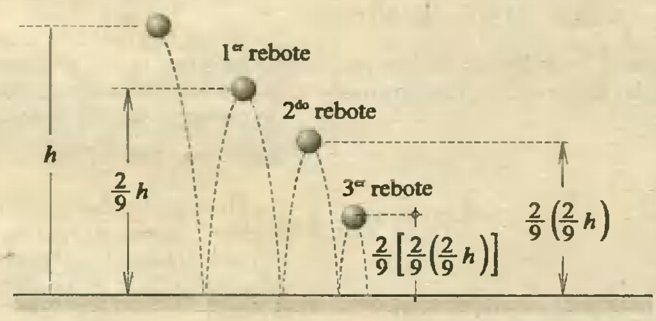
Finalmente Oscar tiene : $x = 50$ ***años*** **RPTA. B**

31.- Al dejar caer al suelo una pelota desde una altura h, se observa que cada vez que rebota se eleva una altura igual a los 2/9 de donde cayó; si luego del tercer rebote la pelota se ha elevado 16/27 de metro ¿Cuál es la altura H?

A) 81m ***B) 27m*** ***C) 48m*** ***D) 54m*** ***E) 108m***

Resolución.-

A partir de los datos del problema, se puede elaborar el siguiente gráfico :



Luego por condición se debe cumplir : $\frac{2}{9}\left[\frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}h\right)\right] = \frac{16}{27}$

$$\frac{8h}{27 \cdot 27} = \frac{16}{27}$$

$\therefore$ $h = 54\,m$ **RPTA. D**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Se compra cajones de naranja a 100 *soles* cada uno y cada cajón contiene 20 *kg*. Primero se vende la mitad a 20 *soles* el *kg*, después la cuarta parte a 15 *soles* el *kg* y por último el resto se remata a 10 *soles* el *kg* ganando: S/. 11 250,00 en total. ¿Cuántos cajones de naranja se habían comprado?

A) 65 B) 70 C) 55 D) 50 E) 60

2.- Habiendo perdido un jugador la mitad de su dinero volvió al juego y perdió 1/2 de lo que le quedaba; repitió lo mismo por tercera vez y cuarta vez después de lo cual le quedaron 6 *soles*. ¿Cuánto dinero tenía al comenzar el juego?

A) 84 B) 72 C) 94 D) 96 E) 86

3.- Después de las 3 *am* ¿Cuál es la hora más próxima en que las agujas de un reloj forman un ángulo llano?

A) $3h\ 49\,min$ D) $3h\ 50\ min$

B) $3h\ 49\frac{7}{11}\ min$ E) $3h\ 49\frac{2}{11}\ min$

C) $3h\ 49\frac{1}{11}\ min$

4.- Las 2 manecillas de un reloj están superpuestas al medio día. ¿A qué hora se encontrarán nuevamente la una sobre la otra?

A) $1h\ \ 4\,min\,24\frac{2}{11}s$

B) $1h\ \ 6\,min\,32\frac{1}{11}s$

C) $1h\ \ 5\,min\,27\frac{3}{11}s$

D) $1h\ \ 5\,min\,27\frac{8}{11}s$

E) $1h\ \ 20\,min\,16\frac{13}{11}s$

5.- En el año 1 932 Pedro tenía tantos años como expresan las dos últimas cifras del año de su nacimiento. Al poner en conocimiento a su abuelo esta coincidencia se quedó pasmado cuando el abuelo le responde que con su edad también ocurría lo mismo. ¿Cuál es la edad del abuelo?

A) 66 B) 63 C) 64 D) 65 E) 67

6.- Los ahorros de un niño constan de: $(p + 1)$, $(3p - 5)$ ∧ $(p + 3)$ monedas de 5; 10 y 20 céntimos respectivamente. ¿A cuánto asciende sus ahorros si al cambiarlo en mone-das de 25 céntimos, el número de monedas obtenidas es el doble del número de monedas de 5 céntimos?

A) 900 B) 455 C) 345 D) 400 E) 360

7.- De un juego de 32 cartas se sacan primero x cartas y tres más. Luego se saca la mitad de lo que resta, si todavía quedan 10 cartas. ¿Cuántas cartas se sacó la primera vez?

A) 9 B) 14 C) 12 D) 8 E) 10

8.- Un hombre debe realizar un viaje de 820 *km* en 7 *horas*, si realiza parte del viaje en avión a 200 *km/h* y el resto en auto a razón de 55 *km/h* ¿Cuál es la distancia recorrida en avión?

A) 200 B) 500 C) 600 D) 700 E) 800

9.- Dos corredores Pedro y Juan parten simultáneamente en viaje de una ciudad a otra distantes 60 *km*. La velocidad de Pedro es 4 *km/h* menor que la de Juan; después de llegar Juan a la segunda ciudad emprende inmediatamente el viaje de regreso y se encuentra con Pedro después de recorrer 12 *km*. ¿Cuál es la velocidad de Pedro?

A) 6 *km/h* B) 8 *km/h* C) 10 *km/h*

D) 12 *km/h* E) 20 *km/h*

10.- Un comerciante tenía una determinada suma de dinero. El primer año gastó 100 pesos y aumentó a lo que quedaba un tercio de este resto, al año siguiente volvió a gastar 100 pesos y aumentó a la cantidad restante un tercio de ella. Al tercer año gasto de nuevo 100 pesos y agrega la tercera parte de lo que quedaba. Si el capital resultante es el doble del inicial ¿Cuál fue el capital inicial?

A) 1 480 B) 1 500 C) 1 400

D) 2 380 E) 2 000

11.- Una librería tiene para la venta un cierto número de libros, vende primero las 3/5 partes y después le hacen un pedido de los 7/8 de lo que le queda, pero antes de servir este pedido se le inutilizan 240 libros y por tanto enviando todos los libros útiles que le quedan solo cubre los 4/5 de la cantidad pedida. ¿Qué cantidad de libros se vendieron?

A) 2 000 B) 3 000 C) 1 760

D) 3 520 E) 2 240

12.- Un deportista apuesta a tirar al blanco con la condición de que por cada tiro que acierte recibirá "a" soles y pagará "b" por cada uno de los que falle después de "n" tiros ha recibido "c" soles. ¿Cuántos tiros dió en el blanco?

A) $\frac{an+c}{a-b}$ B) $\frac{bn+c}{a-c}$ C) $\frac{bn+c}{a+b}$

D) $\frac{an+c}{a+b}$ E) $\frac{bn-c}{a+b}$

NIVEL B

13.- Un padre tiene x años y su hijo y años. ¿Dentro de cuántos años tendrá el padre el doble de la edad de su hijo?

A) $x + 2y$ B) $x - 2y$ C) $2x + y$

D) $2x - y$ E) $x + y$

14.- Una fuente llena en "t" horas un depósito, y un desagüe vacía el mismo depósito en $2t$ horas. Durante 3 *horas* ha estado abierta la fuente, el desagüe se abrió una *hora* antes de cerrar la fuente y permaneció abierto t horas después de cerrarla, quedando así "a" m^3 en el depósito. Si en ese instante abrimos la fuente ¿Qué tiempo tardará en llenarse el depósito estando cerrado el desagüe?

A) $t(1+a)$ B) $t(1-a)$ C) ta

D) $\frac{a}{t}$ E) $\frac{3t-5a}{2}$

15.- Dos vendedoras llevaron en total 180 naranjas al mercado, una de ellas tenía más naranjas que la otra, pero recibió en la venta la misma cantidad de dinero que aquella. Una vez vendidas todas las naranjas la primera vendedora le dijo a la segunda : «Si yo hubiera llevado al mercado la misma cantidad de naranjas que tú, habría recibido 15 *dólares*». La segunda contestó : «Y si yo hubiera vendido las naranjas que tenías tú, habría obtenido como producto de la venta 20/3 *dolares*». ¿Cuántas naranjas llevó al mercado cada vendedora?

A) 60 y 120 D) 64 y 116

B) 72 y 108 E) 80 y 100

C) 36 y 144

16.- Un depósito de agua tiene 3 llaves de las cuáles las dos primeras sirven para llenarlo y la tercera para desaguarlo. El depósito contiene 135 l; si se abren las 3 llaves en los siguientes periodos de tiempo.

1) La 1^{ra} $5min$; la 2^{da} $11\,min$ y la 3^{ra} $3\,min$

2) La 1^{ra} $7\,min$; la 2^{da} $19\,min$ y la 3^{ra} $12\,min$

3) La 1^{ra} $10\,min$; la 2^{da} $10\,min$ y la 3^{ra} $6\frac{1}{4}$ min

¿Cuántos litros de agua surten o desaguan por *minuto* la 1^{ra} ; 2^{da} y 3^{ra} llave respectivamente?

	1^{ra} llave	2^{da} llave	3^{ra} llave
A)	12	10	11
B)	11	12	10
C)	10	11	12
D)	11	13	12
E)	12	11	10

17.- Una persona compró objetos al precio de S/. 48.00 y S/. 42,00 pero no recuerda cuántos compró de S/. 48,00 ni cuántos de S/. 42,00 solamente recuerda que gastó S/. 1542,00 y que el número de objetos de S/. 48,00 no llegó a diez. ¿Cuántos objetos de S/. 48,00 compró ?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 9 E) 5

18.- Dos operarios $A \wedge B$ se comprometieron a realizar un trabajo en 40 *horas*, al empezar la novena hora de trabajo se retira A , y B la continúa terminándolo en 12 horas más de lo estipulado en el compromiso. Si en lugar de B, A lo hubiese continuado solo. ¿Cuántas horas adicionales de lo estipulado en el compromiso habría empleado?

A) $85h\ 20min$ D) $117h\ 15min$

B) $117h\ 20min$ E) $85h\ 40min$

C) $117h\ 40min$

19.- Un patio tiene forma rectangular ,si tuviera 3 *metros* más de largo y 4 *metros* más de ancho sería 192 m^2 más grande, si tuviera 4 *metros* menos de largo y 3 *metros* menos de ancho sería 158 m^2 más pequeño. Las dimensiones del patio son:

A) $10m$ y $20m$ D) $10m$ y $30m$

B) $20m$ y $30m$ E) $10m$ y $40m$

C) $30m$ y $40m$

20.- En una reunión unos empiezan jugando, otros charlando y el resto bailando, los que bailan son la cuarta parte de los reunidos, después 4 de ellos dejan el juego por el baile, 1 deja la charla por el juego y 2 dejan el baile por la charla ,con lo cual resulta entonces que bailan tantos como juegan y juegan tantos como charlan. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

A) 30 B) 25 C) 35 D) 24 E) 12

21.- Un industrial gasta diariamente 150 000 *soles* para el pago de los jornales de 40 operarios de una clase y 75 de otra, pero con el mismo gasto desea duplicar el número de operarios de la primera clase y reducir a 25 los de la segunda clase. ¿Cuál será el nuevo jornal de un operario de cada clase?

A) $1\,500 \wedge 1\,200$ D) $940 \wedge 1\,500$

B) $150 \wedge 120$ E) $1\,200 \wedge 940$

C) $15\,000 \wedge 12\,000$

22.- Se compra cierto número de relojes por 5 625 *dólares*; sabiendo que el número de relojes comprados es igual al precio de un reloj en *dólares* ¿Cuántos relojes se han comprado?

A) 70 B) 75 C) 80 D) 85 E) 65

23.- Un granjero amarra su vaca en la esquina de su casa, él observa que si la cuerda fuera alargada en 10 *metros* ella podría abarcar 4 veces el área original; entonces la longitud original de la cuerda es:

A) $\frac{10}{3}m$ B) $5m$ C) $15m$

D) $20m$ E) $10m$

24.- Un anciano deja una herencia de 2 $m.n$ *soles* a un cierto número de parientes sin embargo m de estos renuncian a su parte y entonces cada uno de los restantes se beneficia en n *soles* más. ¿Cuántos son los parientres ?

A) n B) m C) $2n$

D) $2m$ E) $m + n$

25.- Un número positivo menos el doble de la suma de sus cifras es igual a la suma de los cuadrados de estas dos cifras; además el número obtenido al permutar sus cifras menos 9 da el número original, entonces el producto del cuadrado de dicho número por la suma de sus dos cifras es :

A) 432 B) 2 645 C) 5 120

D) 8 092 E) 12 943

NIVEL C

26.- ¿A qué hora encuentra el minutero de un reloj al horario entre las 7 y 8 ?

A) $7h\,37\frac{2}{11}min$ D) $7h\,38\frac{2}{11}min$

B) $7h\,32\frac{7}{11}min$ E) $7h\,38\frac{1}{11}min$

C) $7h\,35\frac{2}{11}min$

27.- Se sacaron 9 *litros* de un barril que estaba lleno de vino, reemplazándolo por agua. A continuación se sacaron 9 *litros* de ésta mezcla reemplazándolos por agua. La cantidad de vino que quedó en el barril y la de agua están en la relación de 16/9. ¿Cuál es la capacidad del barril?

A) $35l$ B) $40l$ C) $45l$

D) $90l$ E) $135l$

28.- Un automóvil sube una cuesta a 60 *km/h*, la baja a 90 *km/h*, y en el llano va 80 *km /h*. Para recorrer 230 *km* de A hasta B emplearía 3 *horas* y en el regreso 10 *minutos* más. Calcular la longitud del camino llano que hay entre A y B.

A) 60 *km* B) 40 *km* C) 70 *km*

D) 30 *km* E) 80 *km*

29.- Cuando yo tenga la edad que él tiene, que es lo que tenías, cuando el tenía la edad que yo tengo, él tendrá la edad que tienes y a tí te faltará 15 *años* para duplicar la edad que yo tengo. ¿Cuántos años tengo, si hace 10 años tenía la mitad de la edad que tienes?

A) 30 B) 20 C) 50 D) 25 E) 35

30.- ¿Qué hora marcará un reloj estando el horario entre la 1 y las 2 y el minutero entre la 6 y las 7 sabiendo que después de cierto tiempo las agujas estarán permutadas?

A) $1\,h\,30\,min\,35\,s$

B) $1\,h\,30\,min\,37\,s$

C) $1\,h\,30\,min\,31\frac{32}{143}\,s$

D) $1\,h\,32\,min\,38\,s$

E) $1\,h\,30\,min\,13\frac{64}{143}\,s$

31.- Un excursionista parte en su auto a las 8 *am* hacia un lugar distante 504 *km*, 3 *horas* después hace una parada en la cual se percata que la fracción transcurrida del día es igual a la fracción del camino que aún le falta recorrer. ¿Qué velocidad tiene?

A) 120 *km/h* B) 89 *km/h* C) 91 *km/h*

D) 80 *km/h* E) 78 *km/h*

32.- Sabiendo que 75 vacas se han comido en 12 *días* la hierba de un prado de 60 *áreas* y que 81 vacas se han comido la de un prado de 72 *áreas* en 15 *días*. ¿Cuántas vacas serán necesarias para comer en 18 *días* la hierba de un prado de 96 *áreas*?

Suponer que en los 3 prados la hierba está a la misma altura y que continúa creciendo uniformemente; también suponer que todas las vacas consumen la misma cantidad de hierba diariamente.

A) 80 B) 90 C) 100 D) 120 E) 140

33.- Las agujas de la horas, minutos y segundos marcan las 12. ¿Al cabo de cuánto tiempo la aguja de los segundos será bisectriz del ángulo que forman las otras dos agujas?

A) $1\,min\,780\,s$ D) $1\,min\,\frac{780}{1427}\,s$

B) $1\,min\,1427\,s$ E) Absurdo

C) $1\,min\,\frac{1427}{780}\,s$

34.- Se ha construido un muro, el primer día se hizo 1 m^3 más la novena parte de lo que quedaba por hacer, el segundo día 2 m^3 y la novena parte de lo que quedaba, el tercer día $3m^3$ y la novena parte del resto y así sucesivamente.

¿Calcular el volumen del muro suponiendo que todos los días se hizo la misma cantidad de obra?

A) 81 m^3 B) 64 m^3 C) 72 m^3

D) 42 m^3 E) 96 m^3

35.- Un comerciante compró maletas al precio de S/. 7 500,00 c/u y además le regalan 4 por cada 19 que compra, recibiendo en total 391 maletas. ¿Cuál fue en soles, la inversión del comerciante?

A) 2 422 500 D) 240 000

B) 2 423 500 E) 2 300 200

C) 243 000

36.- Una liebre perseguida por un perro lleva ya adelantados 90 saltos y da 5 saltos mientras que el perro da 4 ; además 7 saltos de la liebre equivalen a 5 del perro. ¿Cuántos saltos dará el perro para alcanzar a la liebre?

A) 450 B) 300 C) 600

D) 650 E) 500

37.- Un tonel A contiene 237 *l* de vino que cuesta S/. 18,00 el *litro*, otro tonel B contiene 222 *l* de vino de S/. 15, 50 el *litro*. Se desea retirar de cada uno de los toneles la misma cantidad de *litros* de manera que al colocar en A el vino sacado de B y viceversa los dos toneles tengan el mismo valor. ¿Qué cantidad será ésta?

A) 330 *l* B) 82, 50 *l* C) 165 *l*

D) 80 *l* E) 40 *l*

38.- Un transportista pidió 12 dólares por trasladar 7m^3 de piedra y otro 9 *dólares* por 5 m^3. Resultando caros y desiguales los precios se les ofreció un aumento igual para los dos en el importe total y en las cantidades de piedra ,siendo el número de *dólares* aumentados igual al de m^3 aumentados. Aceptada la condición cada transportista cobró la misma cantidad por m^3 ¿Qué cantidad fue ésta?

A) 2 B) 2,5 C) 1 D) 1,8 E) 1,5

39.- Dos caños obrando a la vez demoran en llenar un estanque 1 *hora* 20 *minutos*; si cada uno por separado invirtiera una *hora* menos los dos juntos tardarían solamente 45 *minutos*. ¿En qué tiempo se llenará el estanque al actuar solamente el caño de mayor caudal?

A) 1 *h* B) 2 *h* C) 3 *h*

D) 4 *h* E) 5 *h*

40.- Juan le dice a Carlos: "Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, pero cuanto tú tengas la edad que yo tengo la suma de nuestras edades será de 63 *años*" ¿Cuántos *años* tiene Juan?

A) 20 B) 33 C) 21 D) 38 E) 28

41.- Calcular la suma de las sextas potencias de tres números reales diferentes, sabiendo que la suma de sus cuartas potencias es once; siendo once también la suma de sus cuadrados aumentado en el doble del cuadrado de uno de ellos.

A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 31

42.- Dispongo de 8 000 nuevos *soles* y gasto los tres quintos de lo que no gasto. ¿Cuánto no gasto?

A) 5 000 B) 3 000 C) 2 000

D) 4 000 E) N.A.

21 Desigualdades e inecuaciones de 1er Grado

20.1) DESIGUALDAD

Es la relación que existe entre dos expresiones reales de diferente valor.

21.1A SIGNOS DE RELACION

Son símbolos que se utilizan para representar una desigualdad, y son :

$$\left.\begin{array}{l} > : \text{ Mayor que} \\ < : \text{ Menor que} \end{array}\right\} \text{Signos de relación simple}$$

$$\left.\begin{array}{l} \geq : \text{ Mayor o igual que} \\ \leq : \text{ Menor o igual que} \end{array}\right\} \text{Signos de relación doble}$$

Si : a y b son dos expresiones reales, entonces teniendo en cuenta a los signos de la relación presentamos los siguientes casos :

$a > b$: se lee «a es mayor que b»

$a < b$: se lee «a es menor que b»

$a \geq b$: se lee «a es mayor o igual que b»

$a \leq b$: se lee «a es menor o igual que b»

21.1B AXIOMAS DE DESIGUALDAD

Si a , b y c son tres números reales, tendremos :

I) Ley de Tricotomía.- Dados $a \wedge b$, solo se podrá establecer entre ellos una de las siguientes relaciones :

$$a > b \ \vee \ a < c \ \vee \ a = b$$

II) Ley Transitiva.- Dados a , $b \wedge c$ tal que :

$$\text{Si } a < b \ \wedge \ b < c, \text{ entonces : } a < c$$

III) Ley Aditiva.- Dados a , $b \wedge c$ se tiene que :

$$\text{Si } a < b, \text{ entonces : } a + c < b + c$$

IV) Ley Multiplicativa.- Aquí se pueden distinguir dos casos :

1) Sea : $c \in \mathbb{R}^+$, entonces : si $a < b \Rightarrow a.c < b.c$

2) Sea : $c \in \mathbb{R}^-$, entonces : si $a < b \Rightarrow a.c > b.c$

Observación.- *Para la resolución de algunos ejercicios será necesario interpretar correctamente las siguientes relaciones :*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1) Si :} & a \geq b \Rightarrow a > b \vee a = b \\ \text{2) Si :} & a \leq b \Rightarrow a < b \vee a = b \end{array}\right\}, \text{ donde : } \vee = \text{unión}$$

$$\text{3) Si : } a < b < c \Rightarrow b > a \wedge b < c \}, \text{ donde : } \wedge = \text{intersección}$$

21.1C PROPIEDADES FUNDAMENTALES

I) Si: $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^{2n} \geq 0$

II) Si: $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

III) Si: $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

IV) Si: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$ $\vee$ Si: $\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{\boldsymbol{a+c > b+d}}$ $\qquad \Rightarrow \overline{\boldsymbol{a-c > b-d}}$

V) Considerando que : $\{a\,;b\,;c\,;d\} \subset \mathbb{R}^+$

Si: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$ $\vee$ Si: $\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{\boldsymbol{a.c > b.d}}$ $\qquad \Rightarrow \overline{\boldsymbol{\frac{a}{c} > \frac{b}{d}}}$

VI) Siendo : $a, b \wedge c$ de igual signo, se establece que :

1) Si : $\boldsymbol{a < b < c \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}}$

2) Si : $\boldsymbol{a < b \leq c \Rightarrow \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} < \frac{1}{a}}$

VII) Siendo $a \wedge b$ dos números reales , $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se verifica que :

1) Si : $\boldsymbol{a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}}$

2) Si : $\boldsymbol{a > b \Rightarrow \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}}$

VIII) Siendo $a \wedge b$ dos números reales positivos , $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ se verifica que :

1) Si : $\boldsymbol{a > b \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}}$

2) Si : $\boldsymbol{a > b \Rightarrow \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b}}$

IX) Siendo $a \wedge b$ dos números reales negativos , $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ se verifica que :

Si : $\boldsymbol{a > b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}\ ;\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*}$

X) Considerando tres números reales : a , $b \wedge c$, tal que : $a < 0 \;\wedge\; c > 0 \;\wedge\; c^2 > a^2$

Si : $a < b < c \;\Rightarrow\; 0 \leq b^{2n} < c^{2n} \;;\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

21.1D INTERVALO

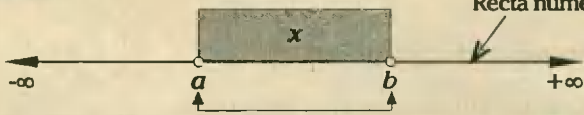
Se llama así al conjunto de números contenidos entre dos números fijos denominados *extremos*. En determinados casos los extremos también forman parte del intervalo.

Frecuentemente se distinguen tres clases de intervalos siendo estos :

I) Intervalo Abierto.- No se considera a los extremos, solo a los números que están contenidos entre ellos :

Símbolo : $\langle\ \rangle$, o , $]\ [$

Descripción geométrica :



Interpretación : $a < x < b$

Notación : $x \in \langle a\, ;\, b\rangle$

II) Intervalo Cerrado.- Considera a los extremos y a los números contenidos entre ellos.

Símbolo : $[\ ]$

Descripción geométrica :

Interpretación : $a \leq x \leq b$

Notación : $x \in [a\, ;\, b]$

III) Intervalo Semiabierto (Mixto).- Considera solo a uno los extremos y a los números contenidos entre ellos.

Símbolo : $\langle\ ]$, o , $[\ \rangle$

Descripción geométrica :

Interpretación : $a < x \leq b$

Notación : $x \in \langle a\, ;\, b]$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Si : $x \in [1/2 \,;\, 1\rangle$ ***, entonces :*** $\dfrac{4x^2-3}{2}$ ***, pertenece al intervalo :***

A) $\langle -1/2 \,;\, 1]$ *B)* $[-1/2 \,;\, 3/2\rangle$ *C)* $[-1 \,;\, 1/2\rangle$ *D)* $\langle 1/2 \,;\, \infty\rangle$ *E)* $\langle -\infty \,;\, -1\rangle$

Resolución.-

Los ejercicios de ese tipo se resuelven por lo general siguiendo una misma estrategia que consiste en formar la expresión propuesta ($\dfrac{4x^2-3}{2}$) a partir del intervalo dado. Veamos :

Por dato se sabe que : $x \in [1/2 \,;\, 1\rangle$

Escribiendo en notación de desigualdad : $\dfrac{1}{2} \le x < 1$

En base a la propiedad VIII del item 21.C , elevamos al cuadrado : $\dfrac{1}{4} \le x^2 < 1$

Multiplicando toda la desigualdad por 4, se consigue : $1 \le 4x^2 < 4$

Restando 3 a cada miembro, logramos obtener : $-2 \le 4x^2 - 3 < 1$

Finalmente dividiendo por 2, se tendrá : $-1 \le \dfrac{4x^2-3}{2} < \dfrac{1}{2}$

Pasando a notación de intervalo, concluimos que : $\dfrac{4x^2-3}{2} \in [-1 \,;\, 1/2\rangle$ **RPTA. C**

2.- Si : $x \in \langle -1 \,;\, 1/2\rangle$***, entonces :*** $\dfrac{x}{x-1}$ ***, pertenece al intervalo :***

A) $\langle -1/2 \,;\, 1\rangle$ *B)* $\langle -1/2 \,;\, 3/2\rangle$ *C)* $\langle -1 \,;\, 1/2\rangle$ *D)* $\langle -1 \,;\, 0\rangle$ *E)* $\langle 0 \,;\, 1\rangle$

Resolución.-

Para este ejercicio procederemos tal como lo hicimos en el problema anterior. Dadas las características de la expresión a formar, se recomienda hacer una transformación previa de la misma con la finalidad de presentar variables solo en los denominadores. Te sugiero hacer un repaso previo del Cap. 7 sobre Fracciones Algebraicas. Veamos :

La expresión a formar es : $N = \dfrac{x}{x-1}$

La cual se puede escribir así : $N = \dfrac{(x-1)+1}{x-1}$

Efectuando la división indicada, tendremos : $N = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ .... (*)

A continuación formaremos N a partir del intervalo dado para x : $x \in \langle -1 \,;\, 1/2 \rangle$

Pasando a notación de intervalo, se tendrá : $-1 < x < \frac{1}{2}$

Restando 1 a cada miembro, se obtiene : $-2 < x - 1 < -\frac{1}{2}$

Aplicando la propiedad VI del item 21.1C, se tendrá : $-2 < \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}$

Sumando 1 a cada miembro, se concluye que : $-1 < \underbrace{1+\frac{1}{x-1}} < \frac{1}{2}$

Reemplazando lo indicado por (*), deducimos que : $-1 < N < \frac{1}{2}$

Finalmente pasando a notación de intervalo , nos queda : $N \in \langle -1 \,;\, 1/2 \rangle$ **RPTA. C**

3.- Si : $x \in [-2 \,;\, 4]$ ¿A qué intervalo pertenece : $\frac{2x+3}{x+3}$?

A) $\left[1 \,;\, \frac{11}{7}\right]$ *B)* $\left[-1 \,;\, \frac{11}{7}\right]$ *C)* $\left[-\frac{11}{7} \,;\, -1\right]$ *D)* $\left[-\frac{11}{7} \,;\, 1\right]$ *E)* $\left[-\frac{1}{2} \,;\, 4\right]$

Resolución.-

Sea N la expresión a formar, entonces : $N = \frac{2x+3}{x+3}$

Efectuando la división indicada, tendremos que : $N = 2 - \frac{3}{x+3}$ ....(*)

Ahora construiremos N a partir del dato para x : $-2 \le x \le 4$

Sumando 3 a cada miembro, se consigue : $1 \le x + 3 \le 7$

Aplicando la propiedad VI vista en el item 21.1C, se tendrá : $\frac{1}{7} \le \frac{1}{x+3} \le 1$

Multiplicando por -3 a toda la desigualdad , nos queda : $-3 \le -\frac{3}{x+3} \le -\frac{3}{7}$

Finalmente sumando 2 a cada miembro, logramos : $-1 \le \underbrace{2-\frac{3}{x+3}} \le \frac{11}{7}$

Reemplazando lo indicado por (*), reconocemos que : $-1 \le N \le \frac{11}{7}$

Pasando a notación de intervalo, concluimos que : $N \in \left[-1 \,;\, \frac{11}{7}\right]$ **RPTA. B**

4.- Si : $x > 0 \wedge y > 0$, demostrar que : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Demostración.-

Para efectuar cualquier demostración sobre desigualdades, te recomiendo tener en cuenta las propiedades vistas en el item 21.1C.

A partir de la propiedad I, se puede establecer que : $\forall \{x ; y\} \subset \mathbb{R}$ se cumple $(x-y)^2 \geq 0$

Desarrollando el 1er miembro, se tendrá : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

Sumando $4xy$ a ambos miembros, se consigue : $x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$

Reconociendo que el 1er miembro es un T.C.P. : $(x+y)^2 \geq 4xy$

Puesto que : $x > 0 \wedge y > 0$, aplicaremos la propiedad VIII visto en el item 21.1C : $\sqrt{x+y}^2 \geq \sqrt{4xy}$

Aplicando ahora la propiedad VIII , tendremos : $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

Finalmente dividiendo por 2, concluimos que : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ *l.q.q.d*

5.- Si : a, b $\wedge$ c son tres números reales positivos demostrar que :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Demostrar.-

Aplicando la propiedad (I) del item 21.1C, se puede establecer que :

$(a-b)^2 \geq 0$; efectuando : $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .... (I)

$(a-c)^2 \geq 0$; efectuando : $a^2 + c^2 \geq 2ac$ .... (II)

$(b-c)^2 \geq 0$; efectuando : $b^2 + c^2 \geq 2bc$ .... (III)

Efectuando : (I) + (II) + (III) , obtenemos : $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$

Finalmente la demostración queda realizada al dividir ambos miembros por 2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ *l.q.q.d*

6.- Si a, b, c $\wedge$ d son cuatro números reales positivos, demuestre que :

$$ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2} \,.\, \sqrt{b^2 + d^2} \quad \text{..... (Desigualdad de Cauchy)}$$

Demostración.-

De acuerdo con la primera equivalencia de Lagrange vista en el Cap.4, podemos plantear : $(ab+cd)^2 + (ad-bc)^2 = \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)$

Transponiendo términos, se consigue : $(ad-bc)^2 = \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right) - (ab+cd)^2$ ..... (I)

Según la Propiedad I del item 21.1C, se puede afirmar que : $(ad-bc)^2 \geq 0$ ..... (II)

Sustituyendo (I) en (II) : $\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right) - (ab+cd)^2 \geq 0$

Transponiendo términos, se obtiene : $-(ab+cd)^2 \geq -\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)$

Teniendo en cuenta el IV Axioma de Desigualdad, multiplicamos a ambos miembros por (-1) : $(ab+cd)^2 \leq \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)$

Puesto que a , b , c y d son positivos, aplicaremos la Propiedad VIII vista en el item 21.1C $\sqrt{(ab-cd)^2} \leq \sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)}$

Efectuando las simplificaciones, concluímos que : $ab + cd \leq \sqrt{a^2+c^2} \cdot \sqrt{b^2+d^2}$

l.q.q.d

7.- Si : a ∧ b son dos números reales positivos, demuestre que :

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \forall\, a \neq b$$

<u>**Demostración**</u>.-

Por condición : $\{a\,;b\} \subset \mathbb{R}^+ / a \neq b$; luego a partir de la Propiedad I visto en el item 21.1C, se cumple : $(a-b)^2 > 0$

Desarrollando y acomodando tenemos : $a^2 - ab + b^2 > ab$

Multiplicando por $(a+b)$ a ambos miembros : $\underbrace{(a+b)\,(a^2-ab+b^2)} > (a+b)\,ab$

Según el Cap.4; la parte indicada le corresponde al desarrollo de una suma de cubos, en consecuencia : $a^3\,b^3 > ab\,(a+b)$

Dividiendo a ambos miembros por $a^2\,b^2$: $\dfrac{a^3+b^3}{a^2b^2} > \dfrac{ab(a+b)}{a^2b^2}$

Finalmente simplificando en cada miembro, se consigue : $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2} > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

lqqd.

21.2) CLASES DE DESIGUALDAD

21.2A DESIGUALDAD ABSOLUTA

Se le llama también Desigualdad Incondicional; y se caracteriza por que mantiene el sentido de su signo de relación para cualquier sistema de valores reales atribuidos a sus variables. Veamos algunos ejemplos :

a) $x^2 + 1 > 0$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$

b) $(x-1)^4 + (x-y+1)^2 + 3 > 0$; $\forall\ \{x ; y\} \subset \mathbb{R}$

21.2B DESIGUALDAD RELATIVA

También es conocida con el nombre de Desigualdad Condicional, y es aquella que mantiene el sentido de su signo de relación solo para valores reales particulares atribuidos a su variable. A continuación mostramos algunos ejemplos:

a) $2x + 5 > x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$

Esto significa que la 1[ra] desigualdad solo se verifica si se verifica la 2[da]

b) $3x - 2 < x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$

Idéntico al caso anterior.

NOTA.- *Comúnmente a la desigualdad relativa se le da el nombre de :* **Inecuación.**

21.3) INECUACION DE 1ER GRADO

Se llama inecuación de 1[er] miembro a toda inecuación que admite alguna de las siguientes formas :

$$ax + b < 0 \quad ; \quad ax + b > 0 \quad ; \quad ax + b \leq 0 \quad \wedge \quad ax + b \geq 0$$

Donde x es la incógnita $\wedge$ $\{a ; b\} \subset \mathbb{R} / a \neq 0$

RESOLUCIÓN DE UNA INECUACION

Consideramos a la inecuación : $\quad ax + b < 0$

$$ax < -b$$

a) Si : $a > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\dfrac{b}{a}$, es decir, su conjunto solución es : $x \in \left\langle -\infty ; -\dfrac{b}{a} \right\rangle$

b) Si : $a < 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\dfrac{b}{a}$, es decir, su conjunto solución es : $x \in \left\langle -\dfrac{b}{a} ; \infty \right\rangle$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

8.- Resolver la siguiente inecuación : $(2x-1)^2+x(x+1)+3>5x(x-3)+2(x-5)$

A) $\left\langle -\infty ; \frac{7}{5} \right\rangle$ *B)* $\left\langle -\frac{7}{5} ; 0 \right\rangle$ *C)* $\left\langle -\frac{7}{5} ; \infty \right\rangle$ *D)* $\left\langle \frac{7}{5} ; \infty \right\rangle$ *E)* $\left\langle 0 ; \frac{7}{5} \right\rangle$

Resolución.-

Efectuando las multiplicaciones indicadas en cada miembro de la inecuación, tendremos : $4x^2-4x+1+x^2+x+3>5x^2-15x+2x-10$

Sumando términos semejantes, obtenemos : $5x^2-3x+4>5x^2-13x-10$

Reduciendo y transponiendo términos : $10x>-14$

Dividiendo por 10, tendremos : $x>-\frac{14}{10}$

Simplificando concluímos que : $x>-\frac{7}{5}$

Finalmente el conjunto solución de x será : $x\in\left\langle -\frac{7}{5} ; \infty \right\rangle$ **RPTA. C**

9.- ¿Cuál es el mayor número entero "x" que verifica : $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}>\frac{5x+1}{3}$?

A) -2 *B) -1* *C) 0* *D) 1* *E) 2*

Resolución.-

Multiplicando a ambos miembros por el M.C.M de los denominadores se tendrá : $60\left(\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}\right)>60\left(\frac{5x+1}{3}\right)$

Efectuando la multiplicaicón indicada : $75x-15-18x+78>100x+20$

Transponiendo términos se consigue : $-43x>-43$

Dividiendo por -43, tendremos : $x<1$

Esto nos permite asegurar que el C.S. de x es : $x\in\langle -\infty ; 1\rangle$

Finalmente reconocemos que el mayor número entero "x" que verifica la inecuación es : $x=0$ **RPTA. C**

10.- Encontrar el menor número natural par que verifica : $\frac{4x-3}{2}-x>\frac{2}{3}(x+1)$

A) 8 *B) 6* *C) 4* *D) 10* *E) 12*

Resolución.-

Multiplicando ambos miembros de la inecuación por 6 (MCM de los denominadores), se tendrá : $3(4x-3)-6x > 4(x+1)$

Efectuando operaciones indicadas y transponiendo términos obtenemos : $2x > 13$

Dividiendo por 2 , encontramos que : $x > 6{,}5$

Finalmente observamos que el menor número natural par que satisface la inecuación es : $\boxed{x = 8}$ **RPTA. A**

11.- Resolver : $\dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{7x-2}{4} > \dfrac{2-x}{4} - \dfrac{x}{6}$

A) $\langle -2\,;\,0\rangle$ *B)* $\langle -2\,;\,\infty\rangle$ *C)* $\langle 0\,;\,2\rangle$ *D)* $\langle 2\,;\,\infty\rangle$ *E)* $\langle -\infty\,;\,2\rangle$

Resolución.-

Multiplicando a ambos miembros de la inecuación por 12 (M.C.M. de los denominadores) se tendrá : $4(5x-2)-3(7x-2) > 3(2-x)-2x$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, tendremos : $20x-8-21x+6 > 6-3x-2x$

Simplificando y transponiendo términos, obtenemos : $4x > 8$

Dividiendo por 4 a ambos miembros, concluímos que : $x > 2$

Escribiendo en notación de intervalo, tendremos que : $\boxed{x \in \langle 2\,;\,\infty\rangle}$

RPTA. D

11.- Si : $a < b$***, resolver :*** $\dfrac{ax+b}{2} + b < \dfrac{bx+a}{2} + a$

A) $\langle -\infty\,;\,3\rangle$ *B)* $\langle 3\,;\,\infty\rangle$ *C)* $[3\,;\,\infty\rangle$ *D)* $\langle -\infty\,;\,-3\rangle$ *E)* $\langle -3\,;\,-3\rangle$

Resolución.-

Multiplicando ambos miembros de la inecuación por 2, se obtiene : $ax+b+2b < bx+a+2a$

Reduciendo términos semejantes, nos queda : $ax+3b < bx+3a$

Transponiendo términos y factorizando, obtenemos : $(a-b)x < 3(a-b)$ .... (I)

Puesto que : $a < b$, podemos deducir que : $a-b < 0$ ¡Negativo!

De acuerdo con la Propiedad V del item 21.C, al dividir (I) por $(a-b)$, se consigue : $x > \dfrac{3(a-b)}{a-b}$

Simplificando, nos queda : $x > 3$

Expresando este resultado en notación de intervalo : $\boxed{x \in \langle 3\,;\,\infty\rangle}$ **RPTA. B**

21.4) SISTEMA DE INECUACIONES DE 1ER GRADO

Recibe este nombre un conjunto de inecuaciones de primer grado, las cuales se verifican para los mismos valores numéricos de sus incógnitas. Veamos algunos ejemplos :

1) $\left.\begin{array}{l} ax+b>0 \text{ .... (I)} \\ cx+d<0 \text{ .... (II)} \end{array}\right\}$ Es un sistema de dos inecuaciones con una sola incógnita.

2) $\left.\begin{array}{r} ax+by+c>0 \text{ .... (I)} \\ dx+cy<0 \text{ .... (II)} \\ fx>0 \text{ .... (III)} \end{array}\right\}$ Es un sistema de tres inecuaciones con dos incógnitas

RESOLUCION DE UN SISTEMA DE INECUACIONES DE 1ER GRADO.

I) **Con una sola incógnita.-** En estos casos se resuelve por separado cada inecuación componente del sistema, siendo la solución del mismo la intersección de todos los intervalos que representan a las soluciones halladas.

II) **Con dos o más incógnitas.-** En estos casos se recomienda transformar convenientemente al sistema con la finalidad de obtener la solución de alguna de las incógnitas, la cual al ser reemplazada en cualquier otra inecuación permitirá encontrar las soluciones de las demás.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

13.- Resolver el sistema de inecuaciones : $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4x-1}{3}+4<\dfrac{7x-1}{2}+2 \text{ .... (I)} \\ (x+1)(x+3)>(x+1)^2+5 \text{ .... (II)} \end{array}\right.$

A) $\langle 3;\infty\rangle$ *B)* $\left\langle \frac{2}{3};\infty\right\rangle$ *C)* $\left\langle -\frac{3}{2};\infty\right\rangle$ *D)* $\left\langle 0;\frac{3}{2}\right\rangle$ *E)* $\left\langle \frac{3}{2};\infty\right\rangle$

<u>Resolución</u>.-

Según lo expuesto en el item 21.4, hallaremos la solución de cada inecuación del sistema. Veamos :

En (I) multiplicamos ambos miembros por 6 : $2(4x-1)+24<3(7x-1)+12$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $8x-2+24<21x-3+12$

Reduciendo y transponiendo términos, obtenemos : $-13x<-13$

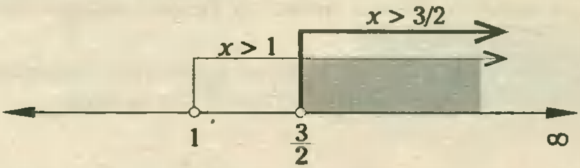
Dividiendo por -13, nos queda : $x>1$ ....(α)

En (II) efectuando operaciones indicadas : $x^2+4x+3>x^2+2x+1+5$

Reduciendo y transponiendo términos, obtenemos : $2x>3$

Y dividiendo por 2 a cada miembro, concluímos que : $x > \frac{3}{2}$ ....(θ)

Finalmente efectuamos la intersección de (α) y (θ), para lo cual nos auxiliaremos del siguiente gráfico.



La solución del sistema viene dado por la zona sombreada que representa la intersección de los intervalos dados, lo cual nos permite asegurar que todos los valores de x que satisfacen el sistema deben encontrarse en el siguiente intervalo : $x \in \left\langle \frac{3}{2} ; \infty \right\rangle$ **RPTA. E**

14.- Resolver el sistema de inecuaciones en el campo de los números enteros para luego indicar el valor de : xy - x :

$$\begin{cases} 5x - 3y > 2 \text{.......................(I)} \\ 2x + y < 11 \text{.....................(II)} \\ y > 3 \text{.....................(III)} \end{cases}$$

A) 12 ***B) 9*** ***C) 8*** ***D) 7*** ***E)5***

Resolución.-

Siguiendo las recomendaciones expuestas en el item 21.4, procederemos a resolver el sistema por el Método de Reducción expuesto para ecuaciones la cual resulta ser válida para inecuaciones. Veamos :

Multiplicando por 2 a la inecuación (I) : $10x - 6y > 4$

Multiplicando por 5 a la inecuación (II) : $10x + 5y < 55$

Ahora restando (I) - (II) miembro a miembro, obtenemos : $-11y > -51$

Y dividiendo por -11, concluímos que : $y < 4{,}8$ .... (IV)

Haciendo una inspección para y en las inecuaciones (III) $\wedge$ (IV), deducimos que : $3 < y < 4{,}8$ ....(*)

Puesto que debemos resolver en el campo de los enteros, de (*) concluímos que : $y = 4$

Reemplazando este valor en (I), conseguimos : $5x - 3(4) > 2$

Despejando x, deducimos que : $x > 2{,}8$ .... (V)

Reemplazando el valor encontrado para y en (II), obtenemos : $2x + 4 < 11$

De donde al despejar x encontramos que : $x < 3{,}5$ .... (VI)

Luego de (V) y (VI) podemos deducir que : $2{,}8 < x < 3{,}5$

Y puesto que x debe ser un entero, concluímos que : $x = 3$

Finalmente el valor pedido será : $\boxed{xy - x = 9}$ **RPTA. B**

15.- Resolver el sistema : $\begin{cases} (x+1)(x+2) \leq (x+3)(x+4) \text{ .... (I)} \\ (x+2)(x+3) < (x+1)(x+2) \text{ .... (II)} \end{cases}$

A) $\left[-\frac{5}{2} ; -2\right\rangle$ *B)* $\left\langle-\frac{5}{2} ; -2\right]$ *C)* $\left\langle-\frac{5}{2} ; -2\right\rangle$ *D)* $\left[-\frac{5}{2} ; -2\right]$ *E) N.A*

Resolución.-

Haciendo una inspección de las inecuaciones, podemos reconocer que se trata de un sistema con una sola incógnita. Nuestra estrategia consistirá en resolver cada inecuación por separado y luego intersectar las soluciones obtenidas. Veamos :

En (I) efectuamos las operaciones indicadas : $x^2 + 3x + 2 \leq x^2 + 7x + 12$

Reduciendo y transponiendo términos, se consigue : $-4x \leq 10$

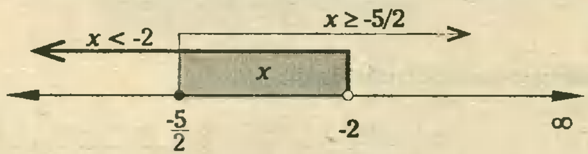
Dividiendo por -4, se obtiene : $x \geq -\frac{5}{2}$ .... (α)

En (II) efectuamos las operaciones indicadas : $x^2 + 5x + 6 < x^2 + 3x + 2$

Reduciendo y transponiendo términos, se consigue : $2x < -4$

Dividiendo por 2, se obtiene : $x < -2$ .... (β)

Finalmente en base a lo obtenido en (α) $\wedge$ (β), elaboramos el siguiente gráfico :



Dado que el conjunto solución viene dado por la zona sombreada, diremos que : $\boxed{x \in \left[-\frac{5}{2} ; -2\right\rangle}$ **RPTA. A**

16.- Luego de resolver en Z el siguientre sistema, indicar el valor de "z"

$\begin{cases} x+y+z > 8 \text{ ....(I)} \\ x-y+z < 4 \text{ .... (II)} \\ z-y > 0 \text{ .... (III)} \\ z < 5 \text{ .... (IV)} \end{cases}$

A) 4 *B) 5* *C) 3*

D) 2 *E) 7*

Resolución.-

Efectuando la operación (I) - (II), se consigue : $2y > 4$

Dividiendo por 2, obtenemos : $y > 2$ .... (V)

Efectuando la operación (IV) - (III), se consigue : $y < 5$ .... (VI)

De (V) $\wedge$ (VI) podemos deducir que : $2 < y < 5$

De donde concluímos que los únicos valores enteros para y son : $y = 3 \vee 4$

a) Si : $y = 3$, sustituimos en (III), obteniéndose : $z - 3 > 0$

Al despejar encontramos que : $z > 3$ .... (VII)

Luego de (IV) y (VII) tendremos que : $3 < z < 5$

De aquí el único valor entero para z será : $z = 4$

Reemplazando los valores obtenidos para $y \wedge z$, en (I) se obtiene : $x > 1$ .... (VIII)

Reemplazando los valores obtenidos para $y \wedge z$, en (II) se obtiene : $x < 3$ .... (IX)

Luego de (VIII) $\wedge$ (IX) diremos que : $1 < x < 3$

De este modo el único valor entero para x, será : $x = 2$

b) Si : $y = 4$, sustituimos en (III), obteniéndose : $z - 4 > 0$

Al despejar encontramos que : $z > 4$ .... (X)

De (IV) $\wedge$ (X) : $z < 5 \wedge z > 4$, diremos que : ¡ No existe un valor entero de z, que satisfaga ambas inecuaciones!

De acuerdo con esta deducción podemos concluir que el sistema no tiene solución en el campo de los números enteros.

Finalmente diremos que la única solución del sistema en números enteros son los que obtuvimos en el paso (a), por lo tanto :

$$x = 2 \;;\; y = 3 \wedge z = 4$$

RPTA. A

17.- Indicar el intervalo solución del sistema :

$$\begin{cases} 2\frac{1}{3} + \frac{2x+1}{6} > \frac{x+1}{9} - \frac{2}{3} \quad \text{......................... (I)} \\ 2\frac{1}{2} + 2 > \frac{x}{4} + \frac{x+1}{8} \quad \text{......................... (II)} \\ 5 + \frac{2x+1}{7} > \frac{x+1}{14} - 1 \quad \text{......................... (III)} \end{cases}$$

A) $\left\langle -\frac{81}{3} \;;\; \frac{43}{3} \right\rangle$ *B)* $\left\langle -\frac{55}{4} \;;\; \frac{43}{3} \right\rangle$ *C)* $\left\langle -\frac{81}{3} \;;\; \frac{55}{4} \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{55}{4} \;;\; -\frac{81}{3} \right\rangle$ *E)* $\left\langle -\frac{55}{4} \;;\; \frac{35}{3} \right\rangle$

Resolución.-

Haciendo una inspección de las inecuaciones dadas comprobamos que se trata de un sistema con una sola incógnita. Dada la presencia de números mixtos, procederemos a convertir dichos números en fracciones simples. Veamos :

$$\begin{cases} \dfrac{7}{3}+\dfrac{2x+1}{6} > \dfrac{x+1}{9}-\dfrac{2}{3} & \text{..............................} \ (I) \\ \dfrac{5}{2}+2 > \dfrac{x}{4}+\dfrac{x+1}{8} & \text{..............................} \ (II) \\ 5+\dfrac{2x+1}{7} > \dfrac{x+1}{14}-1 & \text{..............................} \ (III) \end{cases}$$

En (I) : Multiplicamos a ambos miembros por 18 : $6.7 + 3(2x + 1) > 2(x + 1) - 6.2$

Efectuando, reduciendo y transponiendo términos, nos queda : $x > -\dfrac{55}{4}$ .... (α)

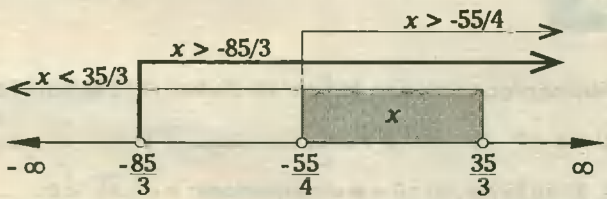
En (II) : Multiplicamos a ambos miembros por 8 : $4.5 + 8.2 > 2x + x + 1$

Efectuando, reduciendo y transponiendo términos, nos queda : $x < \dfrac{35}{3}$ .... (β)

En (III) : Multiplicamos a ambos miembros por 14 : $14.5 + 2(2x + 1) > x + 1 - 14$

Efectuando, reduciendo y transponiendo términos, nos queda : $x > -\dfrac{85}{3}$ .... (θ)

Finalmente graficaremos los intervalos obtenidos en : (α) ; (β) $\wedge$ (θ)



La solución del sistema viene dada por la intersección de estos intervalos lo cual se indica por medio de la zona sombreada : $x \in \left\langle -\dfrac{55}{4} ; \dfrac{35}{3} \right\rangle$ **RPTA. E**

18.- El cuadrado de la edad de Luis menos 3 es mayor que 165. En cambio el doble de su edad más 3 da un número menor que 30. ¿Cuántos años tiene Luis?

A) 20 ***B) 13*** ***C) 21*** ***D) 12*** ***E) 10***

Resolución.-

Sea x la edad de Luis, donde x es entero y positivo. Luego de acuerdo al enunciado podemos plantear : $x^2 - 3 > 165$ .... (I)

Asimismo se sabe que : $2x + 3 < 30$ .... (II)

De (I) deducimos que : $x^2 > 168$

Siendo x positivo, extraemos raíz cuadrada a cada miembro : $x > 12{,}96$ .... (III)

Asimismo de (II), se puede deducir que : $x < 13{,}5$ .... (IV)

Finalmente de (III) $\wedge$ (IV) podemos deducir que la edad de Luis es : $x = 13$ **RPTA. B**

19.- Se desea saber el mayor número de alumnos que hay en un aula. Si el doble del número se disminuye en 7, el resultado es mayor que 29 y si al triple se le disminuye en 5, el resultado es menor que el doble del número aumentado en 16.

A) 20 B) 21 C) 22 D) 18 E) 17

Resolución.-

Sea "x" el número de alumnos que buscamos, entonces de acuerdo al enunciado podemos plantear que : $2x - 7 > 29$ .... (I)

Asimismo se sabe que : $3x - 5 < 2x + 16$ .... (II)

Resolviendo la inecuación (I), deducimos que : $x > 18$ .... (III)

Ahora resolviendo la inecuación (II), encontramos que : $x < 21$ .... (IV)

De (III) y (IV), establecemos que : $18 < x < 21$

Como "x" es el mayor número de alumnos posibles según las condiciones dadas, de (*) concluímos que : $x = 20$ **RPTA. A**

MISCELANEA

20.- Dadas las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según correponda.

I) $a \in \mathbb{R}$; $0 < a < 1 \Rightarrow a^{-1} > 1$ .... ( )

II) $\forall$ $\{a ; b\} \subset \mathbb{R}$ *se tiene : si :* $0 < a < b$ *entonces:* $a < \sqrt{ab} < b$ .... ( )

III) Si : $a < b < 0$ *entonces* $a^2 < b^2$; $\{a ; b\} \subset \mathbb{R}$ .... ( )

A) VVF B) VVV C) VFV D)VFF E) FVF

Resolución.-

I) Verdadero. Por dato se sabe que : $0 < a < 1$

Siendo $a > 0$, multiplicamos por a^{-1} : $a^{-1} . 0 < a^{-1} . a < a^{-1} . 1$

Efectuando nos queda : $0 < 1 < a^{-1}$

De donde es correcto afirmar que : $a^{-1} > 1$

II) Verdadero. Por dato se sabe que : $0 < a < b$

Siendo $b > 0$, multiplicamos por b : $b.0 < b.a < b.b$

Efectuando tendremos : $0 < ab < b^2$

Por ser todos los términos positivos, podemos extraer raíz cuadrada : $\sqrt{0} < \sqrt{ab} < \sqrt{b^2}$

Efectuando nos quedará : $0 < \sqrt{ab} < b$

III) Falso. Del dato se sabe que : $a < b < 0$

Puesto que $a \wedge b$ son números negativos, de acuerdo con la Propiedad (IX) vista en el item 21.1C se deberá cumplir que : $a^2 > b^2$

Finalmente la combinación correcta es : **VVF** **RPTA. A**

21.- Si : a , b ∧ c son tres números reales positivos, demostrar que : $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

Demostración:-

Para demostrar la desigualdad dada será necesario recurrir a la Equivalencia de Gaüss vista en el Cap. 4. :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right) \quad \text{.................. (I)}$$

Según los datos : a ; $b \wedge c$ son positivos, lo cual nos permite utilizar la desigualdad expuesta en el Prob. 5. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ .... (II)

Transponiendo términos, tendremos : $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0$ .... (III)

Resulta evidente que $(a + b + c)$ es positivo, luego al multiplicar (III) por ésta expresión, tendremos :

$$(a + b + c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right) \geq (a + b + c) . 0$$

Efectuando nos queda : $(a + b + c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right) \geq 0$ ...... (IV)

A continuación sustituimos (I) en (IV) : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$

Finalmente concluímos que : $\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc}$ ***l.q.q.d***

22.- Resolver : $\dfrac{a^2(x-1)}{2} + b^2 \geq \dfrac{b^2(x-3)}{2} + 2a^2$, siendo : $0 < a < b$

A) $\langle -\infty \,;\, 5]$ ***B)*** $\langle -\infty \,;\, 5\rangle$ ***C)*** $[5 \,;\, \infty\rangle$ ***D)*** $\langle 5 \,;\, \infty\rangle$ ***E)*** $\langle -\infty \,;\, -5\rangle$

Resolución.-

Multiplicando a ambos miembros de la inecuación por 2 se tendrá : $a^2(x - 1) + 2b^2 \geq b^2(x - 3) + 4a^2$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, tendremos : $a^2x - a^2 + 2b^2 \geq b^2x - 3b^2 + 4a^2$

Transponiendo y factorizando términos, obtenemos : $\left(a^2 - b^2\right)x \geq 5\left(a^2 - b^2\right)$ ..... (*)

Apartir de la condición para a y b , elevamos al cuadrado : $0 < \underbrace{a^2 < b^2}$

Y transponiendo términos encontramos que : $a^2 - b^2 < 0$ ¡Negativo!

Entonces dividiendo (*) por $(a^2 - b^2)$, se tiene : $x \leq \dfrac{5(a^2-b^2)}{a^2-b^2}$

Simplificando, concluímos que : $x \leq 5$

Pasando a notación de intervalo diremos que : $x \in \langle -\infty ; 5]$ **RPTA. A**

23.- Hallar el valor entero de "x" que satisface el siguiente sistema

x > -2 .... (I)

x < 11 .... (II)

x > 5 .... (III)

x > 9 .... (IV)

x < 15 .... (V)

A) 7 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 11***

Resolución.-

Agrupando las inecuaciones del mismo sentido en forma separada, tendremos :

De (I) ; (III) ∧ (IV): $\begin{cases} x > -2 \\ x > 5 \\ x > 9 \end{cases}$ De (II) ∧ (V) : $\begin{cases} x < 11 \\ x < 15 \end{cases}$

Intersectando $x > 9$ Intersectando $x < 11$

Estos resultados nos permiten afirmar que la solución del sistema viene dado por : $9 < x < 11$

En esta inecuación el único "x" entero que lo satisface es : $x = 10$ **RPTA. D**

24.- ¿Cuántos valores enteros de "x" satisfacen : 2x - 5 < x + 3 < 3x - 7 ?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) Ninguna***

Resolución.-

De acuerdo con la observación 3 vista en el item 21.1B, la inecuación dada es equivalente al siguiente sistema. $x + 3 > 2x - 5 \quad \wedge \quad x + 3 < 3x - 7$

Por transposición de términos, tendremos : $-x > -8 \quad \wedge \quad -2x < -10$

Esto significa que : $x < 8 \quad \wedge \quad x > 5$

Estas últimas desigualdades nos permiten afirmar que : $5 < x < 8$

Finalmente los valores enteros de "x" son : $6 \wedge 7$ **RPTA. B**

25.- ¿Para qué valor de "m" el sistema : $\begin{cases} 2x+7y=m \ ...(I) \\ 3x+5y=13 \ ...(II) \end{cases}$ ***, tiene soluciones positivas?***

A) $\left[\frac{26}{3}\ ;\ \frac{91}{5}\right\rangle$ ***B)*** $\left\langle\frac{26}{3}\ ;\ \frac{91}{5}\right]$ ***C)*** $\left[\frac{26}{3}\ ;\ \frac{91}{5}\right]$ ***D)*** $\left\langle\frac{26}{3}\ ;\ \frac{91}{5}\right\rangle$ ***E)*** $\langle 9\ ;\ 11\rangle$

UNI 94-I

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en resolver el sistema dado en función de m, para luego establecer un nuevo sistema con una sola variable. Veamos :

Según condición del problema se debe verificar que : $x > 0 \ \wedge \ y > 0$ .... (*)

De acuerdo con la regla de Cramer vista en el Cap. 18, tendremos que :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{5m-91}{-11} \Rightarrow x = -\frac{5m-91}{11} \quad ......(III)$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{26-3m}{-11} \Rightarrow y = -\frac{26-3m}{11} \quad ......(IV)$$

Reemplazando (III) en (*) : $-\frac{5m-91}{11} > 0$

Despejando encontramos que : $m < \frac{91}{5}$ .... (α)

Reemplazando (IV) en (*) : $-\frac{26-3m}{11} > 0$

Despejando encontramos que : $m > \frac{26}{3}$ .... (θ)

Finalmente de (α) y (θ) se concluye que : $\frac{26}{3} < m < \frac{91}{5}$

Y pasando a notación de intervalo diremos que : $m \in \left\langle\frac{26}{3}\ ;\ \frac{91}{5}\right\rangle$ **RPTA. D**

26.- Si el par $(x_0\ ;\ y_0)$ ***es solución entera positiva de :*** $\begin{cases} 2x-5y > x+4 \ .... (I) \\ 3x+13 > 2y+4x \ .... (II) \end{cases}$

¿ Qué valor asume : $x_0 - y_0$ ***?***

A) 11 ***B) -11*** ***C) 9*** ***D) -9*** ***E) 8***

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en resolver el sistema por el método de la reducción, vista en Sistemas de Ecuaciones. Observa :

De (I) despejamos "x" en función de "y" : $x > 5y + 4$ .... (1)

De (II) despejamos "x" en función de "y": $-x > 2y - 13$ .... (2)

Sumando miembro a miembro, tendremos : $0 > 7y - 9$

Despejando y obtenemos que : $y < 1{,}28$

Puesto que y es positivo concluímos que : $0 < y < 1{,}28$

Así el único valor entero para y resulta ser : $\mathbf{y = 1}$ .... (3)

Ahora de (1) y (2) , se deduce que : $5y + 4 < x < 13 - 2y$ .... (4)

Reemplazando (3) en (4), se obtiene : $9 < x < 11$

Como "x" es un número entero positivo, se tendrá : $\mathbf{x = 10}$

En consecuencia la solución entera positiva del sistema es : $(x_0\, ;\, y_0) = (10\, ;\, 1)$

Finalmente el valor pedido será : $\boxed{x_0 - y_0 = 9}$ **RPTA. C**

27.- ¿Para qué valores de "x" se verifica la inecuación : $1 < \dfrac{3x+10}{x+7} < 2$?

A) -1/2 < x < 7 *B) -1 < x < 5* *C) -3/2 < x < 4*

D) 0 < x < 4 *E) 1 < x < 5* ***UNI 95-II***

<u>Resolución</u>.-

Nuestra estrategia consistirá en aplicar en sentido inverso el desarrollo expuesto en los primeros problemas de este capítulo, es decir, trataremos de transformar la expresión dada hasta lograr aislar a la variable x, de modo que quede encerrada en un intervalo numérico. Veamos :

Transformando el numerador de la expresión dada : $1 < \dfrac{3(\cancel{x+7})-11}{\cancel{x+7}} < 2$

Efectuando la división indicada, tendremos : $1 < \dfrac{3(x+7)}{x+7} - \dfrac{11}{x+7} < 2$

Luego de simplificar nos queda : $1 < 3 - \dfrac{11}{x+7} < 2$

Restando 3 a todos los miembros, se obtiene : $-2 < -\dfrac{11}{x+7} < -1$

Aplicando la Propiedad VI, expuesta en el item 21.1C, tomamos la inversa de toda la inecuación, obteniéndose : $-1 < -\dfrac{x+7}{11} < -\dfrac{1}{2}$

Multiplicando por -11 y reacomodando, se obtiene : $\dfrac{11}{2} < x + 7 < 11$

A continuación restamos 7 a cada miembro : $\dfrac{11}{2} - 7 < x < 11 - 7$

Finalmente se concluye que : $\boxed{-\dfrac{3}{2} < x < 4}$ **RPTA. C**

28.- Un muchacho empezó comiendo un cierto número de naranjas; después compró 5 más que también se las comió, resultando que había comido más de 10 naranjas. Compró 8 naranjas más y al comerselas observó que había comido en total más del triple de naranjas que comió la primera vez. ¿Cuántas naranjas comió en total el muchacho.

A) 6 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 19*** ***E) 21***

Resolución.-

Sea "x" el número de naranjas que comió por primera vez, luego del enunciado se plantea :

Luego de comerse las 5 primeras naranjas, se tiene : $x + 5 > 10$ .... (I)

De donde al despejar x , deducimos que : $x > 5$ .... (α)

Luego de comer 8 naranjas más, se tiene : $x + 5 + 8 > 3x$ .... (II)

Al despejar x encontramos que : $x < 6{,}5$ .... (β)

Luego de (α) $\wedge$ (β) se concluye que : $5 < x < 6{,}5$

Por ser x un entero, de esta relación se deduce que : $x = 6$

En consecuencia el muchacho comió un total de : $x + 13 =$ **19 naranjas** **RPTA. D**

29.- Halle el menor número real M tal que se cumpla : $6 + 6x - x^2 \leq M$; $\forall$ $x \in \mathbb{R}$

A) 12 ***B) 15*** ***C) 19*** ***D) 21*** ***E) 17***

Resolución.-

Para resolver este problema debemos tener en cuenta a la propiedad (I) vista en el item 21.1C. Además debemos reconocer que la expresión del primer miembro de la desigualdad dada puede transformarse en un T.C.P. Veamos :

Agrupando se tiene : $6 + 6x - x^2 = -x^2 + 2(x)(3) + 6$

Sumando y restando $(3)^2$: $= -(x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 - (3)^2 + 6$

Efectuando y factorizando el signo (-) : $= 15 - \left[(x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2\right]$

Sustituyendo el corchete por un T.C.P. : $= 15 - (x-3)^2$ .... (I)

Luego, de la Propiedad (I), se puede afirmar que : $(x-3)^2 \geq 0 \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}$

Multiplicando por (-1) se obtiene : $-(x-3)^2 \leq 0$

Sumando a ambos miembros 15 tenemos : $15 - (x-3)^2 \leq 15$ .... (II)

Sustituyendo (I) en (II) : $6 + 6x - x^2 \leq 15$; $\forall \; x \in \mathbb{R}$

Finalmente por comparación podemos afirmar que : **M = 15** **RPTA. B**

30.- Se tiene un número de dos cifras, el doble de las cifras de las decenas restado de las cifras de las unidades es mayor que 5 y la diferencia entre 14 veces la cifra de las unidades y la cifra de las decenas es menor que 112. ¿Cuál es el número?

A) 12 B) 15 C) 17 D) 18 E) 24

Resolución.-

Sea $\overline{xy}$ el número buscado, donde puede reconocerse que $x \wedge y$ representan a las cifras de las decenas y unidades respectivamente. Ahora planteamos las desigualdades establecidas en el problema, veamos :

De acuerdo al enunciado se debe cumplir que : $y - 2x > 5$ .... (I)

Asimismo la condición establece que : $14y - x < 112$ .... (II)

Efectuando 14 (I) - (II), se obtiene : $-27x > -42$

Y dividiendo por -27, encontramos que : $x < 1{,}55$ .... (III)

Debemos recordar que en todo numeral $\overline{xy}$ cumple que : $1 \leq x < 9 \wedge 0 < y < 9$ ... (IV)

Luego de (III) $\wedge$ (IV), se tiene : $x = 1$ .... (*)

Sustituyendo (*) en (I) y despejando «y», se consigue : $y > 7$ .... (V)

Sustituyendo (*) en (II), se consigue : $14y - 1 < 112$

Y al despejar se concluye que : $y < 8{,}07$ .... (VI)

Luego de (V) $\wedge$ (VI), se deduce que : $y = 8$

Finalmente el número buscado es : $\overline{xy} = 18$ **RPTA. D**

31.- Si $x \in \mathbb{R}^+$ halle el menor valor que puede asumir la expresión : $x + \frac{3}{x}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 3 E) $3\sqrt{3}$

Resolución.-

Como $x \in \mathbb{R}^+$ podemos plantear que : $\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2 \geq 0$

Desarrollando el primer miembro, se tendrá : $x - 2(\sqrt{x})\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right) + \frac{3}{x} \geq 0$

Efectuando y transponiendo, obtenemos : $x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{3}$

Finalmente se concluye que el mínimo valor buscado es : $2\sqrt{3}$ **RPTA. C**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Siendo: $x > 0$; $y > 0$; $x > y$; $z \neq 0$ la desigualdad que no siempre es verdadera es :

A) $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$ D) $xz^2 > yz^2$

B) $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$ E) $x - z > y - z$

C) $x + z > y + z$

2.- Si : $0 < x < 2$, entonces se cumple que :

$$\alpha < x^2 - 1 < \theta \text{ , donde :}$$

A) $\alpha = -1 \wedge \theta = 3$ D) $\alpha = 4 \wedge \theta = 8$

B) $\alpha = -5 \wedge \theta = -2$ E) $\alpha = -4 \wedge \theta = -3$

C) $\alpha = 3 \wedge \theta = 5$

3.- Un carpintero hizo un cierto número de mesas, vende 49 y le quedan por vender más de la mitad; hace después 9 mesas y vende 20, quedándole menos de 41 mesas que vender. ¿Cuántas mesas ha hecho, sabiendo que inicialmente fabricó un número par de mesas?

A) 107 B) 102 C) 100 D) 109 E) 103

4.- Si: $a > 0$; $b > 0 \wedge c > 0$. ¿Cuál es el menor valor que puede asumir la expresión?

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(a+c)^2}{ac} - 6$$

A) 3 B) 0 C) 4 D) 9 E) 6

5.- Un padre dispone de 320 *soles* para ir a un evento deportivo con sus hijos. Si toma entradas de 50 *soles* le falta dinero y si las toma de 40 *soles* le sobra dinero. ¿Cuántos hijos tiene el padre?

A) 5 B) 4 C) 6 D) 3 E) 7

6.- A un estudiante le dieron a vender una cierta cantidad de pollitos de los que vendió 35 y le quedaron más de la mitad, luego le devuelven 3 y vende después 18 con lo que le restan menos de 22 pollitos. ¿Cuántos pollitos le dieron?

A) 69 B) 70 C) 71 D) 72 E) 73

7.- Si : $-1 < b < a < 0$, donde $a \wedge b$ son números reales; de las siguientes proposiciones :

I) $a^2 > b^2$ II) $a^2 > b^3$ III) $a^3 < b^3$

son correctas :

A) I ∧ II B) II ∧ III C) I ∧ III

D) Todas E) Solo II

8.- La suma de todos los enteros x que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)} \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)} \end{cases} ;$$

es :

A) -21 B) -36 C) -18 D) 18 E) 25

9.- Si $x = 1\,981\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,982)$

$y = 1\,982\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 1981)$;

se cumple :

A) $x < y - 1$ B) $x < y - 2$ C) $x < y - 3$

D) $x > y$ E) $x = y - 1/2$

10.- Hallar el menor número M con la propiedad de que $\forall x \in \mathbb{R}$, verifique :

$$1 + 6x - x^2 \leq M$$

A) 8 B 9 C) 10 D) 11 E) 12

11.- Si : $m^2 + n^2 = 1 \wedge p^2 + q^2 = 1$, donde p ; q ; $m \wedge n$ son números reales diferentes, entonces : $x = mp + nq$; verifica :

A) $x > 1$ B) $x = 1$ C) $x \leq 1$

D) $x < 1$ E) $x \geq 1$

NIVEL B

12.- ¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son falsas :

I) Si : $a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$

II) Si : $a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$

III) Si : $\frac{1}{a+r} \leq \frac{1}{b+r} \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

IV) Si : $a < 3 \Rightarrow a^2 < 9$

V) Si : $a^3 \leq b^3 \Rightarrow a \leq b$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13.- ¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas :

I) Si : $\sqrt{x^2} > 1 \Rightarrow x > 1$

II) Si : $\sqrt{-x} > 1 \Rightarrow x^2 > 1$

III) Si : $x < -1 \Rightarrow x^2 < 1$

IV) Si : $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$

V) Si : $x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14.- Sean a ; $b \wedge n$ enteros que verifican :

$$n - 1 < a + b < n + 1$$
$$n - 7 < a - b < n - 5$$
$$10 < a + n < 12$$

Luego el valor de : $\frac{a^2+b^2+n^2}{a^2+b^2-n^2}$. es :

A) -6/5 B) -35/7 C) -42/11

D) -25/13 E) -37/12

15.- Partiendo de la desigualdad :
$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, donde : $a \wedge b$ son reales no negativos; podemos demostrar que :

A) $a - b \geq 0$ D) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

B) $a + b \geq ab$ E) $a \leq b$

C) $a + b \leq 2\sqrt{ab}$

16.- Halle : $x - y$ donde $x \wedge y$ son enteros que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y > 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ 2x + 3y < 11 \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \\ y > 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$$

A) -1 B) 7 C) 1 D) 8 E) 0

17.- Si el producto de dos números positivos y diferentes es 1, la suma de ellos es :

A) Siempre menor que 10.

B) Siempre mayor que 2.

C) En algunos casos menor que 1.

D) En algún caso igual a 2.

E) Siempre menor que 2.

18.- Hallar el valor de : $\frac{x-y}{z}$ si x , $y \wedge z$ son enteros positivos que satisfacen el sistema :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z > 23 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ 2x - y + 5z < 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \\ y - z > 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (III) \\ y < 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (IV) \end{cases}$$

A) 2/5 B) 1 C) 1/2 D) 2 E) 0

19.- Halle el menor número racional «m» que para cualquier valor : $x \in [2 ; 4]$ satisface la siguiente desigualdad: $\frac{x+3}{x-5} \leq m$

A) -2/3 B) -7 C) -1/3 D) -6 E) -5/3

20.- Si : $-10 < a < -5$; $-2 < b < -1$; $2 < c < 5$ entonces $\frac{ab}{c}$ está comprendido entre:

A) -10 y -1 B) 2 y 20 C) -10 y 1

D) 2 y 10 E) 0 y 10

21.- Si : $(2^{-1} + 6x^{-1}) \in \langle 1 ; 8]$ ¿A qué intervalo pertenece la expresión : $\frac{25x^2-16}{4}$?

A) $[0; 896\rangle$ B) $\langle 0 ; 896]$ C) $\langle 8 ; 890]$

D) $\langle 0; 896\rangle$ E) $\langle 16 ; 896\rangle$

22.- En $\mathbb{R}$ se define la operación :

$$\frac{a * b}{2} = \frac{a-b}{4} \quad ;$$

según ello halle el conjunto solución de :

$$(x-1)*2 \leq (3*x)*\frac{1}{2} \leq (1+2x)*5$$

A) $\langle 2 ; 8]$ B) $[2 ; 3]$ C) $\langle 2/3 ; 8/3]$

D) $[2 ; 8/3]$ E) $[1 ; 8/5]$

23.- ¿Cuál es el menor número par que verifica:

$$\frac{12x-8}{3} + \frac{2x-3}{4} > \frac{6x-8}{3} + \frac{8x-4}{6} \ ?$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

24.- Si $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ es la solución natural del sistema :

$$\begin{cases} x-3y+<0 \text{..........................} (I) \\ x-y-4z>0 \text{..........................} (II) \\ y-z-2<0 \text{..........................} (III) \end{cases} ;$$

calcular el valor de: $x_0 - y_0 + z_0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25.- El encargado de la alimentación diaria de una familia de monos de cierto zoológico, reporta lo siguiente:

«Entre los padres comen más de 6 *kg*, la madre come más que el crío. Si el padre dejara de comer un *kg* menos cada día, seguiría consumiendo más que el crío» ¿Cuántos *kg* consume diariamente el crío?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

NIVEL C

26.- Dados los números reales $a \wedge b$ tales que: $a<b<0$, dar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones .

I) $a^k < b^k < 0$; k es par

II) $\frac{1}{a^k} < \frac{1}{b^k} < 0$; $k \in \mathbb{Z}^+$

III) $\frac{a^k}{b^k} > 0$; $k \in \mathbb{Z}^+$

A) FFF B) FVV C) VFF

D) VVF E) FFV

27.- Resolver : $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} > \frac{x}{5} + 83$

A) $\langle -60 ; \infty\rangle$ D) $\langle -60 ; 30\rangle$

B) $\langle 60 ; \infty\rangle$ E) $\langle -\infty ; 60\rangle$

C) $\langle -\infty ; -60\rangle$

28.- Resolver el sistema :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{4} - x \leq \frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} \\ 2-x > 2x-8 \end{cases}$$

A) $[-1 ; 10/3\rangle$ D) $[-1 ; 10/3]$

B) $[1 ; 10/3\rangle$ E) N.A

C) $\langle -1 ; 10/3\rangle$

29.- Tres individuos cuentan el número de piezas que por minuto fábrica una máquina, el primero contó la mitad menos 3, el segundo contó la sexta parte y 12 piezas y el tercero contó la cuarta parte y 10 piezas. Si el primero contó más piezas que el segundo pero menos que el tercero. ¿Qué número de ellas arroja la máquina?

A) 46 B) 48 C) 50 D) 52 E) 60

30.- Una persona dispone de cierta cantidad para premiar a sus sobrinos, pensó darles 500 *soles* a cada uno pero le faltaba más de 200 *soles* después pensó darles 450 *soles* a cada uno y le sobraban más de 300 *soles*, por último decide darles 400 *soles* a cada uno y le sobraron menos de 875 *soles*. ¿Cuántos sobrinos tiene esta persona?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

31.- ¿Cuántos valores enteros para «x» satisfacen?

$$2 < \frac{x-7}{x-5} < 12$$

A) 1 B) 6 C) 3 D) 5 E) 2

32.- Halle : "$x+y+z$", si son valores enteros que satisfacen el sistema :

$$\begin{cases} x-2y+z<1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I}) \\ x-y+z>1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}) \\ 4x+y-2z<1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{III}) \\ z<4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{IV}) \end{cases}$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 4

33.- Para qué valores de « n » el sistema :

$$\begin{cases} 3x+6y=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I}) \\ 5x+ny=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}) \end{cases}$$

Tiene soluciones que satisfacen : $x>0 \wedge y<0$

A) $\langle -\infty ; 6 \rangle$ B) $\langle 10 ; \infty \rangle$ C) $\langle -\infty ; 10 \rangle$

D) $\langle 6 ; \infty \rangle$ E) $\langle 6 ; 10 \rangle$

34.- Si : $1 \leq x \leq 4$

$$a \leq \frac{x+4}{x+3} \leq b \quad ;$$

calcular : $a+b$

A) 13/7 B) 19/28 C) 17/4

D) 67/28 E) $\dfrac{65}{68}$

35.- La suma de los valores enteros de "x" que satisfacen el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{13x-5}{2} + \dfrac{3x-8}{5} > \dfrac{2x+7}{3} + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I}) \\ \dfrac{3x-1}{5} - 1 < \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x}{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}) \end{cases}$$

A) 5 B) 9 C) 14 D) 20 E) 27

36.- Calcular «n» si : a ; b ; $x \wedge y$ son números positivos todos distintos tal que :

$$a^2+b^2=1 \ \wedge \ x^2+y^2=1 \ \wedge \ ax+by<n$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

37.- Si : $x+y+z=1$,

donde : $x>0$; $y>0 \wedge z>0$;

halle « n » de : $(1-x)(1-y)(1-z) \geq n$

A) $6xyz$ B) $8xyz$ C) $4xzy$

D) $3xyz$ E) xyz

38.- Siendo «a» $\wedge$ «b» números positivos y distintos. Halle el valor de «$m+n$» tal que se cumpla :

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{m}{a} + \frac{2n}{b}$$

A) 1 B) 1,5 C) 2,5 D) 3,5 E) 2

39.- Si : $x>0$ determinar el mínimo valor de :

$$\frac{(x+3)(x+2)}{\sqrt{x^2+5x+2}}$$

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) 8

40.- Si a un número de tres cifras múltiplo de once se le resta 396 se obtiene otro número mayor que el mismo número invertido, se pide el valor de la cifra de las decenas sabiendo que la suma de sus cifras extremas es superior a doce.

A) 7 B) 4 C) 2 D) 6 E) 5

22 Inecuaciones de 2do Grado y de Grado Superior

22.1) INECUACION DE 2DO GRADO

Es aquella que admite ser reducida a cualquiera de las siguientes formas :

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad ; \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$
$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ; \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

Donde : $x =$ incógnita $\wedge \{a ; b ; c\} \subset \mathbb{R} / a \neq 0$

PROPIEDADES

1ra) $\forall\, x \in \mathbb{R} \; ; \; ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

El trinomio : $ax^2 + bx + c$ es siempre positivo para cualquier valor de su incógnita.

2da) $\forall\, x \in \mathbb{R} \; ; \; ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow a < 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

El trinomio : $ax^2 + bx + c$, es siempre negativo para cualquier valor de su incógnita.

22.2) INECUACION DE GRADO SUPERIOR

Es aquella que al ser reducida adopta cualquiera de las siguientes formas :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_n > 0$$
$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_n \geq 0$$
$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_n < 0$$
$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_n \leq 0$$

Donde : $x =$ incógnita $\wedge \; n \in \mathbb{N} \; / \; n \geq 3$, además :

$$\{a_0 ; a_1 ; a_2 ; \dots\dots ; a_n\} \subset \mathbb{R} / a_0 \neq 0$$

22.3) METODO DE LOS PUNTOS DE CORTE

Es un recurso que se emplea para encontrar en forma práctica y sencilla el intervalo solución de una inecuación ya sea de 2do grado o de grado superior. Para aplicar este método será necesario adecuar a la inecuación a una de las formas mencionadas en los items anteriores teniendo en cuenta que el primer coeficiente del primer miembro deberá ser positivo y que en el segundo miembro deberá figurar el cero.

A continuación se indican los pasos que se deben seguir para resolver una inecuación por este método :

1er Paso.- Se lleva todo término de la inecuación al 1er miembro.

2do Paso.- Se factoriza totalmente la expresión obtenida en el 1er miembro.

3er Paso.- Se calculan los puntos de corte, los cuales son los valores que asume la incogónita al igualar a cero cada factor obtenido en el paso anterior .

4to Paso.- Se llevan los puntos de corte en forma ordenada a la recta numérica.

5to Paso.- Cada zona determinada por dos puntos de corte consecutivos , se señalan alternadamente de derecha a izquierda con signos (+) $\wedge$ (-) .Se iniciará con el signo (+).

6to Paso.- Si la inecuación admite como signo de relación a : $>$,o , $\geq$; el intervalo solución estará representado por las zonas (+). Si la inecuación admite como signo de relación a : $<$, o , $\leq$; el intervalo solución estará representado por las zonas (-).

Ejemplo 1.- *Resolver la siguiente inecuación :* $x^2 + 2x + 3 > 3x + 15$

Resolución.-

Aplicaremos el método de los puntos de corte siguiendo los pasos mencionados anteriormente :

1er Paso : $x^2 + 2x + 3 - 3x - 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 12 > 0$

2do Paso : Factorizando al trinomio : $x^2 - x - 12$, según el criterio del aspa simple se consigue :

$$x^2 - x - 12 \equiv (x - 4)(x + 3) > 0$$

3er Paso : Los puntos de corte, se encuentran así : $x - 4 = 0 \quad \wedge \quad x + 3 = 0$

de donde se consiguen los siguientes valores : $x = 4 \quad \wedge \quad x = -3$

Luego los puntos son : $\{4 ; -3\}$

4to Paso : Llevando los puntos de corte a la recta numérica.

5to Paso : Señalamos las zonas determinadas por los puntos sobre la recta.

6to Paso : Ahora señalamos el intervalo solución :

Finalmente : $x \in \langle -\infty ; -3 \rangle \vee \langle 4 ; -\infty \rangle$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Luego de resolver : $-x^2 - 2x + 35 > 0$ ***, se puede afirmar que :***

A) $1 < x < 3$ ***B)*** $-2 < x < 3$ ***C)*** $-5 < x < 5$ ***D)*** $-7 < x < 5$ ***E)*** $-5 < x < 7$

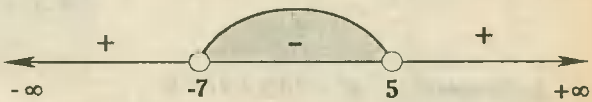
Resolución.-

Como el primer coeficiente del primer miembro es negativo, multiplicamos ambos miembros de la inecuación por - 1, asi tendremos : $x^2 + 2x - 35 < 0$

Factorizando el trinomio del primer miembro se obtiene : $(x - 5)(x + 7) < 0$

Igualando a cero cada factor , obtendremos los puntos de corte : $x = 5$; $x = -7$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que la zona negativa nos dará la solución , debido a que la inecuación transformada es de signo de relación : < .



Finalmente concluímos que : $x \in \langle -7 ; 5 \rangle$ **RPTA. D**

2.- Resolver : $x^2 + 4x + 2 \geq 0$ ***, indicando luego como respuesta un intervalo.***

A) $\langle -\infty ; -2 + \sqrt{2}]$ ***B)*** $[-2 - \sqrt{2} ; \infty \rangle$ ***C)*** $[-2 + \sqrt{2} ; 2 - \sqrt{2}]$

D) $[-2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}]$ ***E)*** $[-2 + \sqrt{2} ; \infty \rangle$

Resolución.-

Observar que el trinomio mostrado en el primer miembro no es posible factorizar en $\mathbb{Z}$, razón por la cual se tendrá que resolver por la fórmula cuadrática. $x^2 + 4x + 2 = 0$ .... (*)

Aplicando la fórmula de Carnot en (*) : $x_1 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$

Efectuando las operaciones indicadas : $x_1 = -2 \pm \sqrt{2}$

De donde los puntos de corte serán : $x = -2 + \sqrt{2}$; $x = -2 - \sqrt{2}$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que las zonas positivas nos darán la solución , debido a que la inecuación es de signo de relación : ≥

Finalmente : $x \in \langle -\infty ; -2 - \sqrt{2}] \vee [-2 + \sqrt{2} ; \infty \rangle$ **RPTA. E**

3.- Resolver : $x^2 + 8x + 20 > 0$

A) $x \in \mathbb{R}$ B) $x \in \langle -\infty ; 2\rangle$ C) $x \in \langle -\infty ; 2+\sqrt{3}\rangle$

D) $x = \phi$ E) $x \in \langle \sqrt{2} ; \sqrt{2}+3\rangle$

Resolución.-

Nuestro problema se reduce a analizar el trinomio dado en el primer miembro. Veamos :

Agrupando convenientemente : $x^2 + 8x + 20 = \underbrace{x^2 + 2(x)(4) + (4)^2} + 4$

Sustituyendo lo señalado por un T.C.P. : $= (x+4)^2 + 4$

Según este resultado podemos afirmar que el trinomio estudiado es siempre positivo, en consecuencia : $x^2 + 8x + 20 > 0$; es una desigualdad absoluta que se verifica :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}$$ **RPTA. A**

4.- Resolver : $x^2 + 10x + 27 < 0$

A) $x \in \mathbb{R}$ B) $x = \phi$ C) $\langle -\infty ; \sqrt{5}\rangle$ D) $\langle \sqrt{5} ; -\infty\rangle$ E) $\langle \sqrt{5} ; \sqrt{5}+3\rangle$

Resolución.-

Resolveremos este ejercicio siguiendo el mismo procedimiento del problema anterior. Luego analizando el trinomio dado en el primer miembro , diremos :

Agrupando convenientemente, se tendrá : $x^2 + 10x + 27 = \underbrace{x^2 + 2(x)(5) + (5)^2} + 2$

Sustituyendo lo indicado por un T.C.P., nos queda : $= (x+5)^2 + 2$

Podemos observar el trinomio estudiado es siempre positivo es decir : $x^2 + 10x + 27 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ ..... (*)

Como en el problema se plantea : $x^2 + 10x + 27 < 0$

Comparando con (*) se puede concluir que : $x = \phi$ **RPTA. B**

5.-¿ Entre qué límites debe estar comprendido "n" para que la inecuación :

$$x^2 + 2nx + n > \frac{3}{16}$$ ***, se verifique para todo valor real de "x"***

A) $4 < n < 5$ B) $\frac{1}{4} < n < \frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4} < n < \frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4} < n < \frac{5}{4}$ E) $-\frac{1}{4} < n < \frac{3}{4}$

Resolución.-

Transponiendo todos los términos al primer miembro la inecuación dada quedará así : $x^2 + 2nx + \left(n - \frac{3}{16}\right) > 0$

Como esta inecuación se debe verificar para todo valor real de "x", aplicaremos la 1^{ra} Propiedad vista en el item 22.1A, según la cual se deberá cumplir que : $a > 0 \;\wedge\; b^2 - 4ac < 0$ ... (*)

La primera inecuación se logra verficar dado que : $a = 1$, y , $1 > 0$ siempre. Luego bastará hacer cumplir la segunda; para lo cual debemos reconocer que :

$$b^2 = (2n)^2 \;\wedge\; c = \left(n - \frac{3}{16}\right) \quad \Rightarrow \quad (2n)^2 - 4\,(1)\left(n - \frac{3}{16}\right) < 0 \quad .... (^{**})$$

Efectuando las operaciones indicadas, tendremos : $4n^2 - 4n + \frac{3}{4} < 0$

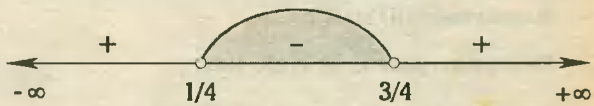
Multiplicando por 4 ambos miembro de la inecuación : $16n^2 - 16n + 3 < 0$

Factorizando el trinomio se consigue : $(4n - 1)\;(4n - 3) < 0$

De aqui los puntos de corte son : $n = 1/4 \;\wedge\; n = 3/4$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que la zona negativa nos dará la solución, debido a que la inecuación (**), es de signo de relación : <

De donde :



$n \in \langle 1/4 \;;\; 3/4 \rangle$ **RPTA. C**

6.- Resolver : (x - 3) (x + 5) (2x - 7) (x - 4) < 0

A) $\langle 3 ; 5 \rangle \cup \langle 7 ; \infty \rangle$ *B)* $\langle -3 ; 5 \rangle \cup \langle 6 ; 7 \rangle$ *C)* $\langle -5 ; 2 \rangle \cup \langle 7/2 ; 5 \rangle$

D) $\langle -5 ; 3 \rangle \cup \langle 7/2 ; 4 \rangle$ *E)* $\langle -\infty ; 1 \rangle$

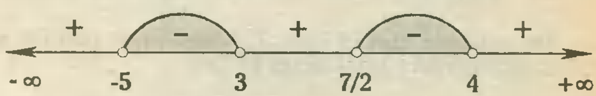
Resolución.-

De acuerdo a lo expuesto en el item 22.3, se puede observar que la inecuación dada presenta la forma indicada en el 2^{do} Paso ,por lo tanto bastará continuar con los siguientes pasos para culminar la resolución de dicha inecuación. Veamos :

$$(x - 3)\;(x + 5)\;(2x - 7)\;(x - 4) < 0$$

De aqui ,los puntos de corte son : $x = 3 \;;\; x = -5 \;;\; x = 7/2 \;;\; x = 4$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que las zonas negativas nos dará la solución, debido a que la inecuación (*), es de signo de relación : <



Finalmente se concluye que :

$x \in \langle -5 ; 3 \rangle \cup \langle 7/2 ; 4 \rangle$ **RPTA. D**

7.- Resolver : $x^3 + x^2 \geq 9x + 9$

A) $[-3\,;-1] \cup [3\,;\infty\rangle$ *B)* $\langle-\infty\,;3\rangle \cup \langle 4\,;\infty\rangle$ *C)* $\langle-\infty\,;-3\rangle$

D) $\mathbb{R}$ *E)* $[1\,;3] \cup \langle 5\,;\infty\rangle$

Resolución.-

Transponiendo todos los términos al 1er miembro de la inecuación, se tendrá : $x^3 + x^2 - 9x - 9 \geq 0$ .....(I)

Factorizando la expresión del 1er miembro : $x^3 + x^2 - 9x - 9 = x^2\,(x+1) - 9\,(x+1)$

Factorizando $(x + 1)$, tendremos : $= (x+1)\,(x^2 - 9)$

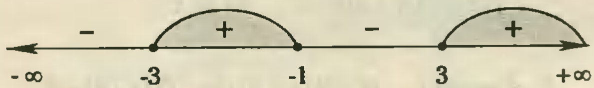
Reconociendo la diferencia de cuadrados : $= (x+1)\,\underbrace{(x^2 - 3^2)}$

Sustituímos lo indicado por la suma y la diferencia : $= (x+1)\,(x+3)\,(x-3)$ ... (II)

Sustituyendo (II) en (I) : $(x+1)\,(x+3)\,(x-3) \geq 0$

De aquí los puntos de corte son : $x = -1$; $x = -3$; $x = 3$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que las zonas positivas nos dará la solución, debido a que la inecuación (I), es de signo de relación : $\geq$



Finalmente : $x \in [-3\,;-1] \cup [3\,;\infty\rangle$ **RPTA. A**

8.- Resolver : $\dfrac{1997\,(x-2)^7\,(1-x)\,(3x-1)^8}{1998} \leq 0$

A) $\langle-\infty\,;1/3\rangle \cup \langle 2\,;\infty\rangle$ *B)* $\langle-\infty\,;1/3] \cup [2\,;\infty\rangle$ *C)* $\langle-\infty\,;1] \cup \langle 3\,;\infty\rangle$

D) $\langle-\infty\,;1] \cup [2\,;\infty\rangle$ *E)* $\mathbb{R}$

Resolución.-

Multiplicando a ambos miembros de la inecuación por $\dfrac{1\,998}{1\,997}$, se obtiene : $(x-2)^7\,(1-x)\,(3x-1)^8 \leq 0$

De acuerdo con el item 22.3 debemos extraer el signo menos (-) del factor $(1 - x)$: $-(x-2)^7\,(x-1)\,(3x-1)^8 \leq 0$

Multiplicando a ambos miembros de la inecuación por -1 , se consigue : $(x-2)^7\,(1-x)\,(3x-1)^8 \geq 0$ ... (I)

Al analizar el primer factor, tendremos : $(x-2)^7 = (x-2)\,\underbrace{(x-2)^6}$

La expresión indicada es de la forma a^{2n}, la cual se caracteriza por ser siempre positiva ($a^{2n} \geq 0$) .Ello nos permite omitir el factor $(x-2)^6$, dado que al hacerlo no se alterará el signo de la relación dada , ni se perderán soluciones. Luego, el análisis de la inecuación puede continuar con :

$$(x-2)\ (x-1)(3x-1)^8 \geq 0 \quad \text{...... (II)}$$

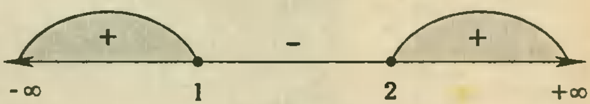
De igual modo podemos notar que : $(3x-1)^8 \geq 0$: $\forall\ x \in \mathbb{R}$, por lotanto también se puede omitir a dicho factor , sin embargo debemos considerar como una solución : $x = 1/3$, pues dicho valor reemplazado en el 1^er miembro de (II) verifica la inecuación . Luego de esta aclaración nuestra inecuación queda reducida a :

$$(x-2)\ (x-1) \geq 0 \quad \text{..... (III)}$$

Tal como lo señalan los pasos de resolución del item 22.3, igualamos a cero cada factor para determinar los puntos de corte , obteniéndose :

$$x = 2\ ;\ x = 1$$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que las zonas positivas nos dará la solución, debido a que la inecuación (I), es de signo de relación : ≥



Finalmente el intervalo solución estará dado por : $x \in \langle -\infty\ ; 1] \cup [2\ ; \infty\rangle$ **RPTA. E**

Observación : *Si al aplicar el 2do paso expuesto en el item 22.3, obtenemos una potencia de exponente impar, ésta podrá ser sustituída por su base, pero si el exponente fuera par, ésta se podrá omitir previo análisis del signo de relación de la inecuación.*

22.4) VALOR ABSOLUTO (V.A.)

DEFINICION :

Si x es un número real, entonces el valor absoluto de x es aquel número que se forma a partir de x pero sin considerar su signo; por esto se dice que el valor absoluto convierte a cualquier número en otro similar pero con signo positivo.

$$|x| = \begin{cases} x \ ; \ \text{si}: x>0 \\ 0 \ ; \ \text{si}: x=0 \\ -x \ ; \ \text{si}: x<0 \end{cases}$$

donde a $|x|$ se le denomina Valor Absoluto de x .

22.4A PROPIEDADES GENERALES

I) $\sqrt{x^2} = |x| \quad ; \ \forall x \in \mathbb{R}$

II) $|x| \geq 0 \quad ; \ \forall x \in \mathbb{R}$

III) $|x|^2 = x^2 \quad ; \ \forall x \in \mathbb{R}$

IV) $|x| = |-x| \quad ; \ \forall x \in \mathbb{R}$

V) Siendo $x \wedge y$ dos números reales, tenemos :

a) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

b) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad ; \ y \neq 0$

22.4B ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Vienen a ser igualdades condicionales, las cuales frecuentemente se presentan en las siguientes formas :

I) $|x| = 0$

Para su resolución se debe plantear la siguiente igualdad : $x = 0$

II) $|x| = a$.

Si $a \geq 0$, la ecuación es compatible determinada y para su resolución se deberán plantear las siguientes igualdades :

$$x = a \quad \vee \quad x = -a$$

Nota.- De acuerdo con la propiedad (II) expuesta en el item anterior podemos asegurar que si $a < 0$, la ecuación $|x| = a$ es incompatible, es decir, no tiene solución.

III) $|x| = |y|$

Para su resolución se debe plantear la siguiente igualdad : $(x + y)(x - y) = 0$

22.4C INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Vienen a ser desigualdades relativas, las cuales frecuentemente se presentan en las siguientes formas :

I) $|x| < a$

Para su resolución se deberá plantear : $a > 0 \quad \wedge \quad -a < x < a$

II) $|x| > a$

Para su resolución se debe establecer que : $x > a \quad \vee \quad x < -a$

III) $|x| > |y|$; o ; $|x| < |y|$

III a) Para la resolución del primer caso se deberá plantear que : $(x+y)(x-y) > 0$

III b) Para el segundo caso se deberá establecer que : $(x+y)(x-y) < 0$

Observación: *Si en alguna de las formas de las inecuaciones mostradas anteriormente, un signo de relación simple se sustituye en la relación planteada, por un signo de relación doble del mismo sentido, para su resolución se seguirán las mismas recomendaciones que en las inecuaciones de signo de relación simple. Veamos la aplicación de esta observación en una inecuación de la forma (I).*

Ejemplo.- Si : $|x| \leq a$; para su resolución se deberá plantear :

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad -a \leq x \leq a$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

9.- Designemos con T al valor reducido de : $\sqrt{(-2)^2} + |-3| + |3| - |-2|\,|8| + 9$ ***, luego es cierto que :***

A) T = 1 *B) T = 3* *C) T = -2* *D) T = -3* *E) T = 4*

Resolución.-

Utilizando las propiedades y definiciones establecidas para el valor absoluto, se podrá establecer que :

$$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = -(-2) = 2 \quad ; \quad |-3| = -(-3) = 3$$

$$|-2| = -(-2) = 2 \quad ; \quad |3| = 3 \quad \wedge \quad |8| = 8$$

Sustituyendo los valores de cada término se tendrá :

$$T = 2 + 3 + 3 - 2 \,.\, 8 + 9 = 8 - 16 + 9$$

$$\therefore \quad T = 1 \qquad \textbf{RPTA. A}$$

10.- ¿Para qué valor de x se verifica : $|2x + 3| = 0$?

A) 3/2 B) -1/2 C) -3/2 D) 2/3 E) -3/4

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 22.4B, para resolver la ecuación dada; se deberá cumplir que : $2x + 3 = 0$

Despejando x, encontramos que : $\boldsymbol{x = -3/2}$ **RPTA. C**

11.- El conjunto solución de la ecuación es : $|2x - 5| = 4$, es :

A) $\{1 ; 1/2\}$ B) $\{1/4 ; 9/4\}$ C) $\{1/9 ; 1/2\}$ D) $\{1/2 ; 9/2\}$ E) $\{1 ; 9\}$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 22.4B nos encontramos con una ecuación de la forma (II); por lo tanto nos corresponde seguir con los siguientes pasos :

Para su resolución se debe establecer que : $2x - 5 = 4 \quad \vee \quad 2x - 5 = -4$

De donde al resolver obtenemos : $x = 9/2 \quad \vee \quad x = 1/2$

Finalmente el conjunto solución será : $\textbf{C.S.} = \{1/2 ; 9/2\}$ **RPTA. D**

12.- Una solución de la ecuación : $|2x + 3| = |x - 1|$, es :

A) 2/3 B) -2/3 C) 4 D) -1/4 E) 3/2

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 22.4B, estamos frente a una ecuación de la forma (III), por tal razón emplearemos la recomendación correspondiente para dicho caso. Veamos :

Para empezar debemos establecer que : $[(2x + 3) + (x - 1)]\,[(2x + 3) - (x - 1)] = 0$

Efectuando las operaciones indicadas : $(3x + 2)(x + 4) = 0$

Finalmente igualamos a cero cada factor : $\boldsymbol{x = -2/3} \quad \vee \quad x = -4$ **RPTA. B**

13.- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto solución de la ecuación : $|x^2 - 2| = 2 - 3x$?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Ninguno

Resolución.-

La ecuación dada corresponde a la forma (II) expuesta en el item 22.4B. Por lo tanto para resolver la ecuación dada debemos seguir los pasos establecidos, los mismo que nos conducirán a establecer una desigualdad y dos ecuaciones. Veamos :

1ro) Se establece que : $2 - 3x \geq 0 \quad \wedge \quad \{\, x^2 - 2 = 2 - 3x \quad \vee \quad x^2 - 2 = -(2 - 3x) \,\}$

2do) Resolviendo : $3x - 2 \leq 0 \quad \wedge \quad \{ x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2 = -2 + 3x \}$

$x \leq 2/3 \quad \wedge \quad \{ (x+4)(x-1) = 0 \quad \vee \quad x(x-3) = 0 \}$

3er) Las soluciones son : $x \leq 2/3 \quad \wedge \quad \{ x = -4 \vee x = 1 \quad \vee \quad x = 0 \vee x = 3 \}$

4to) Pasando a notación de intervalo y de conjunto : $x \in \langle -\infty ; 2/3] \quad \wedge \quad \{-4 ; 1 ; 0 ; 3\}$

Finalmente la intersección del intervalo numérico con el conjunto de números, nos permite concluir que la solución es : $\boxed{\{-4 ; 0\}}$ **RPTA. C**

14.- Resolver : $|2x - 3| < 4$

A) $x \in \langle -1/2 ; 7/2 \rangle$ *B)* $\langle 1/2 ; 7/2 \rangle$ *C)* $\langle 1 ; 7 \rangle$ *D)* $\langle -2 ; 1 \rangle \cup \langle 2 ; 3 \rangle$ *E)* ϕ

Resolución.-

Por tratarse del primer problema de inecuación con valor absoluto diremos que de acuerdo con lo expuesto en el item 22.4C, nos encontramos frente a una inecuación de la forma (I); por lo tanto corresponde realizar los siguiente pasos :

a) El primer paso consiste en verificar si el 2do miembro es mayor que cero, lo cual resulta ser cierto, puesto que : $4 > 0$

b) El segundo paso consiste en hacer : $-4 < 2x - 3 < 4$

Sumando 3 a cada miembro, obtenemos : $-1 < 2x < 7$

Finalmente multiplicamos por 1/2 y se consigue : $-1/2 < x < 7/2$ ..... (*)

Luego el intervalo solución de (*) será : $\boxed{x \in \langle -1/2 ; 7/2 \rangle}$ **RPTA. A**

15.- Al resolver : $|x^2 - 9| \geq 7$ un intervalo solución es :

A) $\langle -\infty ; 4 \rangle$ *B)* $[-2 ; 2]$ *C)* $\langle -\infty ; -2 \rangle$ *D)* $\langle \sqrt{2} ; \infty \rangle$ *E)* $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 22.4C estamos frente a una inecuación de la forma (II). Aquí corresponde efectuar los siguientes pasos :

La inecuación dada se verifica siempre que : $x^2 - 9 \geq 7 \quad \vee \quad x^2 - 9 \leq -7$

Transponiendo términos, encontramos que : $x^2 - 16 \geq 0 \quad \vee \quad x^2 - 2 \leq 0$

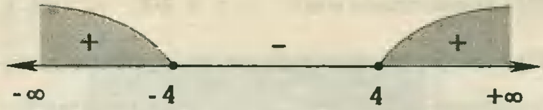
Expresando los primeros miembros, como una diferencia de cuadrados, tendremos : $x^2 - 4^2 \geq 0 \quad \vee \quad x^2 - \sqrt{2}^2 \leq 0$

Por productos notables, tendremos : $(x+4)(x-4) \geq 0 \quad \vee \quad (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$

De la 1ra inecuación deducimos los puntos de corte, igualando cada factor a cero :

$x + 4 = 0 \quad \wedge \quad x - 4 = 0 \quad \Rightarrow$ Puntos de corte : $\{-4 ; 4\}$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que las zonas positivas nos dará la solución, debido a que la 1ra inecuación es de signo de relación : ≥

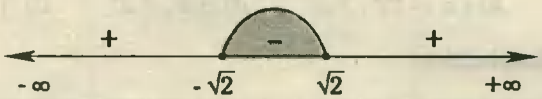


$\therefore \quad x \in \langle -\infty ; -4] \cup [4 ; \infty\rangle$ .... (I)

De la 2da inecuación descubrimos los otros puntos de corte, igualando cada factor a cero :

$x + \sqrt{2} = 0 \quad \wedge \quad x - \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow$ Puntos : $\{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que la zona negativa nos dará la solución, debido a que la 2da inecuación es de signo de relación : ≤



$\therefore \quad x \in [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$ .... (II)

Finalmente el intervalo solución de la inecuación dada estará representado por la reunión de (I) y (II) :

$\therefore \quad x \in \langle -\infty ; -4] \cup [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}] \cup [4 ; \infty\rangle$ **RPTA. E**

16.- Resolver : $|4 - x| > |2 + 3x|$

A) $\langle 1/2 ; 3\rangle$ *B)* $\langle -1/2 ; 3\rangle$ *C)* $\langle -3 ; 1/2\rangle$ *D)* $\langle -1/2 ; 1\rangle$ *E)* $\langle -2 ; 3\rangle$

Resolución.-

En primer lugar debemos reconocer que la inecuación dada corresponde a la forma (III) expuesta en el item 22.4C. Por esta razón seguiremos los siguientes pasos para su resolución :

Por tratarse de una inecuación con signo de relación : > , procederemos a establecer el producto de la suma por la diferencia, esto es : $[(4 - x) + (2 + 3x)][(4 - x) - (2 + 3x)] > 0$

Efectuando operaciones en cada corchete : $(2x + 6)\ (2 - 4x) > 0$

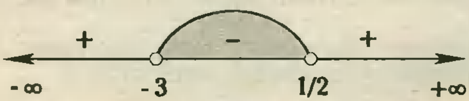
Reordenando y factorizando, tendremos : $2(x + 3) \cdot [-2(2x - 1)] > 0$

Efectuando la multiplicación de coeficientes : $-4(x + 3)(2x - 1) > 0$

Dividiendo ambos miembros por -4, obtenemos : $(x + 3)(2x - 1) < 0$

Igualando a cero los factores dados, encontramos los puntos de corte : $x = -3 \quad \wedge \quad x = 1/2$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que las zonas negativas nos dará la solución, debido a que la inecuación, es de signo de relación : <



Finalmente el intervalo solución es : $x \in \langle -3 ; 1/2\rangle$ **RPTA. C**

17.- Resolver : $|x-3| \leq 5x$

A) $\langle 1/2\,;\infty\rangle$ ***B)*** $[0\,;\infty\rangle$ ***C)*** $\langle -3/4\,;\infty\rangle$ ***D)*** $[1/2\,;\infty\rangle$ ***E)*** $[-\infty\,;1/2\rangle \cup [3/4\,;\infty\rangle$

Resolución.-

Reconocemos que la inecuación con valor absoluto dada, es de la forma (I) expuesta en el item 22.4C. Luego siguiendo las recomendaciones establecidas alli diremos :

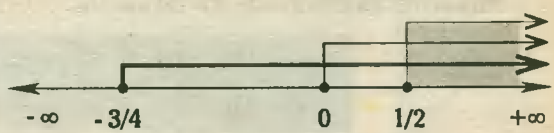
Se debe cumplir que : $5x \geq 0 \ \wedge \ \{-5x \leq x-3 \leq 5x\}$

Descomponiendo la triple desigualdad, se tiene : $5x \geq 0 \ \wedge \ \{-5x \leq x-3 \ \wedge \ x-3 \leq 5x\}$

Resolviendo simultáneamente cada inecuación : $x \geq 0 \ \wedge \ \{-6x \leq -3 \ \wedge \ -4x \leq 3\}$

Despejando en cada caso, se consigue : $x \geq 0 \ \wedge \ \{\ x \geq 1/2 \ \wedge \ x \geq -3/4\}$

Luego de trasladar estos resultados a la recta numérica, diremos que la zona sombreada que representa la intersección de los intervalos mostrados, nos dará la solución. Por lo tanto :



$x \in [1/2\,;\infty\rangle$ **RPTA. D**

18.- Resolver : $|2x-7| < -2$

A) $\langle 5/2\,;9/2\rangle$ ***B)*** $\langle -9/2\,;-5/2\rangle$ ***C)*** $\langle -\infty\,;-5/2\rangle$ ***D)*** $\langle 9/2\,;\infty\rangle$ ***E)*** ϕ

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 22.4A, se debe cumplir que : $|2x-7| \geq 0$, es decir : ¡Nunca es negativo!; sin embargo en este ejercicio se plantea que : $|2x-7| < -2$, lo cual nos sugiere que : $|2x-7|$ debe ser negativo. Debido a la imposibilidad de tal caso, podemos afirmar que no existe ningún valor real de "x" que verifique dicha inecuación.

$\therefore \quad x = \phi$ **RPTA. E**

22.5) INECUACIONES CON RADICALES

Vienen a ser desigualdades relativas en las que se presentan radicales y dentro de ellos las variables . Entre ellas se pueden reconocer a las siguientes formas :

I) $\sqrt[2n]{x} < y$.

Para su resolución se deberá plantear las siguientes relaciones :

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad y > 0 \quad \wedge \quad x < y^{2n}$$

II) $\sqrt[2n]{x} > y$.

Para la resolución de este tipo de inecuaciones se deberán considerar los siguientes casos :

Caso (A) : $x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad x > y^{2n}$

Caso (B) : $x \geq 0 \quad \wedge \quad y < 0$

La solución final de este tipo de inecuaciones viene dado por la unión de las soluciones obtenidas en los Casos (A) y (B).

II) $\sqrt[2n+1]{x} < y \quad ; \quad \sqrt[2n+1]{x} > y$.

Para la resolución de este tipo de inecuaciones con radicales que admitan por índice a algún número impar , cualquiera que sea el signo de relación que se presente , debemos decir que no existe ninguna restricción para su resolución, bastando elevar a ambos miembros de la inecuación a un exponente que elimine el signo radical y a continuación proceder tal como se hizo con los diferentes casos de inecuaciones estudiados hasta aquí .

22.6) PROPIEDADES AUXILIARES

I) $|x| \geq x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad ; \quad \forall \{x+y\} \subset \mathbb{R}$

III) $\sqrt[2m]{x} + \sqrt[2n]{y} \geq 0 \quad ; \quad \forall\, x \geq 0 \wedge y \geq 0$

22.7) INECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas desigualdades relativas,en las que las incógnitas se presentan de modo que forman parte de algún exponente. Los siguientes son los casos más comunes :

$$a^x < a^y \quad ; \quad a^x > a^y \quad ; \quad a^x \leq a^y \quad ; \quad a^x \geq a^y$$

22.7A PROPIEDADES

I) Siendo $a > 1$, tenemos :

$$\text{- Si : } a^x < a^y \quad \Rightarrow \quad x < y$$

$$\text{- Si : } a^x > a^y \quad \Rightarrow \quad x > y$$

Puede observarse que los exponentes presentan el mismo signo de relación que el de las potencias.

II) Siendo $0 < a < 1$, tenemos :

$$\text{- Si : } a^x < a^y \quad \Rightarrow \quad x > y$$

$$\text{- Si : } a^x > a^y \quad \Rightarrow \quad x < y$$

Observar que el signo de relación de la potencia se invierte para los exponentes.

Observación.- *En aquellas inecuaciones donde intervengan signos de relación doble, se procederá de igual modo que en los casos anteriores. Por ejemplo en el caso (I):*

$$Si: a > 1 \ / \ a^x \geq a^y \quad \Rightarrow \quad x \geq y$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

19.- Resolver : $\sqrt{3x-2} < 5$

A) $\langle 2/3 ; 9\rangle$ *B)* $[2/3 ; 9]$ *C)* $[2/3 ; 9\rangle$

D) $\langle -\infty ; 2/3\rangle \cup \langle 9 ; \infty\rangle$ *E)* $\langle -\infty ; 2/3] \cup \langle 9 ; \infty\rangle$

<u>Resolución</u>.-

La inecuación dada coincide con la forma (I) de las inecuaciones con radicales expuesta en el item 22.5 por consiguiente procederemos según como alli se recomendó :

Establecemos las siguientes desigualdades : $3x - 2 \geq 0 \quad \wedge \quad 5 > 0 \quad \wedge \quad 3x - 2 < 5^2$

Dado que la desigualdad intermedia queda satisfecha a simple vista, trataremos de resolver las inecuaciones de los extremos : $3x - 2 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x - 2 < 25$ ...(*)

Despejando simultáneamente en cada inecuación, se tiene : $x \geq 2/3 \quad \wedge \quad x < 9$

Pasando a notación de intervalo, tendremos que : $x \in [2/3 ; \infty\rangle \quad \wedge \quad x \in \langle -\infty ; 9\rangle$

Finalmente la solución estará dada por la intersección de estos intervalos, de donde se concluye que : $\boxed{x \in [2/3 ; 9\rangle}$ **RPTA. C**

20.- Resolver : $\sqrt{4x+3} > 7$

A) $\langle 23/2 ; \infty\rangle$ *B)* $\langle 23 ; \infty\rangle$ *C)* $\langle 2 ; 23\rangle$ *D)* $\langle -\infty ; 23/2\rangle$ *E)* $\langle -23/2 ; \infty\rangle$

Resolución.-

La inecuación dada corresponde a la forma (II) y de ella a la expuesta en el caso (A) del item 22.5 ,por consiguiente la resolución estará definida por los siguientes pasos :

En primer lugar se deberá establecer las siguientes inecuaciones : $4x+3 \geq 0 \;\wedge\; 7 \geq 0 \quad \wedge \quad 4x+3 > 7^2$

Resolviendo las inecuaciones extremas, se tendrá : $4x+3 \geq 0 \quad \wedge \quad 4x+3 > 49$

Despejando x en cada caso, obtenemos : $x \geq -3/4 \quad \wedge \quad x > 23/2$

Expresando estos resultado en notación de intervalo : $x\; [-3/4 ; \infty\rangle \quad \wedge \quad \langle 23/2 ; \infty\rangle$

Finalmente la solución de la inecuación dada se obtendrá intersectando estos intervalos, concluyéndose que : $\boxed{x \in \langle 23/2 ; \infty\rangle}$ **RPTA. A**

21.- Resolver : $\sqrt{2x+23} > x+4$

A) $\langle 1 ; 23/2\rangle$ *B)* $\langle -1 ; 23/2\rangle$ *C)* $\langle -3 ; 4\rangle$ *D)* $\langle -23/2 ; 1\rangle$ *E)* $[-23/2 ; 1\rangle$

Resolución.-

Nos encontramos frente a una inecuación de la forma (II) , sin embargo , debemos reconocer que el 2do miembro de la desigualdad contiene a la incógnita x y posee un signo desconocido, es decir no podemos asegurar a priori si trata de una expresión (+),ó, (-) ; por consiguiente debemos resolver la inecuación suponiendo primero que se trata de una cantidad positiva : Caso (A) ,y luego suponiendo que es una cantidad negativa :Caso (B). Veamos :

Caso (A).- Según las reglas dadas para este caso ,debemos plantear las siguientes inecuaciones equivalentes :

$$2x+23 \geq 0 \quad \wedge \quad x+4 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+23 > (x+4)^2$$

Resolviendo cada inecuación por separado, tendremos :

$$2x+23 \geq 0 \quad \wedge \quad x+4 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+23-x^2-8x-16 > 0$$

$$2x+23 \geq 0 \quad \wedge \quad x+4 \geq 0 \quad \wedge \quad -x^2-6x+7 > 0$$

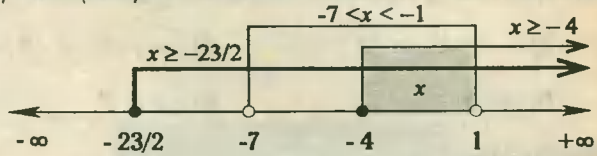
$$x \geq -23/2 \quad \wedge \quad x \geq -4 \quad \wedge \quad x^2+6x-7 < 0$$

$$x \geq -23/2 \quad \wedge \quad x \geq -4 \quad \wedge \quad (x+7)(x-1) < 0$$

Es decir : $x \in [-23/2 ; \infty\rangle \wedge [-4 ; \infty\rangle \wedge \langle -7 ; 1\rangle$

Luego de la intersección, podemos concluir que la solución común es :

$x \in [-4 ; 1\rangle$ ..... (I)



Caso (B) .- Según este caso la inecuación dada se supondrá que el 2do miembro de la inecuación dada es negativa . Veamos :

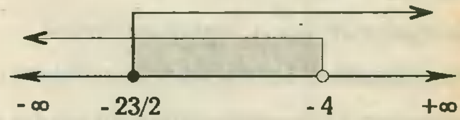
Primero plantearemos las siguientes inecuaciones equivalentes : $2x + 23 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 4 < 0$

Al despejar x en cada caso se obtiene : $x \geq -23/2 \quad \wedge \quad x < -4$

Escribiendo en notación de intervalo, tendremos : $x \in [-23/2 ; \infty\rangle \quad \wedge \quad \langle -\infty ; -4\rangle$

A partir del gráfico adjunto diremos que la solución estará dada por la intersección de los intervalos , la misma que viene dada por la zona sombreada :

$x \in [-23/2 ; -4\rangle$ ..... (II)



Finalmente de (I) y (II) ,la solución de la inecuación original es :

$x \in [-4 ; 1\rangle \vee [-23/2 ; -4\rangle \quad \therefore \quad x \in [-23/2 ; 1\rangle$ **RPTA. E**

22.- Resolver la inecuación : $\sqrt[3]{x^3 - 7} < x - 1$

A) $\langle 1 ; 2\rangle$ *B)* $\langle 0 ; 3\rangle$ *C)* $\langle -2 ; 2\rangle$ *D)* $\langle -1 ; 2\rangle$ *E)* $\langle -1 ; 4\rangle$

Resolución.-

Por tratarse de una inecuación con radical de índice impar, procederemos según como se indica en el item 22.5 :

Se debe elevar a ambos miembros de la inecuación al exponente 3; veamos : $x^3 - 7 < (x - 1)^3$

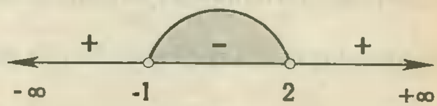
Desarrollando la potencia del 2do del 2do miembro : $x^3 - 7 < x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Simplificando y transponiendo términos ,se tendrá : $3x^2 - 3x - 6 < 0$

Dividiendo por 3 , se tendrá : $x^2 - x - 2 < 0$

Factorizando por el método del aspa simple : $(x - 2)(x + 1) < 0$

Igualando a cero cada factor , encontramos los puntos de corte : {-1 ; 2 }, y trasladando estos resultados a la recta numérica , concluímos que :



$x \in \langle -1 ; 2\rangle$ **RPTA. D**

23.- *Resolver la siguiente inecuación exponencial :* $5^{x+6} < 5^{x^2}$

A) $\langle -\infty ; -2 \rangle \cup \langle 3 ; \infty \rangle$ *B)* $\langle -\infty ; -3 \rangle \cup \langle 2 ; \infty \rangle$ *C)* $\langle -\infty ; 3 \rangle \cup \langle 6 ; \infty \rangle$

D) $\langle 2 ; 3 \rangle$ *E)* $\langle -3 ; -2 \rangle$

Resolución.-

La inecuación dada presenta expresiones exponenciales de base mayor que 1 , por tal razón aplicaremos la Propiedad expuesta en el item 22.7A , la misma que establece que en ta l condición los exponentes mantienen entre sí el mismo signo de relación de la inecuación original. Veamos :

Dada la inecuación : $5^{x+6} < 5^{x^2}$

Se debe cumplir que : $x + 6 < x^2$

Transponiendo términos : $-x^2 + x + 6 < 0$

Multiplicando por -1, ambos miembros : $x^2 - x - 6 > 0$

Factorizando el 1er miembro , tendremos : $(x - 3)(x + 2) > 0$ .....(*)

Igualando a cero encontramos los puntos de corte : { -2 ; 3 } . Finalmente trasladando estos resultados a la recta numérica, diremos que la solución está dada por la zonas positivas dado que el signo de relación de (*), es : >

$\therefore$ $\boxed{x \in \langle -\infty ; -2 \rangle \cup \langle 3 ; \infty \rangle}$ **RPTA. A**

24.- *Resolver :* $(0,1)^{2x-1} \leq (0,01)^{5x+1}$

A) $\langle -\infty ; -3/8 \rangle$ *B)* $[3/8 ; \infty \rangle$ *C)* $\langle 3/8 ; 2]$ *D)* $\langle -\infty ; -3/8]$ *E)* ϕ

Resolución.-

Teniendo en cuenta que : $0,1 = \frac{1}{10} \wedge 0,01 = \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$

Sustituyendo estas equivalencias en la inecuación dada: $\left(\frac{1}{10}\right)^{2x-1} \leq \left[\left(\frac{1}{10}\right)^2\right]^{5x+1}$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $\left(\frac{1}{10}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{10x+2}$

Luego de acuerdo con lo expuesto en el item 22.7A; estamos frente a una inecuación del caso (II), en consecuencia se debe cumplir que : $2x - 1 \geq 10x + 2$

Transponiendo términos y reduciendo , tendremos : $-8x \geq 3$

Dividiendo por -8 a cada miembro, se obtiene : $x \leq -\frac{3}{8}$

Expresando este resultado en notación de intervalo : $\boxed{x \in \langle -\infty ; -3/8]}$ **RPTA. D**

MISCELANEA

25.- El menor número natural par "x" que verifica la inecuación : $\dfrac{(x-4)(x+2)(x-5)}{(x+6)(3-x)} \leq 0$***, es:***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

La inecuación dada se podrá escribir así : $\dfrac{(x-4)(x+2)(x-5)}{-(x+6)(x-3)} \leq 0$

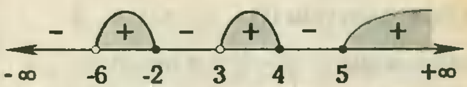
Multiplicando por -1 a cada miembro, tendremos : $\dfrac{(x-4)(x+2)(x-5)}{(x+6)(x-3)} \geq 0$

Al resolver la inecuaciónse debe tener en cuenta que todo denominador deberá ser diferente de cero. Esto significa que : $x \neq 3 \wedge x \neq -6$

A continuación los puntos de corte serán :

$x = 4$; $x = -2$; $x = 5$

Observar que en $x = -6 \wedge x = 3$ el intervalo deberá ser abierto.



Reconociendo los intervalos solución, tendremos : $x \in \langle -6 ; -2] \cup \langle 3 ; 4] \cup [5 ; \infty\rangle$

$\therefore$ $x_{Mín} = 4$ **"menor número natural"** **RPTA. D**

26.- ¿Qué condición debe satisfacer el parámetro "α" para que cualquiera que sea el valor real asignado a "x" el trinomio $x^2 + 2x + \alpha$ ***sea mayor que 10 ?***

A) $\alpha > 7$ ***B)*** $\alpha < 5$ ***C)*** $\alpha > 11$ ***D)*** $2 < \alpha < 7$ ***E)*** $\alpha > 2$

Resolución.-

Por condición del problema se debe cumplir que : $x^2 + 2x + \alpha > 10$

Transponiendo términos se tendrá que : $x^2 + 2x + (\alpha - 10) > 0$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Por tratarse de un trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$, utilizaremos la Propiedad (I) vista en el item 22.1A, la cual nos permite establecer que : $(2)^2 - 4\,(1)\,(\alpha - 10) < 0$

Efectuando las operaciones indicadas, tendremos : $4 - 4\alpha + 40 < 0$

De donde al despejar obtenemos : $\alpha > 11$ **RPTA. C**

27.- Hallar la suma de los valores absolutos de las soluciones de la siguiente ecuación :

$$|x+3| - |x-1| = x+1$$

A) 7 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 11*** ***UNI 93 - II***

Resolución.-

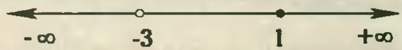
Para resolver una ecuación ,o, inecuación, donde se aprecie dos o más valores absolutos ,se recomienda analizar cada valor absoluto por separado y en un intervalo definido . La solución vendrá dada por la unión de todas las soluciones obtenidas . Veamos :

1er Paso.- Para obtener los puntos de corte, igualamos a cero cada valor absoluto :

$$|x+3| = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$|x-1| = 0 \Rightarrow x = 1$$

2do Paso.- Se ubican los puntos de corte en la recta numérica para determinar los intervalos.



3er Paso.- De este gráfico se reconocen los siguientes intervalos.

I) $\langle -\infty ; -3 \rangle$ II) $[-3 ; 1\rangle$ III) $[1 ; \infty\rangle$

4to Paso.- A continuación deberá resolverse la ecuación (o inecuación) en cada uno de los intervalos obtenidos en el paso anterior .Veamos :

$$|x+3| - |x-1| = x+1 \qquad \ldots\ldots (\alpha)$$

a) En el intervalo (I) : $-\infty < x < -3$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Notamos que : } x+3 = \#\text{ negativo} & \Rightarrow & |x+3| = -(x+3) \\ \text{Asimismo : } x-1 = \#\text{ negativo} & \Rightarrow & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right\} \ldots\ldots(\beta)$$

Reemplazando(β) en (α) se establecerá que : $-(x+3) - [-(x-1)] = x+1$

Efectuando las operciones indicadas y despejando,tendremos : $x = -5$

Dado que : $-5 \in \langle -\infty ; -3\rangle$, concluímos que : $\boldsymbol{x = -5}$, es solución de la ecuación.

b) En el intervalo (II) : $-3 \le x < 1$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Observamos que : } x+3 = \#\text{ positivo} & \Rightarrow & |x+3| = x+3 \\ \text{Del mismo modo : } x-1 = \#\text{ negativo} & \Rightarrow & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right\} \ldots\ldots(\gamma)$$

Reemplazando (γ)en (α), se tendrá que : $x+3 - [-(x-1)] = x+1$

Efectuando y despejando se obtiene : $x = -1$

Como : $-1 \in [-3 ; 1\rangle$, diremos que : $\boldsymbol{x = -1}$, es solución de la ecuación.

c) En el intervalo (II) : $1 \le x < \infty$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{De aqui podemos afirmar que : } x+3 = \#\text{ positivo} & \Rightarrow & |x+3| = x+3 \\ \text{Asimismo podemos decir que : } x-1 = \#\text{ positivo} & \Rightarrow & |x-1| = x-1 \end{array}\right\} \ldots\ldots(\theta)$$

Sustituyendo (θ)en (α), se tendrá : $x+3-(x-1) = x+1$

Luego de efectuar y despejar x, se obtiene : $x = 3$

Como : $3 \in [1 ; \infty\rangle$, diremos que : $\boldsymbol{x = 3}$, es solución de la ecuación.

5to Paso.- La solución de la ecuación (o inecuación) estará dada por la unión de todas las soluciones encontradas en cada intervalo analizado.

$$C.S. = \{-5\ ;\ -1\ ;\ 3\}$$

Finalmente lo solicitado viene dado así : $|-5| + |-1| + |3| = \boxed{9}$ **RPTA. C**

28.- ¿Cuál es el menor número impar positivo que verifica : $|x-2| + |x-3| > 7$?

A) 1 ***B) 3*** ***C) 5*** ***D) 7*** ***E) 9***

Resolución.-

Siguiendo los mismos pasos de la resolución del problema anterior ,diremos que los intervalos a considerar son :

I) $\langle -\infty ; 2\rangle$ II) $[2 ; 3\rangle$ III) $[3 ; \infty\rangle$

Luego se deberá resolver la inecuación : $|x-2| + |x-3| > 7$ ..... (α)

a) En el intervalo (I) : $-\infty < x < 2$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Notamos que :} & x-2 = \#\text{ negativo} \Rightarrow & |x-2| = -(x-2) \\ \text{Asimismo :} & x-3 = \#\text{ negativo} \Rightarrow & |x-3| = -(x-3) \end{array}\right\} \ldots\ldots(\beta)$$

Reemplazando (β) en (α) , se tendrá : $-(x-2) - (x-3) > 7$

Efectuando y simplificando, se tendrá : $-2x > 2$

Dividiendo por -2 a cada miembro, deducmos que : $x < -1$

Expresando este resultado en notación de intervalo : $x \in \langle -\infty ; 1\rangle$

Para hallar la solución de la inecuación , debemos realizar la siguiente intersección de intervalos : $x \in \langle -\infty ; 1\rangle \cap \langle -\infty ; 2\rangle$

De esta operación concluimos que la 1ra solución en el intervalo (I) es : $x \in \langle -\infty ; 1\rangle$

b) En el intervalo (II) : $2 \le x < 3$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Notamos que :} & x-2 = \#\text{ positivo} \Rightarrow & |x-2| = x-2 \\ \text{Del mismo modo :} & x-3 = \#\text{ negativo} \Rightarrow & |x-3| = -(x-3) \end{array}\right\} \ldots\ldots(\gamma)$$

Reemplazando (γ) en (α) se tendrá : $x-2-(x-3) > 7$

Efectuando y simplificando , encontramos que : $1 > 7$ ¡absurdo!

Es decir no existe solución de la inecuación en el intervalo (II),luego : $x = \phi$ ... 2da solución

c) En el intervalo (III) : $3 \le x < \infty$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Podemos decir que :} & x-2 = \#\text{ positivo} \Rightarrow & |x-2| = x-2 \\ \text{Asimismo reconocemos que :} & x-3 = \#\text{ positivo} \Rightarrow & |x-3| = x-3 \end{array}\right\} \ldots\ldots(\theta)$$

Sustituyendo (θ) en (α) se tendrá : $x-2+x-3 > 7$

Resolviendo, se obtiene : $2x > 12 \Rightarrow x > 6$

Pasando a notación de intervalo, ditremos que : $x \in \langle 6;\infty\rangle$

Realizando la intersección de los intervalos : $x \in [3;\infty\rangle \cap \langle 6;\infty\rangle$

De aqui observamos que : $x \in \langle 6;\infty\rangle$ ...... 3ra solución

Finalmente la solución de la inecuación viene dada por la reunión de todas las soluciones obtenidas : $x \in \langle -\infty;-1\rangle \cup \phi \cup \langle 6;\infty\rangle$

Efectuando la intersección , obtendremos : $x \in \langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 6;\infty\rangle$

Finalmente, podemos reconocer que el menor número impar que verfica la inecuación es : **7** **RPTA. D**

29.- Si las raíces de la ecuación $x^2 + ax + 1 = 0$ son positivas , sobre el valor de "a" lo verdadero es :

A) $a < 0$ ***B)*** $a > 0$ ***C)*** $a \geq 2$ ***D)*** $a \leq -2$ ***E) "a" debe ser entero***

UNI 92

Resolución.-

Analizando cuidadosamente a la ecuación : $x^2 + ax + 1 = 0$ podemos deducir que si sus raíces son positivas se debe cumplir simultáneamente tres condiciones :

I) Discriminante ≥ 0

II) Suma de raíces > 0

III) Producto de raíces > 0

De (I) : $a^2 - 4(1)(1) \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2^2 \geq 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) \geq 0$

$\therefore\ a \in \langle -\infty;-2] \cup [2;\infty\rangle$ ...... (α)

De (II) : $-a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad \therefore\ a \in \langle -\infty;0]$ ...... (θ)

De (III) : $1 > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \vee a \in \langle -\infty;\infty]$ ...... (γ)

Finalmente intersectando (α) ; (θ) $\wedge$ (γ) : $a \in \langle -\infty;-2]$ **RPTA. D**

30.- Resolver : $\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x-3} - \sqrt{2x-5} > \sqrt{3x}$

A) $\langle 5/2;\infty\rangle$ ***B)*** $[5/2;\infty\rangle$ ***C)*** $\langle 1/2;\infty\rangle$ ***D)*** $[-1/3;\infty\rangle$ ***E)*** $\langle 5;\infty\rangle$

Resolución.-

Reacomodando la inecuación : $\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x-3} > \sqrt{3x} + \sqrt{2x-5}$ ..... (I)

Por la existencia de radicales aplicaremos las recomendaciones del item 22.5, Caso (II) :

A) De la 1ra regla , se debe cumplir que : $\{ 3x - 2 \geq 0 \ \wedge \ 2x - 3 \geq 0 \} \ \wedge \ \{ 3x \geq 0 \wedge 2x - 5 \geq 0 \}$

Resolviendo por separado : $\{ x \geq 2/3 \ \wedge \ x \geq 3/2 \} \ \wedge \ \{ x \geq 0 \ \wedge \ x \geq 5/2 \}$

De la intersección se obtiene : $x \geq 5/2$ ...... (II)

B) De la 2da regla, elevamos al cuadrado a ambos miembros de la inecuación (I) :

$$3x - 2 + 2\sqrt{(3x-2)(2x-3)} + 2x - 3 > 3x + 2\sqrt{(3x)(2x-5)} + 2x - 5$$

$$\Rightarrow \quad 5x - 5 + 2\sqrt{(3x-2)(2x-3)} > 5x - 5 + 2\sqrt{(3x)(2x-5)}$$

Reduciendo y simplificando tenemos : $\sqrt{(3x-2)(2x-3)} > \sqrt{(3x)(2x-5)}$

Elevando nuevamente al cuadrado se tiene : $(3x - 2)(2x - 3) > (3x)(2x - 5)$

Efectuando las multiplicaciones indicadas : $6x^2 - 13x + 6 > 6x^2 - 15x$

Reduciendo y despejando , tendremos : $x > -3$ ...... (III)

Finalmente la solución de la inecuación viene dada por la intersección de las soluciones obtenidas en (II) $\wedge$ (III) :

$$\therefore \quad x \in [5/2 ; \infty\rangle$$ **RPTA. B**

Observación .- Como has podido notar no hemos discutido el caso (B) que recomienda el item 22.5 , para una inecuación de este tipo . Esto ha sido así por que las raices de índice par dan un resultado siempre positivo .

31.- Dadas las desigualdades : $\sqrt[3]{x^2y^2+2}\,.\,(x-2) < 0$ .... *(I)*

$(y-3).\left|1+|axy|\right| > 0 \ ; \ a < 0$ .... *(II)*

podemos afirmar que : "x - y", es :

A) menor que -2 ***B) menor que 0*** ***C) menor que 2***

D) menor que -1 ***E) menor que 1***

<u>Resolución</u>.-

Lo apreciado en la resolución de los ejercicios anteriores ,nos sugiere analizar cada desigualdad por separado. Veamos :

A) Analicemos la desigualdad : $\sqrt[3]{x^2y^2+2}\,.\,(x-2) < 0$

Primero debemos notar que : $x^2y^2 \geq 0 \ ; \ \forall \ x \wedge y \in \mathbb{R}$

Sumando 2 a cada miembro : $x^2y^2 + 2 \geq 2$

Extrayendo raíz cúbica, tendremos : $\sqrt[3]{x^2y^2+2} \geq \sqrt[3]{2}$

De este último paso, se puede deducir que la expresión $\sqrt[3]{x^2y^2+2}$ es siempre positiva, en consecuencia para que se cumpla la desigualdad (I), será necesario que :

$$x - 2 < 0$$

Despejando , se tiene : $x < 2$ .... (α)

II) Ahora analizamos la desigualdad : $(y-3)\ \left|1+|axy|\right| > 0$

Por definición de valor absoluto debemos recordar que la expresión $\left|1+|axy|\right|$,es siempre positiva, en consecuencia para que se cumpla la desigualdad (II), será necesario que :

$$y - 3 > 0$$

Despejando se tendrá : $y > 3$ .... (β)

Finalmente restando (α) y (β) miembro a miembro ,se consigue : $\boxed{x - y < -1}$ **RPTA. D**

32.- Luego de resolver la inecuación : $\sqrt{3x^2-17x+10} \le 4$, indicar la suma de los valores mínimo y máximo que puede asumir "x".

A) 17/3 ***B) 17/6*** ***C) 15/4*** ***D) 14/3*** ***E) 11/3***

Resolución.-

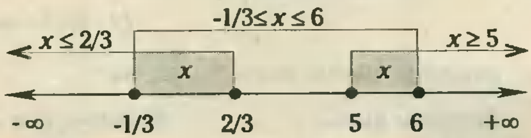
De acuerdo a lo expuesto en el item 22.5, se deberá cumplir que : $3x^2 - 17x + 10 \ge 0 \quad \wedge \quad 3x^2 - 17x + 10 \le 4^2$

Resolviendo por separado , se tendrá : $(3x-2)(x-5) \ge 0 \quad \wedge \quad 3x^2 - 17x - 6 \le 0$

Factorizando cada miembro , obtenemos : $(3x-2)(x-5) \ge 0 \quad \wedge \quad (3x+1)(x-6) \le 0$

De aqui la solución será : $x \in \langle -\infty ; 2/3] \cup [5 ; \infty\rangle \quad \wedge \quad x \in [-1/3 ; 6]$

Intersectando en la recta numérica se tiene :



$x \in [-1/3 ; 2/3] \cup [5 ; 6]$

De aqui se deduce que : $x_{Mín} = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad x_{Máx} = 6 \quad \Rightarrow \quad x_{Mín} + x_{Máx} = \boxed{\frac{17}{3}}$ **RPTA. A**

33.- ¿Cuántos valores enteros de "x" verifican la siguiente inecuación : $\left||x|-3\right| \ge \left||x|-1\right|$?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 22.4C para resolver la inecuación dada, se deberá establecer que :

$$\left[\left(|x|-3\right)+\left(|x|-1\right)\right].\left[\left(|x|-3\right)-\left(|x|-1\right)\right] \ge 0$$

Efectuando las operaciones indicadas , se obtiene : $(2|x| - 4)\ (-2) \geq 0$

Factorizando 2 y reacomodando , se tendrá : $-4\,(|x| - 2) \geq 0$

Dividiendo por -2 , se logra establecer que : $|x| - 2 \leq 0$

Despejando, logramos deducir que : $|x| \leq 2$

De esta última desigualdad, se concluye que : $-2 \leq x \leq 2$

Finalmente se observa que los valores enteros que asume "x" son : **- 2 ; -1; 0 ; 1 ; 2** **RPTA. E**

34.- Al resolver : $\sqrt{\sqrt[4]{2-x}+\sqrt{x+2}} > x-3$ ***, indicar por respuesta la suma de los extremos finitos de los intervalos solución.***

A) 0 *B) 2* *C) 1* *D) -1* *E) -2*

Resolución.-

De la expresión radical del 1er miembro, se debe cumplir que : $\sqrt[4]{2-x} + \sqrt{x+2} \geq 0$

Aplicando la propiedad III expuesta en el item 22.6, se tendrá : $2 - x \geq 0 \ \wedge \ x + 2 \geq 0$

Resolviendo por separado, se puede establecer que : $x \leq 2 \ \wedge \ x \geq -2$

Estos resultados nos indican que la expresión radical solo esta definida si : $-2 \leq x \leq 2$ .... (1)

A continuación será conveniente averiguar el signo que posee: $x - 3$, en el intervalo hallado .Para ello restamos 3 a cada miembro de (1): $-5 \leq x - 3 \leq -1$ .....(2)

De (2), descubrimos que : $x - 3$,es negativo. En consecuenci la inecuación dada corresponde al Caso IIB del item 22.5, cuya solución viene dada por la relación (1).

Finalmente los extremos finitos del intervalo solución son : $-2 \wedge 2$

$\therefore \quad (-2) + 2 = \boxed{0}$ **RPTA. A**

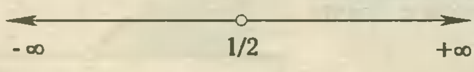
35.- Resolver la siguiente inecuación : $\dfrac{|2x-1|-x}{x-5} < 2$

A) $\langle -\infty ; 2\rangle \cup \langle 3 ; 5\rangle$ *B)* $\langle -\infty ; 5\rangle \cup \langle 7 ; \infty\rangle$ *C)* $\mathbb{R} - \{5\}$

D) $\langle -\infty ; 9\rangle - \{5\}$ *E)* $\langle -\infty ; 5\rangle \cup \langle 9 ; \infty\rangle$

Resolución.-

Con la finalidad de eliminar al valor absoluto analizaremos la inecuación dada por intervalos.Para ello hagamos $|2x - 1| = 0$, de donde encontramos un punto de corte en : $x = 1/2$.



Este esquema nos sugiere analizar la inecuación en los siguiente intervalos :

$$\langle -\infty ; 1/2 \rangle \ \vee \ [1/2 ; \infty \rangle$$

Recordemos que la inecuación a resolver es : $\dfrac{|2x-1|-x}{x-5} < 2$ .... (α)

A) Analizando (α)en el intervalo (I), es decir : $-\infty < x < 1/2$.

Multiplicando por 2 y restando 1 a cada miembro , tendremos : $-\infty < 2x-1 < -1/2$

Esto nos permite afirmar que : $2x - 1 = \#$ negativo

Por consiguiente , diremos que : $|2x-1| = -(2x-1)$

Luego en (α) se tendrá : $\dfrac{-(2x-1)-x}{x-5} < 2$

Efectuando operaciones tendremos : $\dfrac{-5x+11}{x-5} < 0$

Multiplicando por : -1 , tendremos : $\dfrac{5x-11}{x-5} > 0$

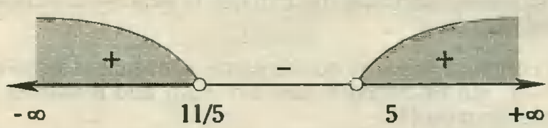
De esta relación deducimos que los puntos de corte son : $\{ 11/5 ; 5 \}$

Trasladando estos puntos a la recta numérica, se tendrá que la solución vendrá dada por :

$$x \in \langle -\infty ; 11/5 \rangle \ \cup \ \langle 5 ; \infty \rangle$$

La intersección del intervalo analizado con el intervalo hallado nos da la primera solución de la inecuación, la cual es :

$$x \in \langle -\infty ; 1/2 \rangle \quad ..... (\beta)$$



B) Analizando (α)en el intervalo (II), es decir : $1/2 \leq x < \infty$

Multiplicando por 2 y restando 1 a cada miembro , tendremos : $0 \leq 2x-1 < \infty$

De aquí deducimos que : $2x - 1 = \#$ positivo

Por tal razón , podemos afirmar que : $|2x-1| = 2x-1$

Luego en (α) se tendrá : $\dfrac{2x-1-x}{x-5} < 2$

Transponiendo el 2 al 1er miembro : $\dfrac{x-1}{x-5} - 2 < 0$

Efectuando operaciones concluímos que : $\dfrac{-x+9}{x-5} > 0$

Multiplicando por -1 a cada miembro, tendremos : $\dfrac{x-9}{x-5} > 0$

De esta relación podemos deducir los puntos de corte : $\{ 5 ; 9 \}$. Al trasladar estos puntos a la recta numérica , logramos encontrar la solución :

$$x \in \langle -\infty ; 5 \rangle \ \cup \ \langle 9 ; \infty \rangle$$

Ahora podemos reconocer que la 2da solución viene dada por :

$$x \in [1/2\,;5\rangle \cup \langle 9\,;\infty\rangle \;.....\; (\gamma)$$

Finalmente la solución de la inecuación estará determinada por la unión de las soluciones halladas en (α) y (β) :

$$x \in \langle -\infty\,;1/2\rangle \cup [1/2\,;5\rangle \cup \langle 9\,;\infty\rangle$$

$$\therefore \quad \boxed{x \in \langle -\infty\,;5\rangle \cup \langle 9\,;\infty\rangle} \qquad \textbf{RPTA. E}$$

36.- ¿Cuál es el menor número entero "x" que verifica : $\;(0,6)^{\frac{x^2+5x-10}{x^2+2x-8}} \leq 0,6$ ***?***

A) -1 *B) -2* *C) -3* *D) 2* *E) 3*

Resolución.-

En vista que la inecuación dada presenta una base comprendida entre 0 y 1 , aplicaremos la Propiedad (II)expuesta en el item 22.7 :

$$\frac{x^2+5x-10}{x^2+2x-8} \geq 1$$

Transponiendo términos se consigue :

$$\frac{x^2+5x-10}{x^2+2x-8} - 1 \geq 0$$

Efectuando la sustracción de fracciones indicada :

$$\frac{x^2+5x-10-x^2-2x+8}{x^2+2x-8} \geq 0$$

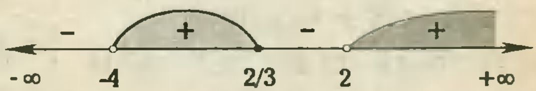
Reduciendo términos semejantes , se tendrá :

$$\frac{3x-2}{x^2+2x-8} \geq 0$$

Factorizando el denominador se tendrá :

$$\frac{3x-2}{(x+4)(x-2)} \geq 0$$

Teniendo en cuenta los mismos fundamentos del ejercicio anterior , diremos que los puntos de corte se obtienen igualando a cero cada factor :



De estos puntos , debemos reconocer que los intervalos deben ser abiertos en $x = -4 \wedge x = 2$, dado que en dichos puntos el denominador se hace nulo .

Luego : $x \in \langle -4\,;-2/3] \cup \langle 2\,;\infty\rangle \Rightarrow$ $x_{Mín} = -3$ "menor número entero" **RPTA. C**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Resolver : $x^2 \geq 625$

A) $\mathbb{R} - [-15\,;\,25\rangle$ B) $\mathbb{R} - [-25\,;\,15]$

C) $\mathbb{R} - [-25\,;\,25\rangle$ D) $\mathbb{R} - \langle -25\,;\,25\rangle$

E) $\mathbb{R} - [-25\,;\,25]$

2.- La solución de : $-x^2 + 5x > 4$, es :

A) $\langle -4\,;\,0\rangle$ B) $[-4\,;\,-1]$ C) $[-1\,;\,4]$

D) $\langle 1\,;\,4\rangle$ E) $[1\,;\,4]$

3.- Al resolver : $5 \leq x^2 - 31 \leq 18$, se obtiene :

A) $\mathbb{R} - \langle 6\,;\,7\rangle$ B) ϕ

C) $[-7\,;\,-6] \cup [6\,;\,7]$ D) $[-11\,;\,-6] \cup [1\,;\,3]$

E) $[-4\,;\,0\rangle \cup [2\,;\,10]$

4.- El menor valor entero de "x" que satisface :

$$42 \leq x^2 + x \leq 110 \text{ , es :}$$

A) -14 B) -13 C) -10 D) -7 E) -11

5.- Resolver : $\dfrac{x-3}{x+2} > 0$

A) $\mathbb{R} - [-2\,;\,3]$ B) $\mathbb{R} - [2\,;\,3]$ C) $\mathbb{R} - [-3\,;\,2]$

D) $\mathbb{R} - [1\,;\,5]$ E) $\mathbb{R} - [2\,;\,9]$

6.- Al resolver : $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$, obtenemos :

A) $\mathbb{R}^-$ B) $\mathbb{R}^- \cup \langle 2\,;\,3\rangle$

C) $\langle -\infty\,;\,1\rangle \cup \langle 3/2\,;\,2\rangle$ D) $\mathbb{R} - \langle 1\,;\,3\rangle$

E) $\langle -\infty\,;\,1\rangle \cup \langle 3/2\,;\,2\rangle \cup \langle 3\,;\,\infty\rangle$

7.- La solución del sistema :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases} \text{ , es :}$$

A) $\mathbb{R} - \{4\,;\,7\,;\,9\}$ B) $\mathbb{R} - \{-1\,;\,3\}$

C) $\mathbb{R} - [1\,;\,3]$ D) $\mathbb{R} - \langle 4\,;\,7\rangle$

E) $\mathbb{R} - [-1\,;\,3] - \langle 4\,;\,7\rangle$

8.- Si : $|2x - 1| < 5$, es cierto que :

A) $-2 < x < 3$ B) $-4 < x < 6$ C) $-1 < x < 3$

D) $2 < x < 3$ E) $-2 \leq x < 3$

9.- Si : $|x-2|\,(x^2 + x + 1) + 1 > 0$, es cierto que :

A) $x > 2$ B) $x < 2$ C) $x \in \mathbb{R}$

D) $x > -7$ E) x es un número par.

10.- Al resolver :

$$\sqrt[1996]{x-1} + \sqrt[1998]{x-2} + 2 > 0 \text{ , se obtiene :}$$

A) $x > 1$ B) $x \geq 1$ C) $x > 2$

D) $x \geq 2$ E) $x > 3$

11.- La solución de : $|2 - x| + 4 = 3 - |3 + 2x|$, es :

A) 1 B) $\{1\,;\,2\,;\,3\}$ C) $\{3\,;\,4\}$

D) -1 E) ϕ

12.- La solución de la siguiente inecuación :

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} < 0 \text{ , es :}$$

A) $\langle -2\,;\,2\rangle$ B) $[-2\,;\,2]$ C) $\langle 0\,;\,2\rangle$

D) ϕ E) $\langle -\infty\,;\,-2\rangle \cup \langle 2\,;\,\infty\rangle$

13.- Resolver : $\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right| < 1$

A) $\langle -\infty\,;\,-2\rangle$ B) $\langle -\infty\,;\,-3\rangle$ C) $\langle -\infty\,;\,-4\rangle$

D) $\langle -\infty\,;\,-5\rangle$ E) $\langle -\infty\,;\,-6\rangle$

NIVEL B

14.- Si : $(0{,}3)^{x-2} < (0{,}3)^{4-x}$; el menor valor entero de "x" es :

A) 3 B) 6 C) 2

D) 4 E) No existe tal valor

15.- La solución de la ecuación :

$$|6+x| = |x+9| + |x-2| \text{ , es:}$$

A) 1 B) $\{2 ; 3\}$ C) $\{-1 ; 4\}$

D) $\{1/2 ; 2\}$ E) ϕ

16.- Resolver : $|x+2| \geq 3 - 5x$

A) $[0 ; \infty\rangle$ B) $[1/4 ; \infty\rangle$ C) $[1/2 ; \infty\rangle$

D) $[1/3 ; \infty\rangle$ E) $[1/6 ; \infty\rangle$

17.- ¿ En qué intervalo se cumple :

$$2 + \frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1} \quad ?$$

A) $\langle -1 ; 1\rangle$ B) $\langle -\infty ; -1\rangle \cup \langle 1 ; \infty\rangle$

C) $\langle 1 ; 5\rangle$ D) $\langle -1 ; 1\rangle - \{0\}$ E) N.A.

18.- Indicar la suma de todos los valores enteros de "x" que verifican :

$$-\frac{1}{x+8} + \frac{1}{x+1} < 0$$

A) -18 B) -19 C) -21 D) -27 E) -29

19.- ¿Qué condición deberá cumplir "n" para que una de las raíces de la ecuación :

$$x^2 + 2(n+5)x + 20n = 0 ,$$

sea mayor que cuatro ?

A) $n < -2$ B) $n > -2$ C) $n < 2$

D) $n > 2$ E) N.A.

20.- Si $x \in [-2 ; 2]$, halle el mayor número "α" con la propiedad de :

$$\frac{x^2+6x+14}{x^3+27} \geq \alpha$$

A) $\frac{35}{6}$ B) $\frac{30}{19}$ C) $\frac{19}{30}$ D) $\frac{6}{35}$ E) $\frac{3}{35}$

21.- Si : $(0{,}5)^{\frac{3x^2+11x+1}{x^2+1}} < 0{,}03125$; es cierto que :

A) $1 < x < 1{,}5$ B) $2 < x < 4{,}5$ C) $1 \leq x < 1{,}5$

D) $1 < x < 4{,}5$ E) $-1 < x < 1$

22.- Resolver : $\dfrac{x^6+3x^4+3x^2+4}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9} > 0$

A) $x > 3 \vee x < -1$ B) $2 < x < 4$

C) $x < -1 \cup x > 7$ D) $x < 4$

E) $x < -1 \cup -1 < x < 3 \cup x > 3$

23.- Al resolver :

$$\frac{1}{x+3} - \frac{9(x-2)}{x^2+5x+6} < \frac{24}{x^3+6x^2+11x+6}$$

un valor de "x", es :

A) 1 B) 0,8 C) -1,5 D) 3,5 E) -4

24.- ¿ Entre qué límites debe variar el parámetro "α" para que :

$$(\alpha^2 - \alpha - 2)\ x^2 + 2\alpha x + 1 < 0 ,$$

no admita solución para "x" ?

A) $2 < \alpha < \infty$ B) $-\infty < \alpha < -2$ C) $-\infty < \alpha \leq -2$

D) $-2 < \alpha < 2$ E) $-\infty < \alpha \leq 2$

25.- Si $x \in [-6 ; -4]$, el equivalente de :

$$\frac{|8x+94| - |-3x+94|}{x} \text{ , es :}$$

A) $8 + 188x$ B) $5 + 188x$ C) 11

D) 94 E) N.A.

26.- Resolver : $\dfrac{(x-5)^8\ (x+1)^{11}\ (x-2)^5}{(2x^2+x+5)\ (x-3)^7} \geq 0$

A) $[-1 ; 2] \cup \langle 3 ; \infty\rangle$ B) $[-2 ; 3\rangle \cup \langle 3 ; 5\rangle$

C) $[-1 ; 2\rangle \cup \langle 3 ; \infty\rangle$ D) $\langle 3 ; 7\rangle \cup \langle 7 ; \infty\rangle$

E) ϕ

NIVEL C

27.- Resolver : $\sqrt{\sqrt{x+10}-\sqrt{3-x}} > -5$

A) $[-3;2]$ B) $[-7/2;3]$ C) $[-7/2;15/4]$

D) $[-2\sqrt{3};2\sqrt{2}]$ E) $\langle -7/2\,;\,3]$

28.- Si $\{x\,;y\}\subset \mathbb{Z}$, calcular el valor de x. y del sistema :

$$\begin{cases} 5^{x+y-2}-1 > 0 \\ 2^{x-y} > 16 \\ (0{,}2)^{6-x} < (0{,}2)^{x-4} \end{cases}$$

A) 4 B) -4 C) 2 D) - 2 E) 12

29.- El conjunto de enteros que satisfacen :

$$\frac{(2x^2+3)\sqrt{x+3}}{(x-2)(2x+3)(x+2)^2} > \frac{(2x-x^2+3)\sqrt{x+3}}{(2x^2-x-6)(x+2)^2}$$

es :

A) $\mathbb{N}$ B) $\mathbb{N}-\{1\}$ C) $\mathbb{N}-\{1\,;2\}$

D) $\mathbb{N}-\{2\}$ E) $\mathbb{N}\cup\{-1\,;-2\}-\{1\,;2\}$

30.- ¿Cuál es el menor valor de "x" que satisface :

$$\sqrt{x^2-2x-15} \geq 2-x$$

A) 4 B) 6 C) 7 D) 5 E) 8

31.- Hallar el número positivo "M" tal que :

$$\left|\frac{x-3}{x-4}\right| < M \text{ , a partir de } |x|<2$$

A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) $\frac{3}{2}$

32.- Resolver : $\sqrt{x^2+4x} < 5x-1$

A) $\langle -\infty\,;1/2\rangle \cup \langle 1/2\,;\infty\rangle$ B) $\langle 1/2\,;\infty\rangle$

C) $\langle -\infty\,;-4\rangle \cup \langle 1/2\,;\infty\rangle$ D) $\langle -1/2\,;\infty\rangle$

E) $\langle -4\,;1/2\rangle \cup \langle 1/2\,;\infty\rangle$

33.- Resolver : $\left|\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}\right| < 2$

A) $x>1$ B) $x<1$ C) ϕ D) $x>3$ E) $x<7$

34.- Resolver : $\sqrt{2x+6} > x+1$

A) $[-3\,;\sqrt{5}\rangle$ B) $[-3\,;3]$ C) $[-3\,;4]$

D) $\langle -3\,;\sqrt{5}\rangle$ E) ϕ

35.- Resolver la ecuación :

$$\sqrt{x-4a+16} = 2\sqrt{x-2a+4} - \sqrt{x} \text{ ,}$$

e indicar el intervalo al cual debe pertenecer "a" para que la ecuación sea incompatible.

A) $a\geq 8$ B) $a<0$ C) $2<a<4$

D) $2<a<8$ E) $0<a<8$

36.- Resolver : $2<|x^2-x-1|<|x^2+x|$

A) $\left\langle \dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\,;\infty\right\rangle$ B) $\langle 3\,;\infty\rangle$

C) $\left\langle \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\,;\infty\right\rangle$ D) $\langle 1/2\,;\infty\rangle$ E) N.A.

37.- Resolver : $2x+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}-\left|x+\dfrac{1}{x}\right|}+\sqrt{4-x} \leq 0$

A) $\langle -4\,;4\rangle$ B) $\langle -\infty\,;4\rangle$ C) $\langle 2\,;7\rangle$

D) $\langle -\infty\,;0\rangle$ E) ϕ

38.- Resolver : $\dfrac{|3x-x^2|-4}{4-|x|} > -1$

A) $\langle -2\,;2\rangle$ B) $\langle -4\,;2\rangle$ C) $\langle 1\,;3\rangle$

D) $\langle -4\,;0\rangle \cup \langle 1\,;2\rangle$ E) $\langle -4\,;0\rangle \cup \langle 0\,;2\rangle$

39.- ¿A qué intervalo debe pertenecer el parámetro "α" para que la desigualdad :

$$-3 < \frac{x^2-\alpha x+1}{x^2+x+1} < 3$$

se verifique para todo valor real de "x" ?

A) $\langle -\infty\,;0\rangle$ B) $\langle -\infty\,;-1\rangle$ C) $\langle -5\,;1\rangle$

D) $\langle 1\,;5\rangle$ E) $\langle -5\,;-1\rangle$

23 Relaciones y Funciones I

23.1) DEFINICIONES PREVIAS

23.1A PAR ORDENADO

Es un conjunto formado por dos elementos los cuales se disponen en un determinado orden . Si "a" y "b" son los elementos de un par ordenado éste se denota así: $(a\ ;\ b)$, donde al elemento "a" se le llama *primera componente* y al elemento "b" *segunda componente*.

PROPIEDADES DEL PAR ORDENADO

1ra) Dos pares ordenados serán iguales si y solamente si sus respectivos elementos son iguales.

$$\textbf{Si} : (a\ ;\ b) = (c\ ;\ d) \ \Rightarrow\ a = c \wedge b = d$$

2da) Dos pares ordenados serán diferentes si y solamente si sus primeras componentes son diferentes o sus segundas componentes son diferentes.

$$\textbf{Si} : (a\ ;\ b) \neq (c\ ;\ d) \ \Rightarrow\ a \neq c \vee b \neq d$$

Observación.- En general se tendrá $(a\ ;\ b) = (b\ ;\ a)$ si y solamente si $a = b$

Ejemplo.- *Encontrar los valores de* $x \wedge y$ *sabiendo que :* $(2;\ 3x - y) = (x + y\ ;\ -14)$, *indicando como respuesta el valor de :* $x\ .\ y$

<u>Resolución</u>.-

Por condición tenemos : $(2\ ;\ 3x - y) = (x + y\ ;\ -14)$

De acuerdo con la 1ra Propiedad del par ordenado debemos plantear lo siguiente :

$$2 = x + y \ \wedge\ 3x - y = -14$$

Es decir el problema consiste en resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} x + y = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{I}) \\ 3x - y = -14 \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{II}) \end{cases}$$

Efectuando (I) + (II) tenemos : $4x = -12 \ \Rightarrow\ x = -3$ ....(*)

Reemplazando (*) en (I) : $-3 + y = 2 \ \Rightarrow\ y = 5$

Finalmente el valor pedido será : $xy = (-3)\ (5) = \mathbf{-15}$

23.1B PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos no vacíos "A" y "B" se define el producto cartesiano de A por B denotado así: $A \times B$,como el conjunto de pares ordenados cuya primera componente le pertenece al primer conjunto A y la segunda componente le pertenece al conjunto B, es decir

$$\boxed{A \times B = \{(a\,;b)\,/\,a \in A\ \wedge\ b \in B\}}$$

Ejemplo.- *Dados los conjunto* A = {2; 5; 7} ∧ B = {3 ; 4}; *encontrar los conjuntos* A × B ∧ B × A

Resolución.-

a) Recordando que el conjunto A × B se define así : $A \times B = \{(a\,;b)\,/\,a \in A\ \wedge\ b \in B\}$

Esta operación se realiza así : $A \times B = \{2;\,5;\,7\}\,.\,\{3;\,4\}$

De este modo el conjunto es : $\mathbf{A \times B = \{(2;3), (2;4), (5;3), (5;4), (7;3), (7;4)\}}$

b) El conjunto B × A se define así: $B \times A = \{(a\,;b)\,/\,a \in B\ \wedge\ b \in A\}$ es decir :

Luego la operación a realizar es : $B \times A = \{3;\,4\}\,.\,\{2;\,5;\,7\}$

Efectuando, tendremos : $\mathbf{B \times A = \{(3;2), (3;5), (3;7), (4;2), (4;5), (4;7)\}}$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO

1ra) El producto cartesiano de A por B no es conmutativo : $A \times B \neq B \times A$
En particular : $A \times B = B \times A$ si y solamente $A = B$

2da) El número de elementos del producto cartesiano de A . B es igual al producto del número de elementos del conjunto A por el número de elementos del conjunto B, es decir :

$$\boxed{n(A \times B) = n(A)\,.\,n(B)}$$

23.2 RELACIONES

23.2A RELACION BINARIA

Dados dos conjuntos no vacíos "A" y "B", se denomina relación binaria de A en B, a todo subconjunto *R* del producto cartesiano: A × B, es decir :

$$\boxed{R \text{ es una relación de A en B} \iff R \subset A \times B}$$

Si *R* es una relación de A en B, se denota así :

$$R : A \longrightarrow B \ ,\ \text{o}\ ,\ A \xrightarrow{R} B$$

donde al conjunto A se denomina *conjunto de partida* y al conjunto B *conjunto de llegada.*

Ejemplo.- *Dados* : A = {2; 5; 7} y B = {3; 4}, *determinar la relación R* : A $\rightarrow$ B, *definida por*

$$R=\{(x\,;y)\,/\,x\in A \wedge y\in B \wedge x>y\}$$

Resolución.-

Hallemos el producto cartesiano A × B : A × B = {(2 ; 3) , (2 ; 4) , (5 ; 3) , (5 ; 4) , (7 ; 3) , (7 ; 4)}

De este conjunto tomamos los pares $(x\,;y)$, de tal manera que se cumpla que $x>y$:

$$(5\,;3)\,,(5\,;4)\,,(7\,;3)\,,(7\,;4)$$

Finalmente la relación R buscada es : $R = \{\,(5\,;3)\,,(5\,;4)\,,(7\,;3)\,,(7\,;4)\,\}$

Observaciones :

Si R es una relación de A en B , se deberá tener en cuenta lo siguiente :

1) Si el elemento $(x\,;y)$ pertenece a la relación R, la notación a emplear será : $(x\,;y)\in R$,ó, $x\,R\,y$, lo cual significa que : "y está relacionando con x por medio de R"

2) Si el conjunto de partida A es igual al conjunto de llegada B (A = B), se podrá afirmar que R es una relación de A en A ,o que, R es una relación en A ($R\subset A\times A$,ó , $R\subset A^2$)

3) Si el conjunto : A×B ,tiene "n" elementos, entonces el número total de relaciones R de A en B será igual a : 2^n .

23.3 DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION

23.3A DOMINIO DE *R*

Es el conjunto que tiene por elementos a todas las primeras componentes de los pares ordenados pertenecientes a la relación, es decir :

$$Dom\,(R) = \{\,x\,/\,(x\,;y)\in R\}$$

23.3B RANGO DE *R*

Es el conjunto que tiene por elementos a todas las segundas componentes de los pares ordenados pertenecientes a la relación, es decir :

$$Ran\,(R) = \{\,y\,/\,(x\,;y)\in R\}$$

Ejemplo.- *Halle el dominio y el rango de la relación R* : A $\rightarrow$ B , *definida por* ;

$$R=\{(x\,;y)\,/\,x\in A \wedge y\in B \wedge x\leq y\}\ ;\ donde\ :\ A=\{1;2\}\ \text{y}\ B=\{-1;1;4\}$$

Resolución.-

Hallemos el producto cartesiano : A × B = {(1 ; -1) , (1 ; 1) , (1 ; 4) , (2 ; -1) , (2 ; 1) , (2 ; 4)}

Luego la relación R pedida será : $R = \{(1\,;1)\,,(1\,;4)\,,(2\,;4)\,\}$

Finalmente el dominio y el rango de la relación R según las definiciones establecidas serán :

$$Dom\,(R) = \{1\,;2\} \quad\wedge\quad Ran\,(R) = \{1\,;4\}$$

Observación.- Si R es una relación de A en B, es decir $R : A \to B$, se cumplirá que :

$$Dom\,(R) \subset A \;\wedge\; Ran\,(R) \subset B$$

23.4 CLASES DE RELACIONES

Siendo R una relación de A en A (relación en A^2), ésta podrá ser de las siguientes clases:

23.4A RELACION REFLEXIVA

Si la relación R es reflexiva, se deberá cumplir que : $\forall\, x \in A \;\Rightarrow\; (x\,;x) \in R$.

23.4B RELACION SIMETRICA

Si la relación R es simétrica, se deberá cumplir que si : $(x\,;y) \in R \;\Rightarrow\; (y\,;x) \in R$

23.4C RELACION TRANSITIVA

Si la relación R es transitiva, se deberá cumplir que si : $(x\,;y) \in R \wedge (y\,;z) \in R \Rightarrow (x\,;z) \in R$

23.4D RELACION DE EQUIVALENCIA

Una relación R se llama relación de equivalencia si y solamente si es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

Ejemplo.- *Dado el conjunto* $A = \{2; 4; 6\}$ *y la relación* $R : A \to A \;/\; R = \{(2\,;2)\,,(2\,;4)\,,(4\,;4)\,,(6\,;6)\,,(4\,;2)\}$; *se pide averiguar si* R *una relación de equivalencia* .

Resolución.-

Debemos recordar que si R es una relación de equivalencia, deberá ser reflexiva, simétrica y transitiva a la vez; en consecuencia debemos analizar cada una de las clases mencionadas.

Por dato se tiene: $A = \{2; 4; 6\}$, y , $R = \{(2\,;2)\,,(2\,;4)\,,(4\,;4)\,,(6\,;6)\,,(4\,;2)\}$

a) Para determinar si es reflexiva, deberá cumplirse que : $\forall\, x \in A \;\Rightarrow\; (x\,;x) \in R$

De los elementos de A y R , podemos notar que :

$$2 \in A \;\wedge\; (2\,;2) \in R \quad ; \quad 4 \in A \;\wedge\; (4\,;4) \in R \quad ; \quad 6 \in A \;\wedge\; (6\,;6) \in R$$

Luego la relación R es reflexiva

b) Para determinar si es simétrica, deberá cumplirse que : $\forall\, (x\,;y) \in R \;\Rightarrow\; (y\,;x) \in R$

Haciendo una inspección de los 5 elementos de R, podemos notar que :

$$(2\,;2) \in R \;\wedge\; (2\,;2) \in R \quad ; \quad (2\,;4) \in R \;\wedge\; (4\,;2) \in R \quad ; \quad (4\,;4) \in R \;\wedge\; (4\,;4) \in R$$
$$(6\,;6) \in R \;\wedge\; (6\,;6) \in R \quad ; \quad (4\,;2) \in R \;\wedge\; (2\,;4) \in R$$

Luego la relación R es simétrica.

c) Para determinar si es transitiva, deberá cumplirse que : $\forall\, (x\,;y) \in R \wedge (y\,;z) \in R \Rightarrow (x\,;z) \in R$

Debemos notar que : $(2\,;2) \in R \;\wedge\; (2\,;4) \in R \;\Rightarrow\; (2\,;4) \in R$

Asimismo, reconocemos que : $(2;4) \in R \;\wedge\; (4;4) \in R \;\Rightarrow\; (2;4) \in R$

También observamos que : $(2;4) \in R \;\wedge\; (4;2) \in R \;\Rightarrow\; (2;2) \in R$

Del mismo modo observamos que : $(4;4) \in R \;\wedge\; (4;2) \in R \;\Rightarrow\; (4;2) \in R$

Luego la relación R es transitiva.

Finalmente de acuerdo a la teoría, R es una relación, reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

$\therefore \quad R$ es de equivalencia

23.5 RELACIONES DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

Sea R una relación de A en B (R : A $\rightarrow$ B),si A y B son subconjuntos del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se dice que R es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir $R \subset \mathbb{R}^2$

23.5A DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

I) Dominio.- Es el conjunto de valores reales que asume la variable independiente x (primera componente)

II) Rango.- Es el conjunto de valores reales que asume la variable dependiente y (segunda componente)

23.5B CALCULO DEL DOMINIO Y RANGO

Sea R una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida mediante una fórmula (*regla de correspondencia*) donde el dominio no es conocido, entonces para encontrar el **dominio maximal** (dominio máximo) de la relación se deberá despejar la variable , y de la condición dada, el dominio de la relación será el conjunto de valores que puede tomar la variable «x» de tal modo que «y» sea un número real.

Para encontrar el rango se despeja la variable x de la condición dada, el rango de la relación será el conjunto de valores que puede tomar la variable y de tal modo que x sea un número real.

Ejemplo.- *Dada la relación :* $R = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}\,.\,\mathbb{R} \,/\, xy - 2y = 1\}$, *encontrar : Dom* ($R$) y *Ran* ($R$).

<u>Resolución</u>.-

Para hallar el dominio de la relación : *Dom* (R), despejaremos y de la fórmula que define a la relación dada . Veamos :

Despejando, se tendrá : $xy - 2y = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x-2) = 1$

Es decir : $y = \dfrac{1}{x-2}$

Teniendo en cuenta que y es un número real, deberá cumplirse que : $x - 2 \neq 0$. En consecuencia : $x \neq 2$.

$$\therefore \quad Dom\,(R) = x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Ahora hallaremos el rango de la relación *Ran* (*R*) a partir de la condición dada . Veamos :

Despejando x, tendremos : $xy - 2y = 1$

Transponiendo términos : $xy = 2y + 1$

Esto significa que : $x = \frac{2y+1}{y}$

Teniendo en cuenta que x es un número real , deberá cumplirse que : $y \neq 0$. Luego :

$$Ran\,(R) = y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

23.6 GRAFICA DE UNA RELACION DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

La gráfica de una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen dicha relación. Una relación puede tener la forma de una ecuación: $F(x\,;y) = 0$; ó de alguna inecuación : $F(x\,;y) < 0$; $F(x\,;y) \leq 0$; $F(x\,;y) > 0$; $F(x\,;y) \geq 0$.

Se debe tener en cuenta que las relaciones de la forma : $F(x\,;y) = 0$, representan gráficas de alguna recta o curva ; mientras que las relaciones definidas por alguna inecuación representan gráficas de planos o semiplanos.

23.6A CRITERIOS PARA GRAFICAR UNA RELACION

Para efectuar la gráfica de una relación R definida por la condición : $F(x\,;y) = 0$, debemos ejecutar los siguientes pasos :

1^er^) Encontrar el dominio de la relación y de ser posible el rango. El producto cartesiano de estos dos conjuntos determinará la extensión de la curva.

2^do^) Encontrar las intersecciones con los ejes coordenados.

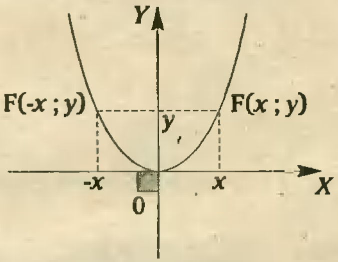
* Para encontrar la intersección de la curva con el eje X, se hace $y = 0$ en la condición dada y se resuelve la ecuación resultante para x . Los puntos de intersección de la curva con el eje X son de la forma : $(x\,;0)$
* Para encontrar la intersección de la curva con el eje Y se hace $x = 0$, en la condición y se resuelve la ecuación resultante para y . Los puntos de intersección de la curva con el eje Y son de la forma $(0\,;y)$

3^er^) Encontrar la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen.

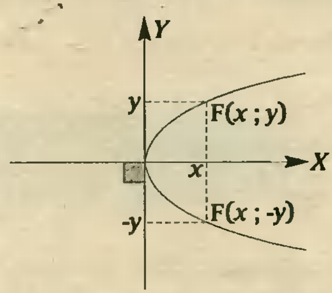
* La simetría con respecto al eje X se presenta al sustituir «y» por «$-y$» en la condición dada : $F(x\,;y) = 0$, verificándose que ésta no varía. De variar la condición, se dice que no existe simetría con respecto al eje X.
* La simetría con respecto al eje Y se presenta al sustituir «x» por «$-x$» en la condición dada : $F(x\,;y) = 0$, verificándose que ésta no varía. De variar la condición se dice que no existe simetría con respecto al eje Y .
* La simetría con respecto al origen de coordenadas, se presenta al sustituir «y» por «$-y$» $\wedge$ «x» por «$-x$» en la condición dada $F(x\,;y) = 0$, verficándose que ésta no varía. De variar la condición se dice que no existe simetría con respecto al origen.

Observación.- *Si una curva es simétrica con respecto a uno de los ejes* X $\vee$ Y, *dicho eje se comporta como si fuese un espejo para la curva.*

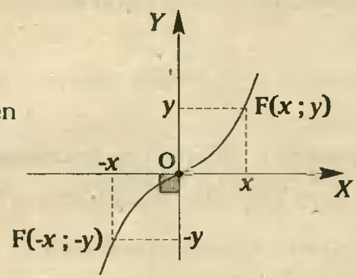
Simetría con respecto al eje Y



Simetría con respecto al eje X



Simetría con respecto al origen de coordenadas



4to) Encontrar -si existen- las asíntotas de la curva . Llamaremos asíntota de una curva a la recta $\mathcal{L}$ tangente a la curva cuando x crece ilimitadamente ,o ,cuando x se aproxima a un valor determinado .

* *Asíntotas Verticales*.- Se obtienen cuando de la condición $F(x ; y) = 0$, se despeja la variable «y» , es decir se consigue : $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; y se resuelve la ecuación : $Q(x) = 0$.

Las asíntotas verticales serán de la forma : $x = x_0$

* *Asíntotas Horizontales* .- Se obtienen cuando de la condición $F(x ; y) = 0$, se despeja la variable «x», es decir se consigue : $x = \dfrac{M(y)}{N(y)}$, y se resuelve la ecuación : $N(y) = 0$.

Las asíntotas verticales serán de la forma : $y = y_0$

5to) Luego de haber ejecutado todos los pasos anteriores se procede a construir la gráfica de la relación, considerando unos cuantos puntos que deben satisfacer la condición $F(x ; y) = 0$

Ejemplo.- *Graficar la relación R definida por :* $R = \{(x ; y) \in \mathbb{R} . \mathbb{R} / xy - x - y = 0\}$

Resolución.-

La condición dada es : $xy - x - y = 0$, la cual se podrá expresar así : $F(x ; y) = 0$, donde :

$$F(x ; y) = xy - x - y$$

I) Hallemos el dominio y rango de la relación R

* Para el dominio : $xy - x - y = 0 \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x \neq 1$

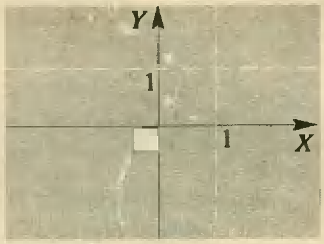
De aqui podemos concluir que : $Dom\ (R) = x \in \mathbb{R} - \{1\}$

* Para el rango : $xy - x - y = 0 \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1} \Rightarrow y \neq 1$

De aqui podemos concluir que : $Ran\ (R) = y \in \mathbb{R} - \{1\}$

Entonces la curva : $Dom\ (R)\ .\ Ran\ (R) = (\mathbb{R} - \{1\})\ .\ (\mathbb{R} - \{1\})$, viene dada por el gráfico adjunto .

El producto cartesiano : $Dom\ (R)\ .\ Ran\ (R)$ es todo el plano $\mathbb{R}^2$ excepto las rectas : $x = 1 \wedge y = 1$; en consecuencia la gráfica de la relación se extiende por todo el plano $\mathbb{R}^2$ excepto las rectas : $x = 1 \wedge y = 1$



II) Hallemos las intersecciones de la curva con los ejes coordenados :

* Con el eje X .- Para esto hacemos $y = 0$ en la condición dada:

$$xy - x - y = 0 \Rightarrow x\,(0) - x - (0) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego el punto de intersección de la curva con el eje x es : $(0\ ;\ 0)$

* Con el eje Y.- Para esto hacemos $x = 0$ en la condición dada :

$$xy - x - y = 0 \Rightarrow (0)\,y - (0) - y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Luego el punto de intersección de la curva con el eje y es : $(0\ ;\ 0)$

III) Análisis de la Simetría .-

La condición dada es : $F(x\ ;y) = xy - x - y = 0$ .... (*)

* Si existe simetría respecto al eje X , deberá cumplirse que: $F\,(x\ ;y) = F\,(x\ ;-y)$

Sustituyendo y por $-y$ en (*) : $F(x\ ;-y) = x\,(-y) - x - (-y) \Rightarrow F(x\ ;-y) = -xy - x + y$

Comprobamos que $F(x\ ;y) \neq F(x\ ;-y)$, por lo tanto no exist simetría con respecto al eje X.

* Si existe simetría respecto al eje Y , deberá cumplirse que: $F\,(x\ ;y) = F\,(-x\ ;\ y)$

Sustituyendo x por $-x$ en (*) : $F(-x\ ;y) = (-x)\,y - (-x) - y \Rightarrow F(-x\ ;y) = -xy + x - y$

Comprobamos que $F(x\ ;y) \neq F(-x\ ;y)$, por lo tanto no existe simetría con respecto al eje Y.

* Si existe simetría respecto al origen de coordenadas, se cumplirá que: $F\,(x\ ;y) = F\,(-x\ ;\ y)$

Sustituyendo x por $-x \wedge -y$ por y en (*) : $F(-x\ ;y) = (-x)\,(-y) - (-x) - (-y)$

Efectuando, se tendrá : $F(-x\ ;y) = xy + x + y$

A partir de estos resultados, podemos afirmar que : $F\,(x\ ;y) \neq F\,(-x\ ;-y)$, por lo tanto no existe simetría con respecto al origen de coordenadas.

IV) Búsqueda de las asíntotas .-

La asíntota vertical la obtendremos de la condición dada : $xy - x - y = 0$

Despejando y se obtiene : $y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x - 1 = 0$

De esta última relación se consigue : $x = 1$

Luego $x = 1$, es una asíntota vertical : $x = 1$ // al eje y

La asíntota horizontal se obtendrá de la condición dada: $xy - x - y = 0$

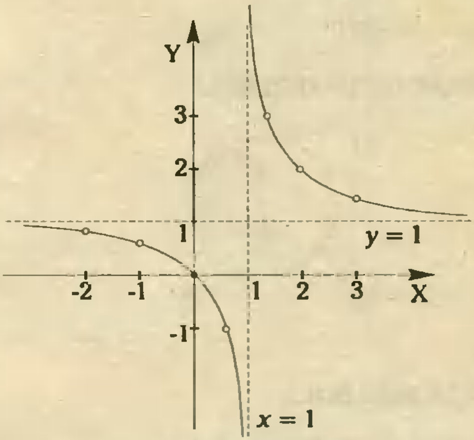
Despejando y se obtiene : $x = \frac{y}{y-1} \Rightarrow y - 1 = 0$

De aquí se consigue : $y = 1$

Luego $y = 1$ es una asíntota vertical : $y = 1$ // al eje x

V) Finalmente construimos la gráfica.

x	$y = \frac{x}{x-1}$
-2	2/3
-1	1/2
0	0
2	2
1/2	-1
3	3/2
3/2	3



23.6B CRITERIO PRACTICO PARA GRAFICAR RELACIONES DEFINIDAS POR INECUACIONES (Zonas Sombreadas)

Dada alguna relación de la forma :

$$F(x\,;y) < 0 \quad ; \quad F(x\,;y) \leq 0 \quad ; \quad F(x\,;y) > 0 \quad ; \quad F(x\,;y) \geq 0$$

Su gráfica corresponde ser una región sombreada, la misma que será obtenida los siguientes pasos :

I) Expresar la inecuación dada, según la siguiente desigualdad :

a) $y >$ (expresión en x)

b) $y <$ (expresión en x)

La gráfica de la región estará limitada por el borde una curva determinada por la ecuación : $y =$ (expresión en x)

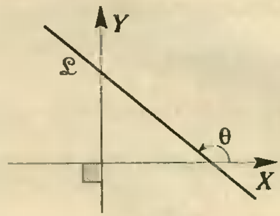
II) Reconocimiento de las zonas a sombrear

a) Para la inecuación : $y >$ (expresión en x), la zona sombreada resulta ser la parte del plano limitada inferiormente por el borde de la curva determinada por la ecuación : $y =$ (expresión en x), sin incluir el borde.

b) Para la inecuación : $y <$ (expresión en x), la zona sombreada resulta ser la parte del plano limitada superiormente por el borde de la curva determinada por la ecuación : $y =$ (expresión en x), sin incluir el borde.

Observación.- *Si en* (a) o *en* (b) *se sustituyen el signo de relación simple por su respectivo signo doble* ($>$ *por* $\geq$, o , $<$ *por* $\leq$) , *en la gráfica de la región se deberá incluir el borde.*

23.7A LA RECTA

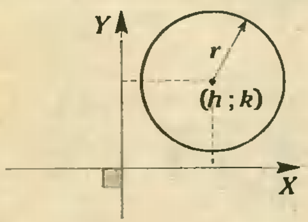


Ecuación general $\mathcal{L}$: $\mathbf{Ax + By + C = 0}$

$m = \operatorname{tg}\theta = -\dfrac{\text{A}}{\text{B}}$

m = pendiente de la recta $\mathcal{L}$

23.7B LA CIRCUNFERENCIA



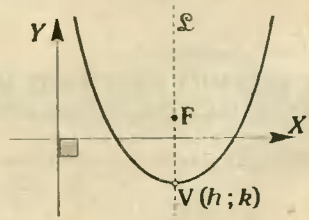
Ecuación general :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Centro : $(h\,;k)$

Radio : r

23.7C LA PARABOLA



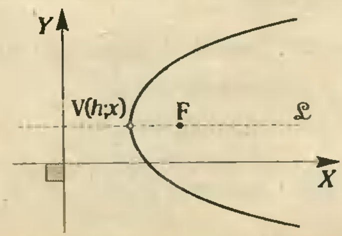
I) Eje focal $\mathcal{L}$ paralelo al eje y :

Ecuación general : $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

V = vértice $\wedge$ F = foco

Si : $p > 0$, la curva se abre hacia arriba ,

Si : $p < 0$, la curva se abre hacia abajo.



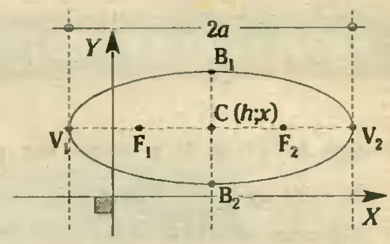
II) Eje focal $\mathcal{L}$ paralelo al eje x :

Ecuación general : $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Si : $p > 0$, la curva se abre hacia la derecha

Si : $p < 0$, la curva se abre hacia la izquierda

23.7C ELIPSE

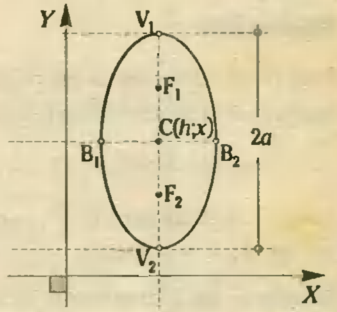


$V_1 \wedge V_2$= vértices ; $F_1 \wedge F_2$= focos ; Centro :$(h\ ;k)$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{V_1V_2} = 2a \text{ (eje mayor)} \\ \overline{B_1B_2} = 2b \text{ (eje menor)} \\ \overline{F_1F_2} = 2c \text{ (eje focal)} \end{array}\right\} \text{donde : } a^2 = b^2 + c^2$$

Si el eje mayor es paraleloal eje X, la Ecuación General es :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

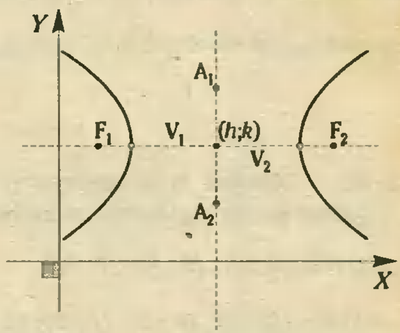


Cuando el eje mayor es paraleloal eje Y, la Ecuación General es :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Observación.- *Notar que si el eje mayor es paralelo al eje X entonces el número «a» se coloca debajo de «x», pero si el eje mayor es paralelo a Y, entonces el número «a» se coloca debajo de «y».*

23.7E LA HIPERBOLA

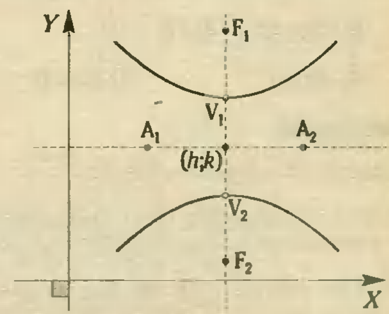


$V_1 \wedge V_2$= vértices ; $F_1 \wedge F_2$= focos ; $(h\ ;k)$ = centro

$$\left.\begin{array}{l} \overline{V_1V_2} = 2a \text{ (eje transverso)} \\ \overline{A_1A_2} = 2b \text{ (eje conjugado)} \\ \overline{F_1F_2} = 2c \text{ (distancia focal)} \end{array}\right\} \text{donde : } c^2 = a^2 + b^2$$

Si el eje conjugado es paralelo al eje Y, la Ecuación General es :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Si el eje conjugado es paralelo al eje X, la Ecuación General es :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Observación.- *Notar que si el eje focal es paralelo al eje X, entonces el signo + afecta al término donde se encuentra «x», pero si el eje focal es paralelo al eje Y entonces el signo (+) afecta al término donde se encuentra «y».*

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Sea $A = \{1; 2; 3\}$, y dadas las relaciones R_1 y R_2 en A, definidas así:

$R_1 = \{(x ; y) \in A . A / x < y\}$ $\wedge$ $R_2 = \{(x ; y) \in A . A / x + y = 5\}$

Calcular el número de elementos del conjunto $R_1 \cup R_2$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

Resolución.-

Para poder determinar las relaciones R_1 y R_2 debemos encontrar el producto cartesiano : A × A. Veamos : $A \times A = \{1, 2, 3\} . \{1, 2, 3\}$

$$\Rightarrow A . A = \{(1 ; 1), (1 ; 2), (1 ; 3), (2 ; 1), (2 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 1), (3 ; 2), (3 ; 3)\}$$

Luego los elementos de R_1, son todos aquellos $(x ; y)$, en donde $x < y$, luego : $R_1 = \{(1 ; 2), (1 ; 3), (2 ; 3)\}$

Asimismo, los elementos de R_2 son todos aquellos $(x ; y)$, en donde : $x + y = 5$; luego : $R_2 = \{(2 ; 3), (3 ; 2)\}$

Finalmente el conjunto : $R_1 \cup R_2$ viene a ser : $R_1 \cup R_2 = \{(1 ; 2), (1 ; 3), (2 ; 3), (2 ; 3), (3; 2)\}$

Simplificando los elementos, nos queda : $R_1 \cup R_2 = \{(1 ; 2), (1 ; 3), (2 ; 3), (3 ; 2)\}$

$$\therefore \quad n(R_1 \cup R_2) = 4 \qquad \textbf{RPTA. B}$$

2.- Si : $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es impar} \wedge 3 < x < 11\}$ $\wedge$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x^3 \leq 100 \vee x = 12\}$

¿Cuál de las siguientes relaciones están definidas de A en B ?

I) $R = \{(9 ; 2), (5 ; 4), (7 ; 3)\}$

II) $R = \{(3 ; 1), (5 ; 2), (7 ; 3), (9 ; 4)\}$

III) $R = \{(5 ; 12), (7 ; 4)\}$

A) solo I B) solo II C) solo III D) I $\wedge$ III E) I $\wedge$ II

Resolución.-

Analizando cuidadosamente a cada relación se tendrá:

I) *R* si está definida de A en B ,pues las primeras componentes de sus pares ordenados le pertenecen al conjunto A y las segundas componentes al conjuntos B.

II) *R* no está definida de A en B ,pues 3 no es elemento del conjunto A en consecuencia el elemento (3 ; 1) no le pertenece al producto cartesiano A × B

III) R si está definida de A en B pues los primeras componentes de sus pares ordenados le pertenecen al conjunto A , y las segundas componentes al conjunto B.

$\therefore$ Son relaciones definidas de A en B : **I $\wedge$ III** **RPTA. D**

3.- Dados los conjuntos $A = \{2, 5, 7\}$ y $B = \{3 ; 4\}$; hallar la suma de los elementos del dominio de la relación $R : A \to B$ definida por: $R = \{(x ; y) \in A \times B / x + y > 8\}$

A) 8 *B) 19* *C) 10* *D) 11* *E) 12*

Resolución.-

Para determinar la relación R será necesario encontrar el producto cartesiano : A . B ; veamos : $A \times B = \{2; 5 ; 7\} . \{3; 4\}$

Efectuando, encontramos que : $A \times B = \{(2 ; 3) , (2 ; 4) , (5 ; 3) , (5 ; 4) , (7 ; 3) , (7 ; 4)\}$

Luego la relación R tiene por elementos $(x ; y)$, a aquellos donde : $x + y > 8$, luego : $R = \{(5 ; 4) , (7 ; 3) , (7 ; 4)\}$

De acuerdo a lo expuesto en el item 23.3 el dominio de la relación R, viene dado por : $Dom\ (R) = \{5; 7; 7\} = \{5 ; 7\}$

Finalmente el valor pedido será : Σ elementos = $5 + 7 =$ **12** **RPTA. E**

4.- Dados los conjuntos : $A = \{x \in \mathbb{Z} / -12 < x + 6 < 20\} \wedge B = \{x \in \mathbb{Z} / 10 < x^2 \leq 400\}$ ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A . B?

A) 1 054 *B) 154* *C) 1 050* *D) 1 250* *E) 4 055*

Resolución.-

Debemos tener en cuenta que el número de elementos de A × B : n (A × B) ,vista en la propiedad (II) del item 23.1B viene dado así :

$$n\ (A \times B) = n\ (A) . n\ (B) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

a) Cálculo de n(A).- Del dato se sabe que : $A = \{ x \in \mathbb{Z} / -12 < x + 6 < 20 \}$

De la condición podemos reconocer que el número de elementos del conjunto A será numéricamente igual a la cantidad de valores enteros que podrá asumir la variable x a fin de satisfacer dicha condición. Veamos :

De acuerdo con la condición se sabe que : $-12 < x + 6 < 20$

Restando 6 a todos los miembros, se consigue : $-18 < x < 14$

Luego los valores que asume x serán : $x = \{ -17; -16; -15 \ldots\ldots; 0; \ldots\ldots 11, 12; 13 \}$

El conteo nos conduce a : n (A) = 31 valores .... (2)

b) Cálculo de n(B) .- Del dato se sabe que : B = $\{x \in \mathbb{Z} / 10 < x^2 \leq 400\}$

Al igual que en el caso anterior, será necesario encontrar la cantidad de valores enteros que asume la variable x a fin de satisfacer la condición dada. Veamos :

De acuerdo con la condición se tiene : $10 < x^2 \leq 400$

Extrayendo raíz cuadrada, a todos los miembros, tendremos que : $x = \underbrace{-20;\ -19;\ -18;\ \dots\ -4}_{17 \text{ valores negativos}}\ ;\ \underbrace{4;\dots;\ 18;\ 19;\ 20}_{17 \text{ valores positivos}}$

Esto significa que : $n(A) = 17 + 17 = 34$ .... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se consigue : $n(A \times B) = 31 \cdot 34 =$ **1 054** **RPTA. A**

5.- Dado el conjunto A = { 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} y las relaciones de A en A : R_1 ; $R_2 \wedge R_3$

$R_1 = \{(3;7), (7;2), (6;6), (2;1), (7;7)\}$ .... (I)

$R_2 = \{(x;y) \in A . A / x^2 + y^2 \leq 25\}$ .... (II)

$R_3 = \{(x;y) \in A . A / y$ es un factor de $x\}$ .... (III)

¿Cuál (o cuáles) son relaciones refexivas ?

A) solo I B) solo II C) solo III D) I $\wedge$ II E) Todas

Resolución.-

De acuerdo a lo expuesto en el item 23.4A ,una relación R será reflexiva si : $\forall x \in A \Rightarrow (x;x) \in R$. A continuación analizaremos cuidadosamente cada relación dada ; veamos :

R_1 : No es reflexiva, pues para que lo sea , faltan los elementos : (1 ; 1) , (2 ; 2) , (3 ; 3) , (4 ; 4) $\wedge$ (5 ; 5)

R_2 : No es reflexiva ,pues si examinamos a cada elemento $(x ; y)$, podemos observar que sus componentes deberán verificar que : $x^2 + y^2 \leq 25$ y como $4 \in A \rightarrow (4;4)$ debería pertenecer a la relación; pero al sustituir dicha condición se obtendrá : $32 \leq 25$, lo cual es absurdo (lo mismo sucede con los elementos 5 ; 6 $\wedge$ 7)

R_3 : Si es reflexiva al efectuar el producto cartesiano A . A y elegir convenientemente a los elementos de la relación R_3, se obtiene:

$$R_3 = \{(1;1), (2;1), (2;2), (3;1), (3;3), (4;1), (4;2), (4;4), (5;1), (5;5), (6;1), (6;2), (6;3), (6;6), (7;1), (7;7)\}$$

De aquí, se puede observar que :

$1 \in A \Rightarrow (1;1) \in R_3$; $2 \in A \Rightarrow (2;2) \in R_3$; $3 \in A \Rightarrow (3;3) \in R_3$

$4 \in A \Rightarrow (4;4) \in R_3$; $5 \in A \Rightarrow (5;5) \in R_3$; $6 \in A \Rightarrow (6;6) \in R_3$

$7 \in A \Rightarrow (7;7) \in R_3$

$\therefore$ Finalmente solo R_3 es reflexiva **RPTA. C**

6.- Se definen las siguientes relaciones en $\mathbb{Z}$: $R_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, (xy)^2$ ***es par***$\}$ $\wedge$

$R_2 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, x + y^2 = y + x^2\}$ $\wedge$ $R_3 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, x \leq y\}$

Marcar verdadero (V) o falso (F) según convenga

I) R_1 es reflexiva .... ( )

II) R_2 es simétrica .... ( )

III) R_3 es transitiva .... ( )

A) FFV ***B) VVV*** ***C) FVF*** ***D) FVV*** ***E) VVF***

Resolución.-

Analizando cada proposición por separado, tendremos :

I) R_1 no es reflexiva .- Por dato se sabe que : $R_1 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, (xy)^2$ es par$\}$

Elijamos : $3 \in \mathbb{Z}$, luego de acuerdo con lo expuesto en el item 23.4A, si R_1 es reflexiva $(3\,;3)$ deberá pertenecer a R_1. Por condición los elementos de R_1 son los pares $(x\,;y)$ donde $x \in \mathbb{Z}$ $\wedge$ $y \in \mathbb{Z}$, de tal modo que $(xy)^2$ es par. Debemos notar que para el valor elegido : $x = 3$; se tiene que : $(3\,;3) \notin R_1$, pues $(3.3)^2 = (9)^2 = 81$: ¡ No es par !

$\therefore$ R_1 no es reflexiva .... (F)

II) R_2 si es simétrica .- Por dato se sabe que : $R_2 = \{(x\,;y) \in Z \times Z \,/\, x + y^2 = y + x^2\}$

De acuerdo a lo expuesto en el item 23.4B debemos recordar que si R_2 es simétrica , se deberá cumplir que: $(x\,;y) \in R_2 \;\Rightarrow\; (y\,;x) \in R_2$. Veamos :

De la condición se sabe que : $x + y^2 = y + x^2 \;\Rightarrow\; (x\,;y) \in R_2$

Luego, al intercambiar las variables, se tendrá : $y + x^2 = x + y^2 \;\Rightarrow\; (y\,;x) \in R_2$

$\therefore$ R_2 si simétrica .... (V)

III) R_3 si es transitiva .- Por dato : $R_3 = \{(x\,;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, x \leq y\}$

De acuerdo con lo expuesto en el item 23.4C recordamos que si R_3 es transitiva ,deberá cumplirse que : $(x\,;y) \in R_3 \;\wedge\; (y\,;z) \in R_3 \;\Rightarrow\; (x\,;z) \in R_3$. Veamos :

Consideremos los siguientes paraes ordenados: $(x\,;y) \in R_3 \;\wedge\; (y\,;z) \in R_3 \;\Rightarrow\; (x\,;z) \in R_3$

Luego estos elementos, deberán satisfacer la condición dada : $x \leq y \;\wedge\; y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z$ ¡ correcto !

$\therefore$ R_3 si es transitiva .... (V) **RPTA. D**

7.- Dada la relación $R = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2y - 4y - 8 = 0\}$; hallar : Dom (R) - Ran (R)

A) $\langle -2\,;1\rangle$ ***B)*** $\langle -2\,;1]$ ***C)*** $[-2\,;0\rangle$ ***D)*** $[-2\,;0]$ ***E)*** $\langle -2\,;0]$

Resolución.-

a) Cálculo de *Dom* (*R*) .- Por condición se sabe que : $x^2y - 4y - 8 = 0$

De acuerdo a lo expuesto en el item 23.5B , despejamos : $y = \dfrac{8}{x^2-4}$

De donde se debe cumplir que : $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$

De esta última relación , logramos establecer que : $Dom\,(R) = x \in \mathbb{R} - \{-2\,;\,2\}$

b) Cálculo de *Dom* (*R*) .- Por condición se sabe que : $x^2y - 4y - 8 = 0$

De acuerdo a lo expuesto en el item 23.5B , despejamos : $x^2 = \dfrac{4y+8}{y}$

Reconociendo que : $x^2 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,se plantea : $\dfrac{4y+8}{y} \geq 0$

Al resolver esta inecuación, se obtiene : $y \in \langle -\infty\,;\, -2] \cup \langle 0\,;\,\infty\rangle$

De este resultasdo ,concluímos que : $Ran\,(R) = y \in \langle -\infty\,;\, -2] \cup \langle 0\,;\,\infty\rangle$

Finalmente : $Dom\,(R) - Ran\,(R) = (\mathbb{R} - \{-2\,;\,2\}) - (\langle -\infty\,;\, -2] \cup \langle 0\,;\,\infty\rangle)$

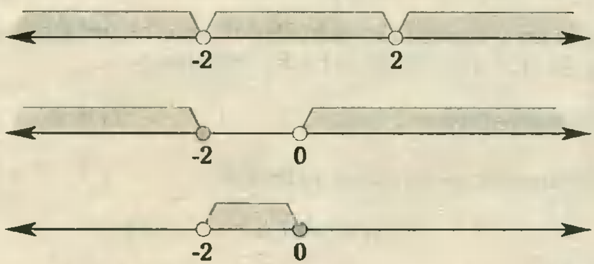
$\therefore \quad Dom\,(R) - Ran\,(R) = \ \mathbf{\langle -2\,;\,0]}$

Gráficamente :

Dom (*R*) :

Ran (*R*) :

Dom (*R*) - *Ran* (*R*) :



RPTA. E

8.- Graficar la relación R definida por : ***R = {(1 ; -1) , (2 ; 1) , (-1 ; 1) , (- 2 ; 2)}***

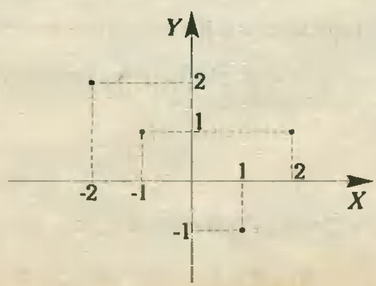
Resolución.-

Para graficar la relación dada debemos notar que:

1) *Dom* (*R*) = {-2; -1; 1; 2} "Se ubica en eje *x*"

2) *Ran* (*R*) = {-1; 1; 2} "Se ubica en eje *y*"

Finalmente la gráfica será :



4 puntos en el plano *x y* **RPTA.**

9.- Graficar la relación R definida por : $R = \{(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}\ .\ \mathbb{R}\ /\ x - 2y - 3 = 0\}$

Resolución.-

La regla de correspondencia de la relación R está dada por : $x - 2y - 3 = 0$, que es nuestra conocida Ecuación de la Recta expuesta en el item 23.7A. Por tal razón hallaremos las intersecciones con los ejes coordenados :

a) Con el eje x .- Hacemos $y = 0$ en la condición : $x - 2(0) - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

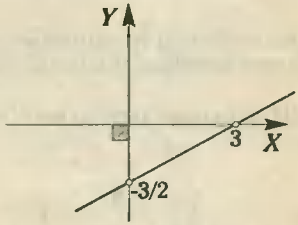
Luego el punto de intersección será : $(3\ ;\ 0)$:

b) Con el eje y .- Hacemos $x = 0$ en la condición :

$0 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = -3/2$

Luego el punto de intersección será : $(0\ ;\ -3/2)$.

Finalmente la gráfica de la relación R será :



Notar que : $Dom\ (R) = \mathbb{R} \wedge Ran\ (R) = \mathbb{R}$

10.- Halle el dominio, rango y la gráfica de la siguiente relación :

$$R = \{\ (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}.\mathbb{R}\ /\ |x + 2| \leq 3\ ;\ |y - 2| < 4\}$$

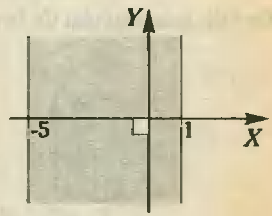
Resolución.-

a) Para el dominio Dom (R), se resuelve : $|x + 2| \leq 3$

Cuya inecuación equivalente es : $-3 \leq x + 2 \leq 3$

Restando 2 , obtenemos : $-5 \leq x \leq 1$

La gráfica de este resultado se muestra al lado:



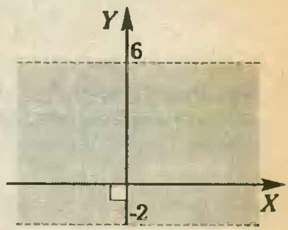
Los valores de x (*dominio*) se encuentran en la zona sombreada incluyendo las rectas : $x = -5 \wedge x = 1$.

b) Para el rango Ran (R), se resuelve : $|y - 2| < 4$

Cuya inecuación es equivalente a : $-4 < y - 2 < 4$

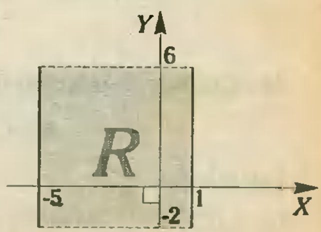
Sumando 2 obtenemos : $-2 < y < 6$

La gráfica de este resultado se muestra al lado:



Los valores de y (*rango*) se encuentran en la zona sombreada sin incluir las rectas $y = -2 \wedge y = 6$

Finalmente la gráfica de la relación R se obtiene intersectando las dos anteriores :



De este gráfico puede notarse que :

$Dom\ (R) = x \in [-5\ ;\ 1] \wedge Ran\ (R)\ y \in \langle -2\ ;\ 6\rangle$

11.- Graficar la relación R definida por : $R = \{(x\,;\,y) \in \mathbb{R}\,.\,\mathbb{R} \,/\, |x^2 - y| \leq 1\}$

<u>**Resolución**</u>.-

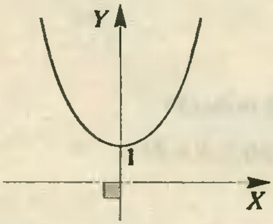
A partir de la condición dada , se establece que : $-1 \leq x^2 - y \leq 1$

Esta desigualdad nos conduce a dos inecuaciones : $-1 \leq x^2 - y \quad \wedge \quad x^2 - y \leq 1$

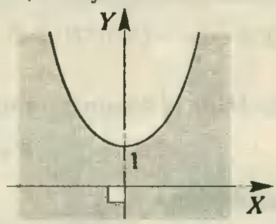
Resolviendo por separado , tendremos : $\underbrace{y \leq x^2 + 1}_{(I)} \quad \wedge \quad \underbrace{y \geq x^2 - 1}_{(II)}$

De acuerdo con lo expuesto en el item 23.7C debemos reconocer que (I) y (II) determinan regiones limitadas por parábolas en el plano XY.

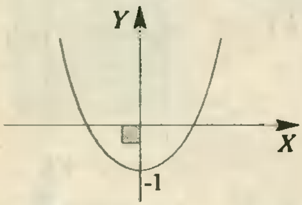
De (I), la ecuación de la parábola es : $x^2 = y - 1$



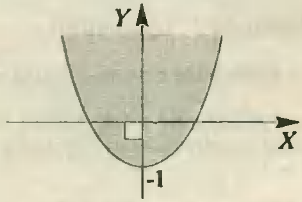
Según el item 23.6B la zona sombreada será la región ubicada debajo de la parábola, incluyéndola.



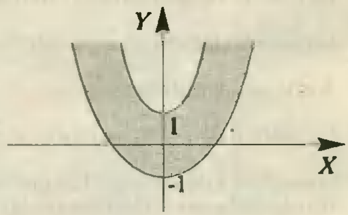
De (II), la ecuación de la parábola es : $x^2 = y - 1$



Según el item 23.6B la zona sombreada será la región ubicada encima de la parábola, incluyéndola.



Finalmente la gráfica de la relación R viene dada por la intersección de las gráficas anteriores.



12.- Graficar la relación R definida por :

$$R = \{\, (x\,;\,y) \in \mathbb{R}\,.\,\mathbb{R} \,/\, x > 0 \;\wedge\; xy > 9 \;\;;\;\; x + y < 10 \,\}$$

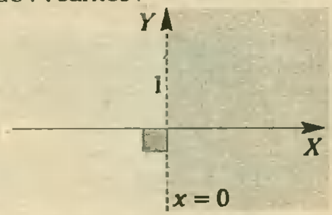
<u>**Resolución**</u>.-

La gráfica buscada de la relación R viene dada por la intersección de las gráficas de las inecuaciones dadas en la condición.

$$\text{I})\, x > 0 \quad ; \quad \text{II})\, xy > 9 \quad ; \quad \text{III})\, x + y < 10$$

A continuación graficaremos cada inecuación por separado . Veamos :

I) $x > 0$. Esta desigualdad se interpreta así : La gráfica final deberá encontrarse enla región que se inicia en $x=0$, hacia la drecha del eje de ordenadas .

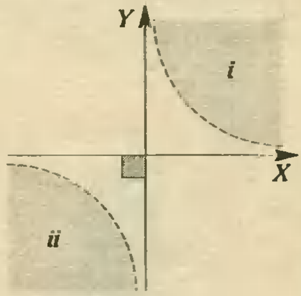


II) $xy > 9$. Esta desigualdad se analiza así :

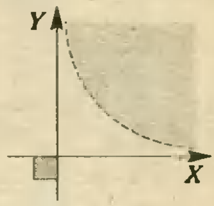
Si : $x > 0 \;\Rightarrow\; y > \dfrac{9}{x}$ .... (i)

Si : $x < 0 \;\Rightarrow\; y < \dfrac{9}{x}$ .... (ii)

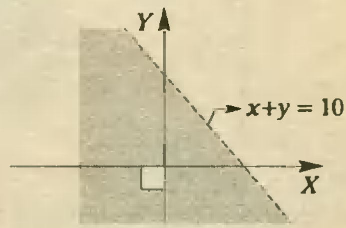
La gráfica de : $xy > 9$ viene dada por : (i) y (ii), la que se constituye en dos regiones ubicadas una por encima de una hipérbola y la otra debajo de la hipérbola simétrica, pero sin contenerlas.



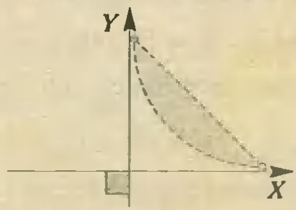
Observación.- Con estos dos resultados podemos intersectar las regiones obtenidas tal como hacíamos antes al intersectar intervalos . De este modo la región resultante sería :



III) $x + y < 10$. Esta desigualdad corresponde a una región ubicada por debajo de la recta definida por $x + y = 10$,pero sin contenerla. Esto significa que toda solución obtenida deberá encontrarse en esta región también .



Finalmente la gráfica de la relación R dada,será la que se obtenga intersectando las dos últimas regiones , es decir la solución de las desigualdades dadas se ubicarán simultáneamente encima de la hipébola y a su vez , por debajo de la recta :



23.8 FUNCIONES

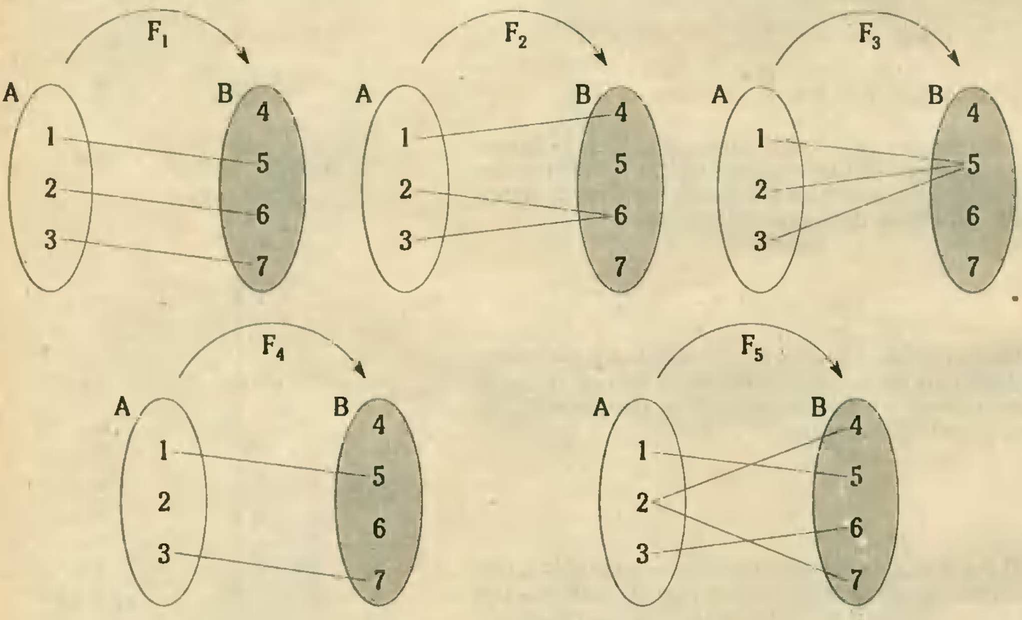
23.8A DEFINICION

Dados dos conjuntos no vacíos "A" y "B" y una relación $F \subset A \times B$,se define : «F es una función de A en B si y solamente si para cada $x \in A$ existe a lo más un elemento $y \in B$,tal que el par ordenado $(x ; y) \in F$» . Esto significa que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Si F es una función tal que : $(x ; y) \in F \;\wedge\; (x ; z) \in F \;\Rightarrow\; y = z$

De acuerdo a la definición analicemos los siguientes diagramas sagitales , donde :

A = Conjunto de partida $\wedge$ B = Conjunto de llegada.



a) Para F_1 : $F_1 = \{(1 ; 5) , (2 ; 6) , (3 ; 7)\}$

Observa que no es necesario que $4 \in B$ sea la segunda componente de algún par ordenado $(x ; y) \in F_1$.Por lo tanto : F_1 = es función

b) Para F_2 : $F_2 = \{(1 ; 4) , (2 ; 6) , (3 ; 6)\}$

Esta relación si cumple con la definición de función.Por lo tanto : F_2 = es función

c) Para F_3 : $F_3 = \{(1 ; 5) , (2 ; 5) , (3 ; 5)\}$

Esta relación también está de acuerdo con la definiciónde función, luego :F_3 = es función

d) Para F_4 : $F_4 = \{(1;5), (3;7)\}$

Aún cuando el elemento $2 \in A$ no tiene correspondiente en B, F_4 si es una función.

e) Para F_5 : $F_5 = \{(1;5), \underbrace{(2;4), (2;7)}, (3;6)\}$

Dado que existen dos pares con un mismo x, es evidente que F_5 no es función.

23.9 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION

23.9A DOMINIO DE F : *Dom* (F)

Denominado también *pre-imagen* , es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de partida A .

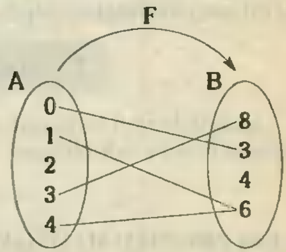
23.9B RANGO DE F : *Ran* (F)

Denominado también *imagen*, *recorrido* , o , *contradominio*, es el conjunto de los segundos elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de llegada B.

Se debe tener en cuenta que : ***Dom*** **(F) ⊂ A ∧ *Ran* (F) ⊂ B**

Ejemplo.- *Dada la relación representada por el diagrama sagital;*

hallar : Dom (F) ∧ *Ran* (F)



Resolución.-

- La función F viene dada por : $F = \{(0;3);(1;6), (3;8), (4;6)\}$

De acuerdo a la definición : *Dom* (F) = {0; 1; 3; 4} ∧

Ran (F) = {3; 6; 8}

Observar que : *Dom* (F) ⊂ A ∧ *Ran* (F) ⊂ B

Ejemplo.- *Encontrar el Dominio y Rango de la siguiente función.*

$F = \{(2;5), (-1;-3), (2;2a-b), (-1;b-a), (b^2;a)\}$

Resolución.-

Debemos tener en cuenta que para encontrar el dominio y el rango de la función F es necesario conocer los valores a y b , razón por la cual deben ser hallados previo a toda otra operación

Si F es función , entonces de acuerdo a la definición será necesario que se verifiquen las siguientes igualdades :

$$\begin{cases} 2a - b = 5 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)} \\ b - a = -3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)} \end{cases}$$

Efectuando (I) + (II) se consigue : $a = 2$

Sustituyendo : $a = 2$ en la relación (II) : $b = -1$

Luego la función F será : $F = \{(2\,;5)\,,(-1\,;-3)\,,(1\,;2)\}$

$\therefore$ $Dom\,(F) = \{2;-1\,;1\}$ $\wedge$ $Ran\,(F) = \{5;-3;2\}$

23.10 APLICACION

La función F se denomina aplicación de A en B si y solamente si todo elemento $x \in A$ sin excepción, tiene asignado un elemento $y \in B$ y solamente uno en tal caso se denota así:

$$F : A \longrightarrow B \quad ó \quad A \xrightarrow{F} B$$

El dominio de toda aplicación $F : A \to B$ siempre coincide con el conjunto de partida A ,es decir : $Dom\,(F) = A$, y también : $Ran\,(F) \subset B$.

23.11 FUNCION REAL DE VARIABLE REAL

Si los conjuntos de partida A y de llegada B de una función F son conjuntos de números reales, se dirá que F es una función real de variable real, debido a ello F tendrá una representación gráfica, la cual será un conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ (o plano xy) generado al establecer la relación de correspondencia unívoca existente entre la variable independiente x y su imagen la variable dependiente y ; es decir :

$$F = \{(x\,;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in Dom\,(F) \;\wedge\; y = F(x)\}$$

La igualdad mostrada : $y = F\,(x)$, nos expresa la relación de correspondencia de la función real F . Es evidente que :

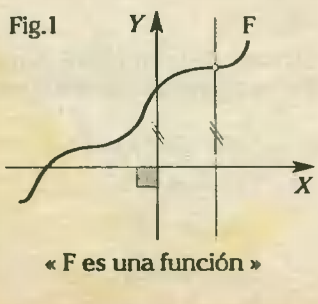
$$Dom\,(F) \subset \mathbb{R} \quad \wedge \quad Ran\,(F) \subset \mathbb{R}$$

23.11A PROPIEDAD GEOMETRICA

Una relación $F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una función real si y solamente si toda recta vertical corta a la gráfica de F a lo más en un punto.

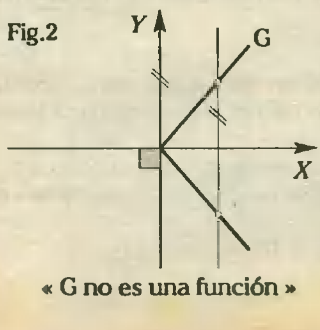
En el ejemplo mostrado en la Fig.1, la gráfica de F es la de una función, por que la recta que se ha trazado paralela al eje Y , corta a la curva en un solo punto. Sin embargo esto mismo no sucede en la Fig.2 con la gráfica de G, pues es cortada en dos puntos por una misma recta paralela al eje Y. En estos casos se dice que G es simplemente una relación en $\mathbb{R}$.

Fig.1



« F es una función »

Fig.2



« G no es una función »

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

13.- Si F representa a una función dada por : $F = \{(3;\ 7a + 2b),\ (2;\ 5),\ (2;\ a + 2),\ (3;\ 5b - 2a)\}$; diga cuál o cuáles de los siguientes conjuntos son funciones

I) $R_1 = \{(a\ ;\ b),\ (b - a\ ;\ 5),\ (5\ ;\ b - a),\ (a + b\ ;\ 5)\}$

II) $R_2 = \{(3\ ;\ b),\ (b\ ;\ 3),\ (3\ ;\ 8),\ (9\ ;\ 2a - b)\}$

III) $R_3 = \{(3\ ;\ 5),\ (9\ ;\ 7),\ (b\ ;\ a),\ (5a\ ;\ 3b)\}$

A) Solo I   B) Solo II   C) Solo III   D) I $\wedge$ III   E) II $\wedge$ III

Resolución.-

Si F es una función , entonces de acuerdo a la definición expuesta en el item 23.8A se debe cumplir que :

$$\begin{cases} 7a + 2b = 5b - 2a \ \dots\dots\dots (1) \\ a + 2 = 5 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Resolviendo (1) y (2), se obtiene : $a = 3 \ \wedge \ b = 9$

Luego,sustituyendo estos valores en cada conjunto por separado, nos permitirá reconocer qué conjunto resulta ser una función :

I) $R_1 = \{(3\ ;9)\ ;(6\ ;5)\ ;(5\ ;6)\ ;(12\ ;5)\}$

Dado que para cada x existe un y diferente, concluímos que R_1 es una función.

II) $R_2 = \{(3\ ;9)\ ;(9\ ;3)\ ;(3\ ;8)\ ;(9\ ;-3)\}$

Debido a los pares indicados , es evidente que R_2 no es función.

III) $R_3 = \{(3\ ;5)\ ;(9\ ;7)\ ;(9\ ;3)\ ;(15\ ;27)\}$

Por causa de los pares indicados R_3 no es función.

Finalmente se concluye que solo R_1 es una función **RPTA. A**

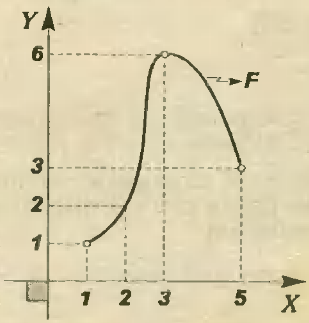
14.- De la figura mostrada :

Calcular el valor de T

Siendo : $T = \dfrac{F(5) + F(1)}{F(2) + F(3)}$

A) 1/2   B) 1/4   C) 1/8

D) 3/4   E) 2/3



Resolución.-

La regla de correspondencia de la función F viene dada por : $y = F(x)$; luego de la figura podemos deducir que :

Si: $x = 1 \rightarrow F(1) = 1 \quad \wedge \quad$ Si: $x = 2 \rightarrow F(2) = 2$

Si: $x = 3 \rightarrow F(3) = 6 \quad \wedge \quad$ Si: $x = 5 \rightarrow F(5) = 3$

Luego el valor pedido será : $T = \dfrac{3+1}{2+6} = \dfrac{4}{8} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{1}{2}}$ **RPTA. A**

15.- Dada la función real de la variable real F definida así : $F(x) = \sqrt{16 - x^2}$, su dominio es :

A) $x \in \langle -4 ; \infty \rangle$ *B)* $x \in \langle -\infty ; -4 \rangle \cup \langle 4 ; \infty \rangle$ *C)* $x \in \langle -4 ; 4 \rangle$

D) $x \in [-4 ; 4]$ *E)* $x \in \langle 0 ; 4]$

Resolución.-

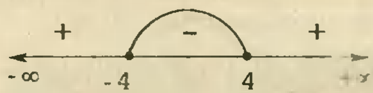
Utilizando la regla de correspondencia de la función F dada, encontraremos su dominio bastando recordar la condición de existencia de la expresión radical, es decir :

$$16 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 16 \leq 0$$

Factorizando el primer miembro, se tendrá: $(x + 4)(x - 4) \leq 0$

Igualando a 0 cada factor, los puntos de corte serán :

$$\{-4 \; ; \; 4\}$$



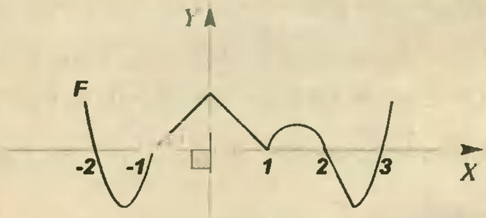
Finalmente, el intervalo solución de x será el dominio de la función F, luego : $Dom(F) = x \in [-4 ; 4]$ **RPTA. D**

16.- Cierta función F viene representada por la siguiente gráfica. ¿Qué valores de la variable independiente x hacen que la función se anule?

A) {-2; -1; 1; 2; 3} *B)* {-2; -1; 0; 1; 2}

C) {-2; 2} *D)* {-1; 1}

E) {-2; 2; 3}



Resolución.-

La regla de correspondencia de la función viene dada por : $y = F(x)$. Por condición del problema se piden los valores de x que verifiquen : $F(x) = 0$

Como regla general, diremos que los lugares en donde la función se anula vienen dados por todos aquellos puntos en los que la gráfica de F corta al eje X. De la gráfica podemos reconocer que estos puntos son :

$\therefore$ Los valores que anulan a la función son : **{-2; -1; 1; 2; 3}** **RPTA. A**

17.- Con respecto al problema anterior. ¿Para qué valores de x la función es negativa?

A) $\langle -1 ; 0 \rangle$ *B)* $\langle -2 ; 3 \rangle$ *C)* $\langle -2 ; -1 \rangle \cup \langle 2 ; 3 \rangle$ *D)* $\langle 1 ; 3 \rangle$ *E)* $\langle -2 ; -1 \rangle \cup \langle 1 ; 3 \rangle$

Resolución.-

Por condición del problema debemos encontrar los valores de x que verifiquen :

$$F(x) < 0 \quad \text{... (la función es negativa)}$$

Debe tenerse en cuenta que los sectores en donde la función F(x) es negativa, son aquellos en donde la gráfica se ubica por debajo del eje X. De la gráfica podemos observar que esto ocurre en :

$$-2 < x < -1 \;\Rightarrow\; F(x) < 0 \quad \wedge \quad 2 < x < 3 \;\Rightarrow\; F(x) < 0$$

Finalmente la función es negativa si y solamente si : $x \in \langle -2 ; -1\rangle \cup \langle 2 ; 3\rangle$ **RPTA.C**

18.- Sea la aplicación F:[0 ; 6] → ℝ ,definida por: $F(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 2$; encontrar su rango.

A) $\langle 2 ; 3\rangle$ *B)* $\langle -2 ; 3\rangle$ *C)* $[2 ; 3]$ *D)* $[-2 ; 2]$ *E)* $\langle -2 ; 3]$

Resolución.-

De acuerdo a lo expuesto en el item 23.10 el dominio de la aplicación viene dado por : Dom (F) = $x \in [0 ; 6]$

Esto significa que : $0 \le x \le 6$ ..... (*)

A continuación debemos recordar que el rango de la función F viene dado por el intervalo de variación de F(x), razón por la cual formaremos la expresión dada para F , a partir de la relación (*) .Veamos :

Restando 2 a cada miembro de (*) : $-2 \le x - 2 \le 4$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que toda expresión real cuadrática es siempre una cantidad positiva, tendremos : $0 \le (x-2)^2 \le 16$

Multiplicando por $\frac{1}{4}$ a todos los miembros : $0 \le \frac{1}{4}(x-2)^2 \le 4$

Restando 2 a cada miembro, se obtiene : $-2 \le \underbrace{\frac{1}{4}(x-2)^2 - 2}_{F(x)} \le 2$

Finalmente podemos observar que : **Ran(F) = [-2 ; 2]** **RPTA. D**

19.- Encontrar el dominio de la función F definida por : $F(x) = \frac{1}{x^3 - x}$

A) ℝ - { 0 } *B)* ℝ - { 0; 1 } *C)* ℝ - { -1; 0; 1 } *D)* ℝ *E)* ℝ - { -1; 0; 1; 2 }

Resolución.-

Debemos recordar que el dominio de la función F viene dado por el conjunto de todos los valores que puede asumir la variable x, lo cual nos lleva a analizar la existencia de la función F(x).Aquí resulta conveniente recordar el 1er Criterio de Resolución expuesto en el Cap. 14 , el cual establece que para la existencia de la expresión fraccionaria será necesario que :

$$x^3 - x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(x^2-1\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x(x+1)(x-1) \neq 0$$

Haciendo que cada factor sea distinto de cero, tendremos : $x \neq 0 \;\; ; \;\; x \neq -1 \;\; \wedge \;\; x \neq 1$

Esto significa que la función F(x) no existe en los puntos : $0 \; ; \; -1 \wedge 1$

Finalmente el dominio de la función será : **Dom(F) =** $x \in \mathbb{R} - \{0 \, ; -1 \, ; 1\}$ **RPTA. C**

20.- Proporcionar el dominio de la siguiente función F. $F(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}}{2x-6}$

A) $[1\,;3\rangle \cup \langle 3\,;4]$ *B)* $[1\,;4]$ *C)* $\langle 1\,;3\rangle \cup \langle 3\,;4\rangle$ *D)* $\langle 1\,;4\rangle$ *E)* $[-1\,;3] \cup \langle 4\,;5]$

Resolución.-

El dominio de F(x)se obtendrá descubriendo los intervalos numéricos a los que debe pertenecer x para dar existencia a la función F(x), lo cual se conseguirá aplicando el 1er y 2do Criterio de Resolución expuestos en el item 14.3. Veamos :

Dom(F) : $x - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad 4 - x \geq 0 \quad \wedge \quad 2x - 6 \neq 0$

$$\underbrace{x \geq 1 \quad \wedge \quad x \leq 4} \quad \wedge \quad x \neq 3$$

$$1 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad x \neq 3$$

Finalmente el dominio de la función F será : **Dom(F) =** $x \in [1\,;3\rangle \cup \langle 3\,;4]$ **RPTA. A**

21.- Sea F la función definida por : $F(x) = sen\sqrt{\left(x^2-a^2\right)\left|x^2-b^2\right|}$ ***; donde :*** $a \wedge b$ ***son constantes tal que*** $a < b$ ***¿Cuál es el domino de F?***

A) $\langle -\infty\,;-a\rangle \cup \langle a\,;\infty\rangle$ *B)* $\langle -\infty\,;-b\rangle \cup \langle b\,;\infty\rangle$ *C)* $\langle -\infty\,;-a] \cup [a\,;\infty\rangle$

D) $\langle -\infty\,;-b] \cup [b\,;\infty\rangle$ *E)* $\langle -b\,;-a\rangle \cup \langle a\,;b\rangle$

Resolución.-

Para que la función F(x) exista ,se debe cumplir que : $\left(x^2-a^2\right)\left|x^2-b^2\right| \geq 0$ .....(*)

En (*) reconocemos que el vcalor absoluto es siempre positivo, luego : $\left|x^2-b^2\right| \geq 0$

De aqui , se deduce que : $x = \pm b$

Asimismo en (*) , se debe cumplir que : $x^2 - a^2 \geq 0$

Al factorizar, nos queda : $(x+a)(x-a) \geq 0$

Hasta aqui hemos encontrado que : $x \in \langle -\infty\,;-a] \cup [a\,;\infty\rangle \;\vee\; x = \pm b$

Para concluir, debemos reconocer que : $a < b \;\Rightarrow\; -a > -b$

$\therefore$ **Dom (F) =** $x \in \langle -\infty\,;-a] \cup [a\,;\infty\rangle$ **RPTA. C**

MISCELANEA

22.- Dada la relación R definida por : $R = \{ (x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ |x - y| \leq 4 \}$; es cierto que :

A) R es reflexiva B) R es simétrica C) R es transitiva

D) R es de equivalencia E) R no es de equivalencia

<u>Resolución</u>.-

Nuestra estrategia para resolver el problema consistirá en averiguar si la relación R es reflexiva, simétrica o transitiva . Veamos :

a) ¿ R es reflexiva ?.- De la condición dada se sabe que : $|x - y| \leq 4$ ...(*)

Ahora debemos recordar que una relación será reflexiva $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x ; x) \in R$

Observar que al hacer : $x=y$ en (*), tendremos : $|x - x| = 0 \leq 4$

Dado que esta desigualdad es correcta, concluímos que R es reflexiva .

b) ¿R es simétrica? .-

La relación será reflexiva si : $(x ; y) \in R \Rightarrow (y ; x) \in R$

Transformando la expresión (*), tendremos : $|y - x| = |-(x - y)|$

Extrayendo -1 del signo de valor absoluto, se tendrá que : $|y - x| = |-1| . |x - y|$

Esto nos permite establecer que : $|x - y| = |y - x| \leq 4$

Esta última proposición , nos permita concluir que R es simétrica

c) ¿R es transitiva? .

Consideremos el siguiente par : $(x ; y) = (6 ; 3) \in R$ .... pues : $|6 - 3| = 3 \leq 4$

Ahora utilicemos el par : $(x ; y) = (3 ; 1) \in R$ .... pues : $|3 - 1| = 2 \leq 4$

A continuación (6 ; 1) debe pertenecer a R , sin embargo : $|6 - 1| = 5 \nleq 4$

Finalmente podemos concluir que R no es transitiva y tampoco es una relación de equivalencia. **RPTA. E**

23.- Dados los conjuntos :

$$R_1 = \left\{ (x ; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - y^2 \leq 1 \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (x ; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \geq 1 \right\}$$

$$R_3 = \left\{ (x ; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| + |y| \leq \sqrt{2} \right\}$$

Encontrar la gráfica de : $R_1 \cap R_2 \cap R_3$

<u>Resolución</u>.-

Para graficar correctamente cada conjunto será necesario recordar lo expuesto en el item 23.7

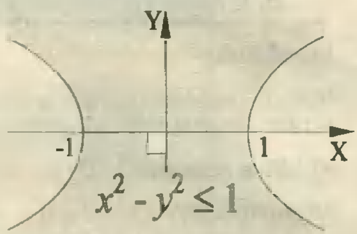
a) Para R_1 .- La condición dada es : $x^2 - y^2 \leq 1$ ......(*)

Como se sabe la gráfica que corresponde a esta inecuación es una región limitada por la curva definida por (*) , incluída ella misma . Ahora al analizar la curva , concluímos que ésta es una Hipérbola con centro en el origen y eje focal paralelo al eje X .Veamos :

Analizando el *Dominio* de x.- De : $x^2 - y^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 + y^2$

Extrayendo raíz cuadrada :

$$|x| \leq \sqrt{1+y^2} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{1+y^2} \\ x \geq \sqrt{1+y^2} \end{cases} \quad \text{.... (I)}$$



La intersección con el eje X y su correspondiente expansión en dicho eje se obtiene haciendo : $y = 0$. Luego :

$$x \leq -1 \quad \wedge \quad x \geq 1$$

Puede reconocerse que la curva existe $\forall\, y \in \mathbb{R}$, sin embargo la curva no corta al eje Y.

CONCLUSION.- La gráfica de R_1 es una región que se expande desde $x=1$ hacia la derecha y desde $x=-1$, hacia la izquierda ; asimismo la región se expande a lo largo del eje Y, dado que el rango de R_1 es $\mathbb{R}$

b) Para R_2 .- La condición dada es : $x^2 + y^2 \geq 1$

La gráfica que corresponde a esta inecuación es una región que se expande más allá de la circunferencia definida por : $x^2 + y^2 = 1$, con centro en el origen y radio igual a 1.Veamos :

Analizando el *Dominio* de x .- De : $x^2 + y^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 - y^2$

Extrayendo raíz cuadrada : $$|x| \geq \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{1-y^2} \\ x \geq \sqrt{1-y^2} \end{cases} \quad \text{........ (II)}$$

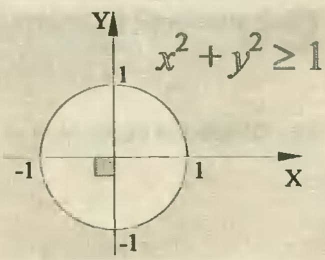
La intersección con el eje X y su correspondiente expansión en dicho eje se obtiene haciendo : $y = 0$. Luego :

$$x \leq -1 \quad \wedge \quad x \geq 1$$

Analizando el *Rango* de y .- De : $x^2 + y^2 \geq 1$

$$\Rightarrow \quad y^2 \geq 1 - x^2$$

$$\Rightarrow \quad |y| \geq \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -\sqrt{1-x^2} \\ y \geq \sqrt{1-x^2} \end{cases} \quad \text{........ (III)}$$



La intersección con el eje Y así como su correspondiente expansión en dicho eje ,se obtiene haciendo $x = 0$ .Luego :

$$y \leq -1 \quad \vee \quad y \geq 1$$

CONCLUSIÓN.-La gráfica de R_2 es una región que se expande desde $x=1$ hacia la derecha y desde $x=-1$, hacia la izquierda ; asimismo la región se expande desde y=1 hacia arriba y desde y=-1 hacia abajo, dejandose una claro circular de radio 1.

c) Para R_3 .- La condición es : $|x| + |y| \leq \sqrt{2}$ ....(**)

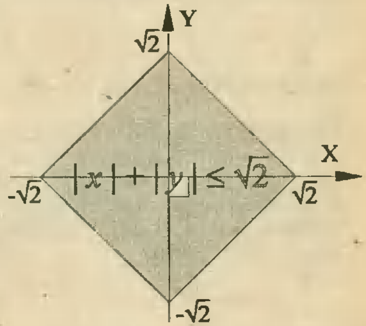
Como se sabe la gráfica que corresponde a esta inecuación es una región limitada por la curva definida por (**), incluída ella misma .

La intersección con el eje X y su correspondiente expansión en dicho eje la conseguimos haciendo $y=0$: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

La intersección con el eje Y y su correspondiente expansión en dicho eje la conseguimos haciendo $x=0$: $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$

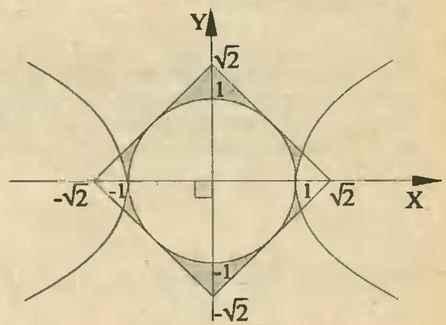
Asimismo la grafica esta limitada por las siguientes curvas ,las mismas que se obtienen de (**) :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 : \ x + y = \sqrt{2} \\ \mathcal{L}_2 : \ x - y = \sqrt{2} \\ \mathcal{L}_3 : -x + y = \sqrt{2} \\ \mathcal{L}_4 : -x - y = \sqrt{2} \end{cases}$$



CONCLUSION.- La gráfica de R_3 es una región que está comprendida entre cuatro rectas que forman un cuadrado

Finalmente la gráfica de : $R_1 \cap R_2 \cap R_3$, se obtendrá intersectando los gráficos obtenidos en los pasos anteriores, de modo que el resultado será una región limitada por las hipérbolas ,es decir , deberá estar entre ellas. Además , la región deberá expandirse fuera de la circunferencia , pero no más allá del cuadrado obtenido en el último paso.El gráfico resultante descrito es como el que se muestra al lado.



24.- Dados los conjuntos :

$$A = \{(x \, ; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 2x^2 + 3\}$$

$$B = \left\{(x \, ; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq -\frac{4}{5}x + 4\right\}$$

Graficar : (A - B) $\cup$ (B - A)

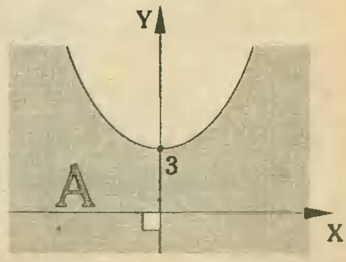
Resolución.-

Tal como se hizo en el ejercicio anterior , graficaremos cada conjunto por separado. Veamos :

a) De A .- Analizando la condición dada : $y \leq 2x^2 + 3$

Analizando el borde : $y = 2x^2 + 3$

Despejando el término cuadrático : $x^2 = \frac{1}{2}(y - 3)$



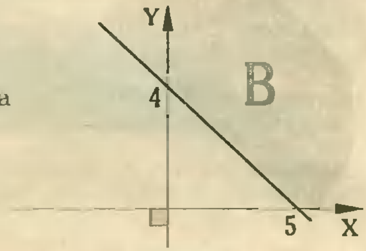
De esta expresión se puede reconocer que se trata de una parábola con vértice en (0;3) y eje focal paralelo al eje Y. El gráfico es el que se mestra en la página anterior .

b) De A .- Analizando la condición dada : $y \geq -\frac{4}{5}x + 4$

Analizando el borde , se tiene : $y = -\frac{4}{5}x + 4$ ...(*)

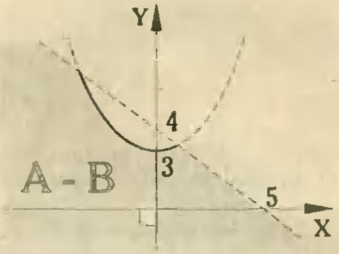
De esta expresión se puede reconocer que se trata de una recta con pendiente negativa.

Graficando esta región se tiene :



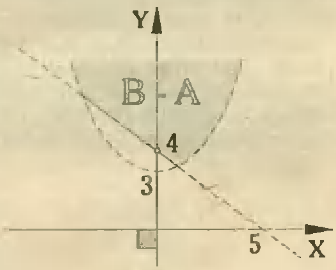
Grafica del conjunto : A - B

Esta gráfica corresponde a todos los puntos que pertenecen al conjunto A pero que no pertenecen al conjunto B. Esto significa que se debe considerar a la región inferior de A y a ninguno de los puntos ubicados *en* y *sobre* la recta definida por (*). Luego la gráfica buscada es como la que se muestra al lado :

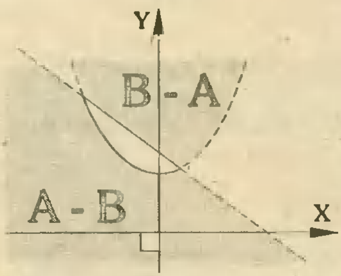


Graficando : B - A

Esta gráfica corresponde a todos los puntos que pertenecen al conjunto A pero que no pertenecen al conjunto B. Esto significa que se debe considerar a la región inferior de A y a ninguno de los puntos ubicados *en* y *sobre* la recta definida por (*). Luego la gráfica buscada es como la que se muestra al lado :



Finalmente la gráfica de $(A - B) \cup (B - A)$ será :



25.- Si : $A \times B = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3), (2;4)\} \wedge C = \{1;5;6\}$

¿Cuántos elementos tiene el conjunto : $(A - C) \cup B$ ***?***

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E)5***

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 23.1B, tenemos : $A \times B = \{(a\,;b)\,/\,a \in A \;\wedge\; b \in B\}$

Por datos : $A \times B = \{\,(1\,;2)\,,(1\,;3)\,,(1\,;4)\,,(2\,;2)\,,(2\,;3)\,,(2\,;4)\,\}$

Es evidente que : $A = \{1\,;2\} \;\wedge\; B = \{\,2\,;3\,;4\}$

A continuación determinamos el conjunto : $(A - C) \cup B$

$$A - C = \{\,1\,;2\,\} - \{\,1\,;5\,;6\,\} = \{\,2\,\} \;\wedge\; B = \{\,2\,;3\,;4\,\}$$

Finalmente : $(A - C) \cup B = \{\,2\,;3\,;4\,\}$

$\therefore \quad n\,[\,(A - C) \cup B\,] =$ **3** **RPTA. C**

26.- Las funciones F, G y H tienen las siguientes reglas de correspondencia : $F(x) = -\,x^2$; $G(x) = -x$, y , $H(x) = \frac{1}{x}$. Las gráficas de F y G se cortan en los puntos P y Q y las gráficas de F y H en el punto R respectivamente, entonces dichos puntos son :

A) (0 ; 1) , (1 ; 1) , (-1 ; 1) *B) (0 ; 0) , (1 ; -1) , (-1 ; -1)* *C) (0 ; 0) , (-1 ;-1) , (-1 ; 1)*

D) (1 ; 0) , (0 ; -1) , (-1 ; 1) *E) (-1 ; -1) , (0 ; -1) , (1 ; 1)*

Resolución.-

Teniendo en cuenta que las coordenadas en de los puntos de corte satisfacen las reglas de correspondencia; los puntos de corte de $F(x)$ y $G(x)$ se obtienen haciendo : $F(x) = G(x)$

Sustituyendo las relaciones dadas : $-\,x^2 = -x \;\Rightarrow\; x\,(x - 1) = 0$

Resolviendo ,se tienen las abscisas : $x = 0 \;\wedge\; x = 1$

Luego las ordenadas correspondientes serán : $F(0) = 0 \;\wedge\; F(1) = -1$

En consecuencia los puntos de corte P y Q son : $P = (0\,;0) \;\wedge\; Q = (1\,;-1)$

Analogamente para hallar el punto de corte entre $F(x)$ y $H(x)$ hacemos : $F(x) = H(x)$

Sustituyendo las relaciones dadas, tendremos : $-\,x^2 = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; x^3 + 1 = 0$

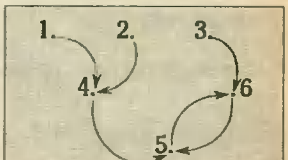
Resolviendo se logra obtener : $x = -1 \;\Rightarrow\; F(-1) = -1$

En consecuencia el punto R es : $R = (-1\,;-1)$

Finalmente los puntos P, Q y R son : **(0 ; 0) , (1 ; -1) ∧ (-1 ; -1)** **RPTA. B**

27.- Dado el conjunto : $A = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$, se grafica una función de A en A asi :

$$F:\; A \to A$$



Indicar la suma de los elementos de su rango.

A) 21 *B) 7* *C) 14* *D)15* *E) 12*

Resolución.-

Tener en cuenta que : F : A $\rightarrow$ A tiene por dominio al conjunto A; luego su rango estará definido así :

Ran(F) = { F(1) , F(2) , F(3) , F(4) , F(5) , F(6) }

Con el auxilio de la gráfica obtenemos :

Ran(F) = { 4 ; 4 ; 6 ; 5 ; 6 ; 5 }

Ran (F) = { 4 ; 6 ; 5 }

$\therefore$ Σ elementos = 4 + 6 + 5 = **15** **RPTA. D**

28.- Considere la función F con máximo dominio posible : $F(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$

luego el rango de F es.

A) $[1 ; 2]$ *B)* $\langle -2 ; 2\rangle$ *C)* $\langle -2 ; 2\sqrt{2}\rangle$ *D)* $[2 ; 2\sqrt{2}]$ *E)* $\langle 2 ; 2\sqrt{2}\rangle$

Resolución.-

Nuestra estrategia para resolver este problema consistirá en formar el rango conociendo el dominio.

Hallemos el dominio de la función F.

Por existencia de la expresión radical se deberá cumplir que : $2 + x \geq 0 \ \wedge \ 2 - x \geq 0$

Resolviendo : $-2 \leq x \leq 2$ .... Dom (F)

La regla de correspondencia de la función F es : $F(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$

Teniendo en cuenta la relación : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}}$

Dicha regla de correspondencia se podrá expresar asi :

$$F(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{(2+x)(2-x)}}$$

$$F(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{4-x^2}}$$

Luego formando F(x) a partir del domino de F, se tendrá : $-2 \leq x \leq 2$

Elevando al cuadrado : $0 \leq x^2 \leq 4$

Multiplicando por -1 : $-4 \leq -x^2 \leq 0$

Sumando 4 : $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$

Extrayendo raíz cuadrada : $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2$

Multiplicando por 2 : $0 \leq 2\sqrt{4-x^2} \leq 4$

Sumando 4 : $4 \leq 4 + 2\sqrt{4-x^2} \leq 8$

Extrayendo raíz cuadrada : $2 \leq \underbrace{\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}}_{F(x)} \leq 2\sqrt{2}$

Observar que : $2 \leq F(x) \leq 2\sqrt{2}$

$\therefore$ $\boxed{\text{Ran (F)} = [2\,;2\sqrt{2}]}$ **RPTA. D**

29.- Si el rango de : $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, es : $[a\,;\,b\rangle$ luego el valor de "a + b" es :

A) 0 ***B) 1*** ***C) 2*** ***D) 1/2*** ***E) 3/4***

Resolución.-

La función dada : $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Puede expresarse asi : $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$

Hallemos el rango de F partiendo de : $0 \leq x^2 < \infty$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$

Sumando 1 : $0 \leq x^2+1 < \infty$

Invirtiendo : $0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$

Multiplicando por -1 : $-1 \leq -\dfrac{1}{x^2+1} < 0$

Sumando 1 : $0 \leq \underbrace{1-\dfrac{1}{x^2+1}}_{F(x)} < 1$

Observar que : $0 \leq F(x) < 1$

Es decir : $\text{Ran (F)} = [0\,;\,1\rangle$

Por condición : $\text{Ran (F)} = [a\,;\,b\rangle$

Luego comprando se tendrá : $a = 0 \ \wedge\ b = 1$

$\therefore$ $a + b = \boxed{1}$ **RPTA. B**

30.- Hallar el rango de la siguiente función : $F(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

A) $\langle 0\,;1\rangle$ ***B) $\langle 0\,;1]$*** ***C) $[\,0\,;1\,]$*** ***D) $[0\,;1\rangle$*** ***E) $\langle 1/2\,;1]$***

Resolución.-

Hallemos el dominio de la función para luego a partir de él formar el rango. Veamos :

En base al 1er Criterio de Resolución de Ecuaciones, diremos que la función F(x), está definida, siempre que : $1-\sqrt{1-x} \geq 0 \quad \wedge \quad 1-x \geq 0$

Despejando en cada caso, se obtiene : $1 \geq \sqrt{1-x} \quad \wedge \quad 1 \geq x$

Elevando al cuadrado y despejando, se tiene : $x \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 1$

De estos resultados se puede afirmar que : $\text{Dom (F)} = x \in [0 ; 1]$

Ahora formaremos el rango a partir del Dom (F) : $0 \leq x \leq 1$

Multiplicando por -1 , y reacomodando, se tiene : $-1 \leq -x \leq 0$

Sumando 1 a cada miembro, tendremos : $0 \leq 1-x \leq 1$

Extrayendo raíz cuadrada , se establece que : $0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$

Multiplicando por -1 , y reacomodando: $-1 \leq -\sqrt{1-x} \leq 0$

Sumando 1 a cada miembro, se tendrá : $0 \leq 1-\sqrt{1-x} \leq 1$

Extrayendo otra vez raíz cuadrada : $0 \leq \underbrace{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}_{F(x)} \leq 1$

Finalmente reconocemos que : **Ran(F) = [0 ; 1]** **RPTA. C**

31.- Sea : $F(x) = x^2 - 1$, una función cuyo dominio es : Dom (F) = [- 4 ; - 2] $\cup$ [-1 ; 1] ; determinar su rango.

A) [-1 ; 0] $\cup$ [3 ; 15] *B)* [0 ; 1] $\cup$ [3 ; 15] *C)* $\mathbb{R}$

D) [-1 ; 3] $\cup$ [5 ; 15] *E) N.A.*

Resolución.-

Tal como hicimos en el problema anterior, nuestra estrategia consistirá en formar el rango a partir del dominio. Veamos :

A partir del dominio, se puede establecer : $-4 \leq x \leq -2 \quad \vee \quad -1 \leq x \leq 1$

Elevando al cuadrado cada inecuación : $4 \leq x^2 \leq 16 \quad \vee \quad 0 \leq x^2 \leq 1$

Restando 1 a cada miembro : $3 \leq x^2 - 1 \leq 15 \quad \vee \quad -1 \leq x^2 - 1 \leq 0$

De aqui podemos observar que : $3 \leq F(x) \leq 15 \quad \vee \quad -1 \leq F(x) \leq 0$

Finalmente se tendrá : **Rang(F) = [-1 ; 0] $\cup$ [3 ; 15]** **RPTA. A**

32.- Dada la función : $F(x) = mx$ y la circunferencia : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$;¿En qué intervalo debe variar "m" para que la gráfica de la función F tenga puntos comunes con la circunferencia.

A) $-4 \le m < 0$ *B)* $-3 \le m < 0$ *C)* $-4 \le m \le 0$

D) $-3 \le m \le 0$ *E)* $-4/3 \le m \le 0$

Resolución.-

De acuerdo al enunciado se debe establecer que : $\begin{cases} F(x) = y = mx \text{ .... (I)} \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1 \text{ .... (II)} \end{cases}$

Sustituyendo (I) en (II) : $(x-2)^2 + (mx+1)^2 = 1$

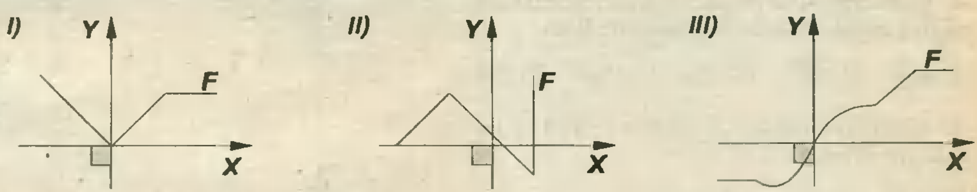
Efectuando las potencias indicadas: $(m^2+1)\ x^2 + 2\,(m-2)\,x + 4 = 0$

Luego para que esta ecuación admita soluciones reales ,su discriminante deberá ser mayor o igual que cero, es decir : $[2(m-2)]^2 - 4\,(m^2+1)\ (4) \ge 0$

Efectuando obtenemos : $m\,(3m+4) \le 0$

Resolviendo la inecuación, concluímos que : $m \in \left[-\frac{4}{3}\,;0\right]$ **RPTA. E**

33.- ¿Cuál 0 cuáles de las siguientes gráficas :



representan a una función :

A) I *B) II* *C) III* *D) I ∧ III* *E) Todas*

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 23.11A, todo vertical deberá cortar a la gráfica de una función a lo más en un solo punto en consecuencia podemos deducir que de las gráficas dadas solo cumplen tal condición (I) ∧ (III).

∴ **Son funciones (I) ∧ (III)** **RPTA. D**

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Si A tiene 5 elementos, B tiene 3 elementos; ¿Cuántos elementos tiene A × B?

A) 5 B) 3 C) 8 D) 15 E) 12

2.- Con respecto al problema anterior; ¿Cuántos elementos tiene el conjunto : A × B - B × A, sabiendo que : $(A \times B) \cap (B \times A) = \phi$?

A) 15 B) 0 C) 5

D) 3 E) No se puede determinar

3.- Dados los conjuntos :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / 3 \le x \le 6\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x \in [-1 ; 4]\};$$

calcular el área que determina la gráfica de A×B

A) $22u^2$ B) $6u^2$ C) $15u^2$ D) $12u^2$ E) $8u^2$

4.- Con respecto al problema anterior; calcular el área que determina la gráfica de B×A.

A) $6u^2$ B) $12u^2$ C) $22u^2$ D) $15u^2$ E) $25u^2$

5.- Dado el conjunto : A = {-2 ; -1 ; 3 ; 4} y las relaciones en A :

$R_1 = \{(-2 ; -1), (-2 ; -2), (-1 ; 2),$
$(-1 ; -1), (3 ; 3), (4 ; 4)\}$ ...... ( )

$R_2 = \{ (x ; y) / |x| = |y| \}$ ...... ( )

$R_3 = \{(x ; y) / y = x - 2 \}$ ...... ( ) ;

Indicar con una V si es reflexiva y con una F si no lo es.

A) VVF B) VFF C) FVF D) VVV E) VFV

6.- Dado el conjunto : A = { 1 ; 2 ; 3 ; 4} y las relaciones en A:

$R_1 = \{(1 ; 2), (2 ; 3), (2 ; 1), (3 ; 4),$
$(3 ; 2), (4 ; 3), (3 ; 3)\}$

$R_2 = \{ (x ; y) / x^2 + y^2 = 5\}$

$R_3 = \{(x ; y) / y = x - 2 \}$;

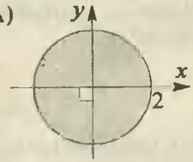
¿Cuáles son simétricas?

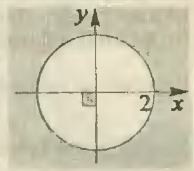
A) $R_1 \wedge R_3$ B) R_1 C) $R_1 \wedge R_2$

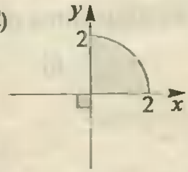
D) R_2 E) R_3

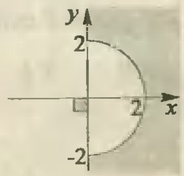
7.- Hallar la región del plano $\mathbb{R}^2$ definida por:

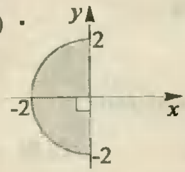
$$x^2 + y^2 \ge 2 \quad \wedge \quad x > 0$$

A)


B)


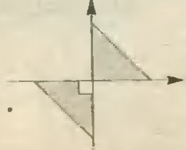
C)


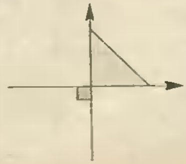
D)


E)


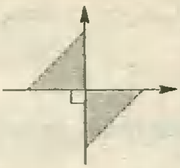
8.- Hallar la región del plano $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$|x| + |y| < 2$$

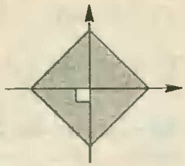
A)


B)


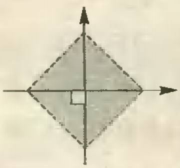
C)



D)



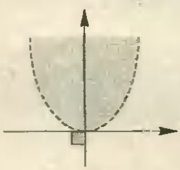
E)



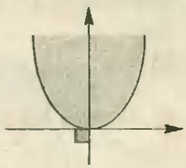
9.- Graficar la relación R definida por :

$$R=\{\ (x\,;\,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ /\ y>x^2\ \}$$

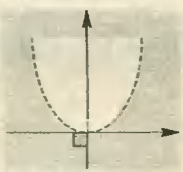
A)



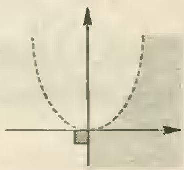
B)



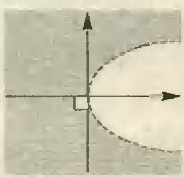
C)



D)



E)



10.- Halle el dominio de la función F

$$F(x)\ =\ \frac{3}{x-1}$$

A) $\mathbb{R}$ B) $\langle -\infty\,;\,1\rangle$ C) $\langle 1\,;\,\infty\rangle$

D) $\mathbb{R}-\{\ 1\ \}$ E) $\mathbb{R}-\{\ -1\ \}$

11.- Halle el dominio de la función :

$$F(x)\ =\ \sqrt{9-x^2}$$

A) $\langle 3\,;\,\infty\rangle$ B) $\langle -3\,;\,3\rangle$ C) $\langle -\infty\,;\,-3\rangle$

D) $[-3\,;\,3]$ E) N.A.

12.- Calcular "$a-b$" si el conjunto :

$$R=\{(2\,;a+1),(3\,;b-1),(2\,;4)\ ,(3\,;7)\},$$

representa una función:

A) 11 B) 10 C) 12 D) 9 E) 13

NIVEL B

13.- Dado el conjunto : A = { 1 ; 2 ; 3 ; 4} y las relaciones en A :

I) $R_1=\{\ (1\,;\,2)\,,(1\,;\,3)\,,(1\,;\,4)\,,$
$(2\,;\,3)\,,(2\,;\,4)\,,(3\,;\,4)\ \}$

II) $R_2=\{\ (x\,;y)\ /\ x^2\ +\ y^2=5\ \}\ \cup\ \{\ (1\,;\,1)\ \}$

III) $R_3=\{\ (1\,;\,1)\,,(2\,;\,2)\,,(2\,;\,3)\ \}$;

indicar las relaciones transitivas.

A) II B) I ∧ II C) II ∧ III

D) I , II ∧ III E) I ∧ III

14.- Dado el conjunto : A = {2 ; 4 ; 6} y las relaciones en A :

$R_1=\{\ (2\,;\,2)\,,(2\,;\,4)\,,(4\,;\,4)\,,\ (6\,;\,6)\,,(4\,;\,2)\ \}$

$R_2=\{\ (x\,;\,y)\ /\ y-x=0\ \}$

$R_3=\{\ (x\,;\,y)\ /\ y-2=x\ \}$;

¿Cuáles son relaciones de equivalencia?

A) R_1 B) R_2 C) R_1 y R_3

D) R_2 y R_3 E) R_1 y R_2

15.- Calcular la suma de los elementos en el rango de la siguiente función :

$$F(x)=0\,;\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0}_{(x-1)\ \text{ceros}}\,x\,\overset{\frown}{9}$$

para : $x=1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5$

A) 0,023 45 B) 10,034 56 C) 0,223 45

D) 0,223 46 E) 0,234 56

16.- La ecuación : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde a y b son constantes tal que : $a \geq 1 \wedge b \geq 1$ ¿Es y una función de x ?

A) Si B) Solo si : $x \geq a$ ó $x \leq -a$

C) No D) Solo si : $x \geq a$

E) Solo si : $x \leq -a$

17.- Indicar el dominio de : $F(x) = \sqrt{x\,(x-5)}$

A) $\langle -\infty ; 0] \cup [5 ; \infty\rangle$ B) $\langle -\infty ; 0\rangle \cup [5 ; \infty\rangle$

C) $\langle -\infty ; 0] \cup \langle 5 ; \infty\rangle$ D) $\langle -\infty ; 2] \cup [5 ; \infty\rangle$

E) $\langle -\infty ; 0] \cup \langle 2 ; \infty\rangle$

18.- Dados los conjuntos A y B, donde :

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq -1 \} \cup \{ x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < \infty \}$$

$$B = \{ y \in \mathbb{R} / 1 \leq y \leq 2 \} \cup \{ 3 \} \ ;$$

entonces el conjunto A × B presenta :

A) Una semirecta disjunta con el tercer cuadrante.

B) Dos semirectas disjuntas en el cuarto cuadrante.

C) No contiene ninguna semirecta disjunta.

D) Contiene dos semirectas disjuntas, una en el segundo cuadrante y una en el primero.

E) Dos semirectas disjuntas, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero.

19.- Sea la función : $F(x) = \dfrac{2x+7}{-x-3}$ con dominio $x \in \langle -\infty ; -3\rangle \cup \langle -3 ; 1\rangle$ ¿Cuál es su rango?

A) $\langle -\infty ; -9/4\rangle \cup \langle -2 ; \infty\rangle$

B) $\langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 9/4 ; \infty\rangle$

C) $\langle -2 ; \infty\rangle$ D) $\langle -\infty ; 2\rangle \cup \langle 9/4 ; \infty\rangle$

E) $\langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle -2 ; \infty\rangle$

20.- Dadas las funciones reales de variable real :

$$F(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

$$G(x) = -x^2 + 4x - 3 \ ;$$

y los conjuntos : $A = \{ x \in \mathbb{R} / F(x) > 0 \}$

$B = \{ x \in \mathbb{R} / G(x) > 0 \}$;

el complemento de A ∪ B es :

A) $[0 ; 1] \cup [2 ; 5]$ B) $[-1 ; 1] \cup [3 ; 5]$

C) $[0 ; 1] \cup [5 ; \infty\rangle$ D) $[1 ; 3]$

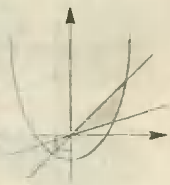
E) $\langle -\infty ; -1] \cup [5 ; \infty\rangle$

21.- Dados los conjuntos :

$$A = \left\{ (x ; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{y}{2} \leq x \leq 2y \right\}$$

$$B = \{ (x ; y) \in \mathbb{R}^2 / y + 1 \leq x^2 \} \ ;$$

la región sombreada



es :

A) A - B B) B - A C) A ∩ B

D) A ∪ B E) (A ∩ B)'

22.- Respecto al conjunto :

$$A = \{ (x ; y) / 2x + 3y - 6 = 0 \ ; \ 4x - 3y - 6 = 0 \ ; \ x - 1 = 1 \ ; 3y = 2 \} ;$$

se puede decir que :

A) Tiene 6 elementos B) Tiene 4 elementos

C) Tiene 1 elemento D) Es el conjunto vacío

E) Tiene un número ilimitado de elementos

23.- Sea : $F(x) = -(x-1)^2 + 2$, con $x \in \langle 0\,;\,1\rangle$

si : $A(x) = b\,.\,F(x)$, con : $b > 0$ y $F(x+b) = F(x)$;

hallar en qué intervalo se encuentra $A(x)$ cuando : $0 < x < 1$

A) $\langle 0\,;\,3 + 5\sqrt{6}/9]$ B) $\langle -2\,;\,4\rangle$ C) $\langle 0\,;\,1\rangle$

D) $\langle 0\,;\,4\rangle$ E) $\langle 0\,;\,8\sqrt{6}/9]$

24.- Si la relación :

$R = \{\,(1\,;2a), (2\,;7), (5\,;1), (1\,;3a-5), (7\,;9)\,\}$

es una función la suma de los elementos del rango de dicha función es :

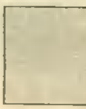
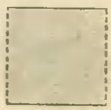
A) 22 B) 15 C) 27 D) 16 E) 10

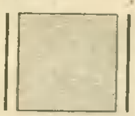
25.- Sean los conjuntos :

$A = \{\,1\,;4\,\} \cup \{\,x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 3\,\}$

$B = \{\,x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x \leq 2\,\}$;

luego A×B tiene la forma :

A)  B)  C) 

D)  E) 

NIVEL C

26.- Sea R la región limitada por las curvas : $y = 4x - x^2 \;\wedge\; y = x^2 - 4x$; sin considerar los bordes, ¿Cuántos pares ordenados con coordenadas enteras tiene dicha región?

A) 18 B) 17 C) 16 D) 14 E) 15

27.- Indicar el dominio y rango de la relación siguiente :

$R = \{\,(x\,;y) \in \mathbb{R}\,.\,\mathbb{R} \;/\; |y| \leq |x| \leq 3\,\}$

A) $Dom = Ran = [-3\,;3]$

B) $Dom = Ran = [-5\,;2]$

C) $Dom = Ran = \mathbb{R}$

D) $Dom = Ran = \phi$

E) $Dom = Ran = [-2\,;2]$

28.- Hallar el rango de la función F definida asi :

$$F(x) = -3 + \sqrt{x^2 - 4x + 5} \quad ; -2 \leq x < 6$$

A) $[-2\,;\,(\sqrt{17}-3)]$ B) $\langle -3\,;\,\sqrt{17}]$

C) $\langle -\infty\,;\,(\sqrt{17}-3)]$ D) $\langle -4\,;\,(\sqrt{5}-2)]$

E) $\langle -2\,;\,6]$

29.- Hallar el dominio de la función F :

$$F(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 23x + 6}{x^2 + x - 6}$$

A) $\mathbb{R} - \{2\,;3\}$ B) $\langle 2\,;\,3\rangle$ C) $\mathbb{R}$

D) $\mathbb{R} - \{2\,;-3\}$ E) $\mathbb{R} - \{-2\,;3\}$

30.- Dadas las funciones :

$$F(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \;\wedge\; G(x) = \sqrt[1/2]{10 + x}$$

hallar : $Dom(F) \cap Dom(G)$

A) $\langle -\infty\,;\,\infty\rangle - \{\pm 1\}$ B) $\langle -10\,;\,\infty\rangle \cup \{\pm 1\}$

C) $\mathbb{R}$ D) $[-10\,;\,\infty\rangle - \{1\}$

E) $[-10\,;\,\infty\rangle - \{2\}$

31.- Marcar verdadero o falso según convenga :

I) Toda función es una relación ....( )

II) Toda relación es una función ....( )

III) Toda recta es una función ....( )

IV) Toda parábola es una función ....( )

A) FVFF B) VFFF C) VFVV

D) VFVF E) VFFV

32.- El dominio de la función : $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, es

A) $[-1\,;1]$ B) $\langle -1\,;1\rangle$

C) $\langle -\infty\,;1\rangle \cup \langle 1\,;\infty\rangle$ D) $\langle -\infty\,;-1\rangle \cup \langle 1\,;\infty\rangle$

E) $\mathbb{R}-\{1\}$

33.- Si : $F=\{\,(8\,;2),(2\,;a),(a^2-1\,;b),$
$(2\,;2a-3),(3\,;5)\,\}$;

indicar la suma del mínimo y el máximo de la función F.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4

34.- Hallar el rango de : $F(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $x>0$

A) $[0\,;\infty\rangle$ B) $[1\,;\infty\rangle$ C) $[2\,;\infty\rangle$

D) $[-2\,;2\rangle$ E) $\langle -\infty\,;-2] \cup [2\,;\infty\rangle$

35.- Indicar el mínimo valor de la función F definida asi :

$$F(x)=\frac{1+x^2}{1+x}\ ;\ x\in[0\,;\infty\rangle$$

A) $\sqrt{2}-1$ B) 1 C) $2\sqrt{2}-2$

D) $\sqrt{2}+1$ E) $2\sqrt{2}+1$

36.- Hallar el dominio y el rango de :

$$F(x)=\frac{x^3+7x^2+14x+8}{x^2+6x+8}$$

A) $\mathbb{R}\,;\mathbb{R}^+$ B) $\mathbb{R}-\{-2\,;-4\}\,;\ \mathbb{R}-\{-1\,;-3\}$

C) $\mathbb{R}\,;\mathbb{R}^-$ D) $[-2\,;4]\,;\ [-3\,;-1]$ E) N.A.

37.- Si : $A=Dom\,(F)\ \wedge\ B=Ran\,(F)$,

siendo : $F(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$; hallar : A - B

A) $\{-2\,;-3\}$ B) $\{-4\,;1\}$ C) $\mathbb{R}$

D) $\langle -\infty\,;-4\rangle$ E) $\langle -4\,;1\rangle$

38.- ¿Cuántas asintotas verticales tiene la función :

$$F(x)=\frac{2}{x^2-4}\ ?$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) ninguna

39.- Si el dominio de :

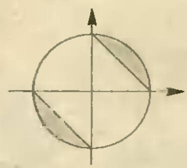
$$F(x)=\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{7x-x^2-12}}\ ,\text{es : } [a\,;b\rangle-\{c\}\ ;$$

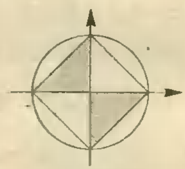
calcular : $a+b+c$

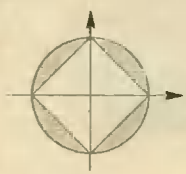
A) 7 B) 5 C) 12 D) 8 E) 9

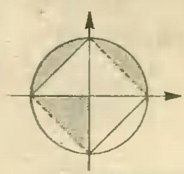
40.- Hallar la región del plano en $\mathbb{R}^2$, definida por las inecuaciones :

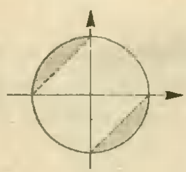
$$\begin{cases} |x|+|y|\geq 1 \\ x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$$

A)


B)


C)


D)


E)


24 Funciones II

24.1) GRAFICAS DE FUNCIONES EN $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Si F es una función real de variable real, la gráfica de F es la representación geométrica de los pares ordenados que pertenecen a F. Una función se grafica en un sistema de coordenadas cartesianas (plano X -Y), siguiendo los mismos pasos empleados para graficar relaciones ,los cuales se expusieron en el Cap.23.

1^er^ Ejemplo.- *Graficar la siguiente función* F : $\quad F = \{(1 ; 2) , (-1 ; 2) , (0 ; 3)\}$

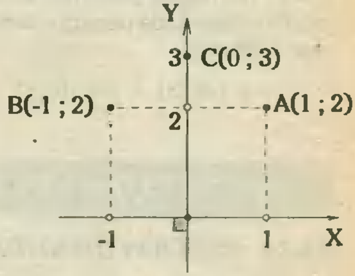
Resolución.-

La gráfica de la función F dada corresponde a 3 puntos en el plano X-Y, veamos :

A : (1 ; 2)

B : (-1 ; 2)

C : (0 ; 3)



2^do^ Ejemplo.- *Graficar la función F definida por :* $\quad F = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;/\; y = \sqrt{9-x^2}\right\}$

Resolución.-

Para graficar correctamente a la función F será necesario encontrar su dominio y rango.

a) Cálculo del Dom (F)

De la regla de correspondencia dada se sabe que : $\quad y = \sqrt{9-x^2}$

Analizando la cantidad subradical se deberá cumplir : $\quad 9 - x^2 \geq 0$

Multiplicando por -1, se obtiene : $\quad x^2 - 9 \leq 0$

Factorizando se logra establecer que : $\quad (x + 3)(x - 3) \leq 0$

Resolviendo , concluímos que : $\quad x \in [-3 ; 3]$

$\therefore \quad$ ***Dom (F) = x ∈ [-3 ; 3]***

b) Cálculo del Ran (F).-

De la regla de correspondencia , se sabe que : $y = \sqrt{9-x^2}$ ... (I)

De acuerdo con el paso anterior , sabemos que : $\sqrt{9-x^2} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$ ... (II)

De (I) despejando x , se obtiene : $x = \sqrt{9-y^2}$

De donde se cumple que : $9 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 9 \leq 0$,

Factorizando el 1er miembro, se obtiene : $(y + 3)(y - 3) \leq 0$

Resolviendo obtenemos : $-3 \leq y \leq 3$ ...(III)

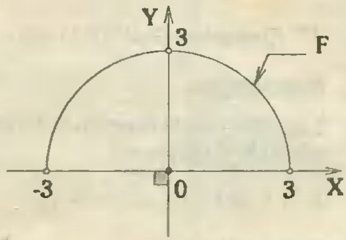
Finalmente debemos notar que el rango de F viene dado por la intersección de II y III, es decir:

$$Ran\ (F) = y \in [0 ; 3]$$

c) Gráfica de F.-

De la regla de correspondencia, tenemos : $x^2 + y^2 = 3^2$, la cual representa una circunferencia con *centro* en (0 ; 0), y , *radio* : $r = 3$. Asimismo debemos observar que la gráfica de la función F estará dada por aquella parte de la circunferencia dada que verifique :

$x \in [-3 ; 3] \wedge y \in [0 ; 3]$ ... *Dom* (F) $\wedge$ *Ran* (F)



24.2) FUNCIONES ESPECIALES

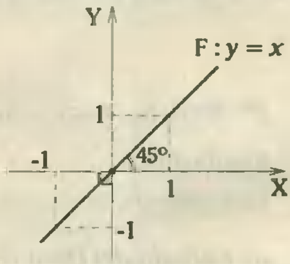
24.2A FUNCION IDENTIDAD

Se simboliza por **I**, y su regla de correspondencia es así :

$y = \mathbf{I}(x) = x$, es decir : $\boxed{F(x) = x}$, donde :

Dom (**I**) = $\mathbb{R}$ ... ($x \in \mathbb{R}$) $\wedge$ *Ran* (**I**) = $\mathbb{R}$ ... ($y \in \mathbb{R}$)

Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo de 45° con el *semieje* positivo de las x, veamos :



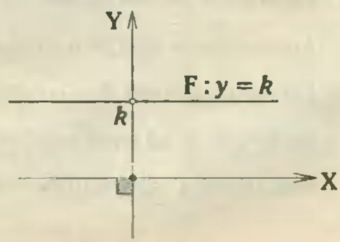
24.2B FUNCION CONSTANTE

Se simboliza por C, y su regla de correspondencia viene dada por :

$y = C(x) = k$, es decir : $\boxed{F(x) = k}$; $k \in \mathbb{R}$, donde :

Dom (C) = $\mathbb{R}$ ... ($x \in \mathbb{R}$) $\wedge$ *Ran* (C) = k ... (y toma un solo valor)

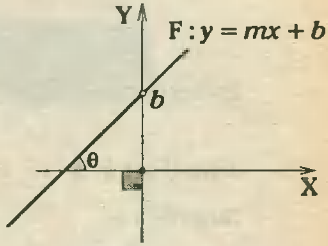
Su gráfica es una recta paralela al eje X , veamos :



Observación : Si : $k = 0$, la función constante será : $y = 0$, a la cual llamaremos : FUNCION NULA, siendo su gráfica la recta: $y = 0$ ... (eje de las X).

24.2C FUNCION LINEAL

Está determinada por la regla de correspondencia.



$$y = F(x) = mx + b$$

donde "m" y "b" son constantes , siendo además : $m \neq 0$

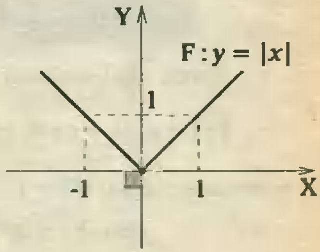
Dom (F) = $\mathbb{R}$ ... ($x \in \mathbb{R}$) $\wedge$ *Ran* (F) = $\mathbb{R}$ ... ($y \in \mathbb{R}$)

Su gráfica es como se muestra al lado :

Observación : Al coeficiente m se le llama Pendiente de la Recta y es tal que : $m = \text{tg}\ \theta$

24.2D FUNCION VALOR ABSOLUTO

Está determinada por la regla de correspondencia.



$$y = F(x) = |x|$$

Es decir : $y = F(x) = \begin{cases} x & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$; donde :

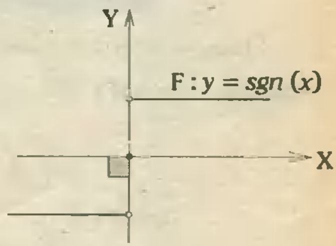
Dom (F) = $\mathbb{R}$ ... ($x \in \mathbb{R}$) $\wedge$ *Ran* (F) = $[0 ; \infty\rangle$

Su gráfica es como se indica al lado :

24.2E FUNCION SIGNO

Se simboliza por *sgn* , su regla de correspondencia viene dada por :

$$y = F(x) = sgn(x)$$



Es decir : $y = sgn(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$; donde :

Dom (F) = $\mathbb{R}$ ... ($x \in \mathbb{R}$) $\wedge$ *Ran* (F) = {-1 ; 0 ; -1}

Su gráfica es como la que se muestra al lado :

24.2F FUNCION ESCALON UNITARIO

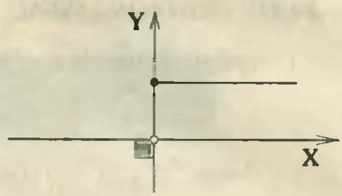
Se simboliza por U , su regla de correspondencia viene dada por :

$$y = F(x) = U(x)$$

Es decir : $y = U(x) = \begin{cases} 0 \ ; & x < 0 \\ 1 \ ; & x \geq 0 \end{cases}$; donde :

Dom (F) = $\mathbb{R}$ ... ($x \in \mathbb{R}$) $\wedge$ *Ran* (F) = {0 ; 1}

Su gráfica es :



24.2G FUNCION MAXIMO ENTERO

Se simboliza por [[ ]] , y su regla de correspondencia viene dada por :

$$y = F(x) = [\![x]\!]$$

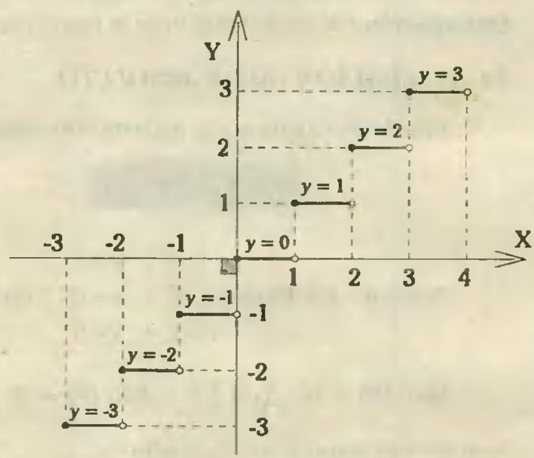
Donde : $[\![x]\!]$ se define así :

$[\![x]\!] = y \Leftrightarrow y \leq x < y + 1 \ ; \ y \in \mathbb{Z}$

Asimismo : *Dom* (F) = $\mathbb{R}$ ... ($x \in \mathbb{R}$) $\wedge$

Ran (F) = $\mathbb{Z}$ ($y \in \mathbb{Z}$)

Su gráfica es la mostrada al lado :



24.2H FUNCION CUADRATICA

Está determinada por la regla de correspondencia.

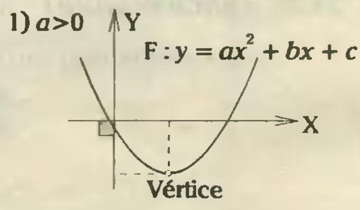
$$y = F(x) = ax^2 + bx + c$$

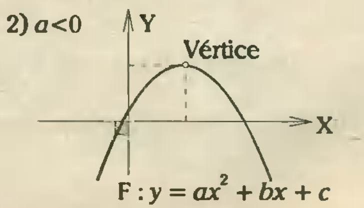
Donde : a , b $\wedge$ c son constantes , tal que : $a \neq 0$

Además : *Dom* (F) = $\mathbb{R}$ ... ($x \in \mathbb{R}$)

$$Ran\,(F) = \begin{cases} y \in \left[F\left(-\dfrac{b}{2a}\right) ; \infty \right\rangle & ; a > 0 \\ y \in \left\langle -\infty ; F\left(-\dfrac{b}{2a}\right) \right] & ; a < 0 \end{cases}$$

La concavidad será hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo de «a».





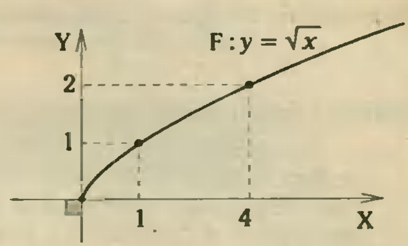
24.2I FUNCION RAIZ CUADRADA

Se simboliza por $\sqrt{\ }$, su regla de correspondencia viene dada por :

$$y = F(x) = \sqrt{x}$$

Donde : *Dom* (F) $= x \in [0\,;\infty\rangle \;\wedge$

Ran (F) $= y \in [0\,;\infty\rangle$



Su gráfica es una porción de parábola , como la mostrada al lado :

24.2J FUNCION CUBICA

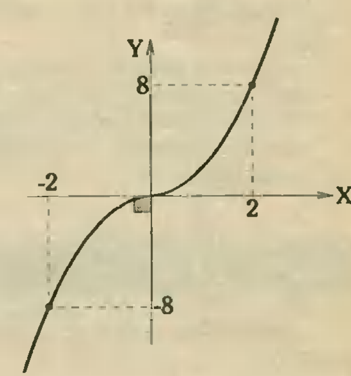
Está determinada por la regla de correspondencia.

$$y = F(x) = x^3$$

Donde : *Dom* (F) $= \mathbb{R} \ldots (x \in \mathbb{R}) \;\wedge$

Ran (F) $= \mathbb{R} \ldots (y \in \mathbb{R})$

Su gráfica es como la que se muestra al lado :



24.2K FUNCION POLINOMICA

Es aquella función con dominio en $\mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia viene dada por :

$$y = F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

Donde : n es un número entero no negativo, y, $a_0\,;a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_n$, son constantes tal que : $a_0 \neq 0$.

Observación : *Las funciones :* Constante, Lineal *y* Cuadrática *; son casos particulares de la función polinómica, notar que estas ocurren para* n = 0, n = 1 y n = 2 *respectivamente.*

24.2L FUNCION RACIONAL

Si $g \wedge h$ son funciones polinómicas, la función F cuya regla de correspondencia es así :

$$y = F(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n} \quad ;$$

se denomina Función Racional.

El *Dominio* de una Función Racional es el conjunto de los números reales tales que : $h(x) \neq 0$

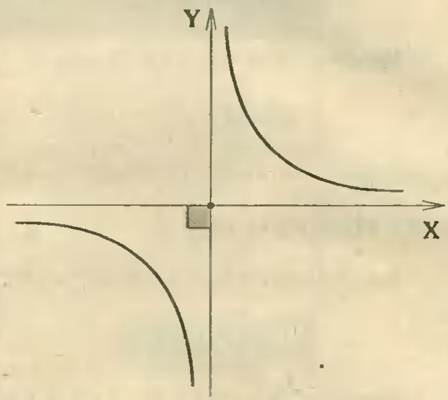
Observación : *Cualquier función polinómica es una función racional, esto ocurre cuando* h (x) *es una función constante, en particular cuando* h (x) = 1 ; ∀ x ∈ Dom (h).

Ejemplo.- *Analizar la función F definida por F :* $y = \dfrac{1}{x}$

Se logra reconocer que F es una función racional puesto que el numerador es una función constante y el denominador es una función lineal de pendiente 1. De este modo se puede afirmar que :

$$Dom\,(F) = \mathbb{R} - \{0\} \;\wedge\; Ran\,(F) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asimismo podemos reconocer que la gráfica será simétrica con relación al origen de coordenadas y tendrá como asintotas a los propios ejes cartesianos. La curva obtenida se denomina hipérbola.



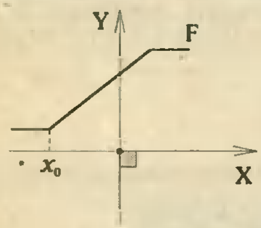
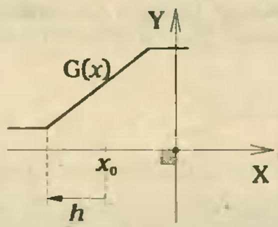
24.3) DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LA GRAFICA DE F

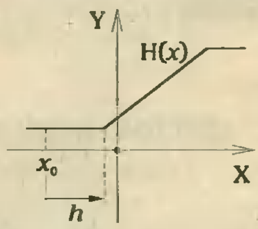
Conociendo la gráfica de una función F (x) y considerando una constante h tal que $h > 0$ tenemos :

24.3A DESPLAZAMIENTOS

La gráfica de una función F (x) puede desplazarse horizontalmente y/o verticalmente según.

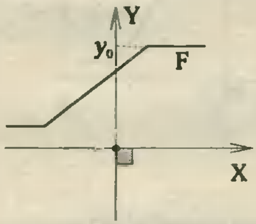
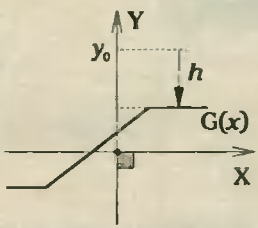
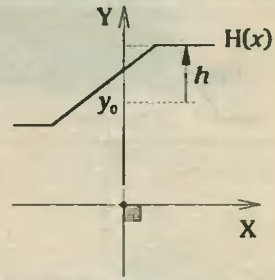
I) DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

<table>
<tr><th>F(x)</th><th>G(x) = F(x + h)</th><th>H(x) = F(x - h)</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

La gráfica original de F se encuentra desplazada h unidades hacia la izquierda.</td>
<td>

La gráfica original de F se encuentra desplazada h unidades hacia la derecha.</td>
</tr>
</table>

II) DESPLAZAMIENTO VERTICAL

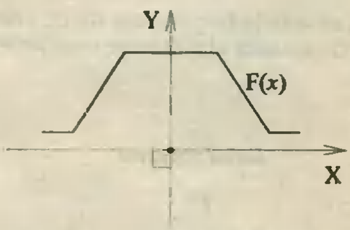
F(x)	G(x) = F(x) - h	H(x) = F(x) + h
	 La gráfica original de F se encuentra desplazada h unidades hacia abajo.	 La gráfica original de F se encuentra desplazada h unidades hacia arriba.

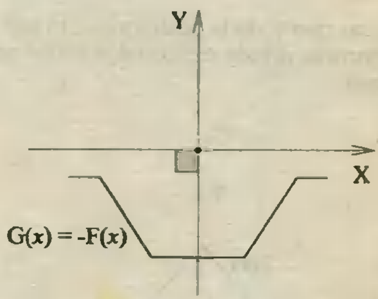
24.3B GIROS (REFLEJO EN LOS EJES)

La gráfica de una función F(x) puede reflejarse considerando como un espejo a cualquiera de los ejes coordenados. Este efecto se entiende mejor si se tiene una idea espacial del suceso, observándose que cada curva gira con relación al eje, un ángulo de 180° . Veamos :

I) GIRO O REFLEJO CON RELACIÓN AL EJE X

En estos casos se puede apreciar que la gráfica de F(x) luego del giro , aparece invertida con relación al eje X .

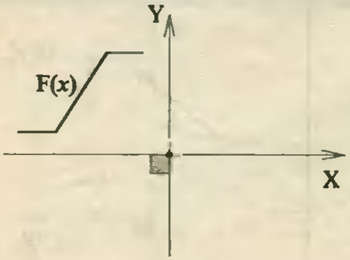


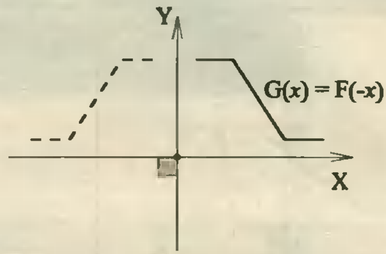


Podemos observar que el eje X se comporta como un espejo al anteponer el signo menos (-) a la regla de correspondencia de la función. Esto significa que dada una función F(x), la función : -F(x), resulta ser el giro de F(x) con relación al eje X.

II) GIRO O REFLEJO CON RELACION AL EJE Y

En estos casos se puede apreciar que la gráfica de F(x) luego del giro , aparece invertida con relación al eje X .

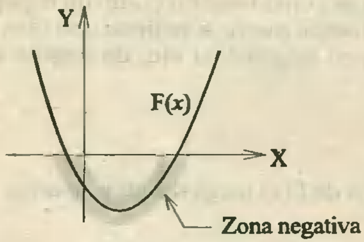


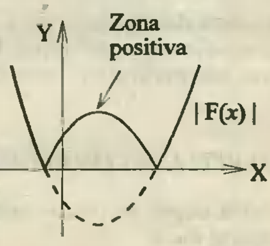


Podemos observar que el eje Y se comporta como un espejo al anteponer el signo menos (-) a la variable de la función. Esto significa que dada una función F(x), la función : F(-x), resulta ser el giro de F(x) con relación al eje Y.

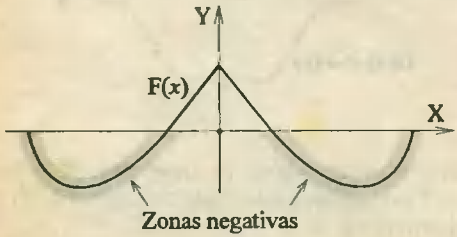
III) GIROS ORIGINADOS POR VALOR ABSOLUTO

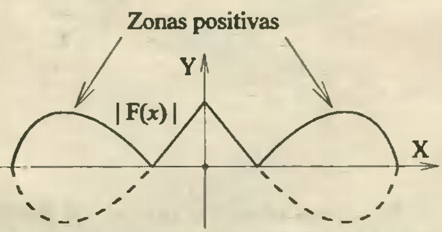
Reconocemos que el efecto principal que tiene el valor absoluto es el de hacer positiva toda una expresión, lo que provoca un gráfico ubicado siempre sobre el eje X . Veamos :





Observar que toda la parte que está por debajo del eje x, se refleja por encima de él. Veamos otro ejemplo donde existen dos zonas negativas las que con el valor absoluto se convierten en positivas :



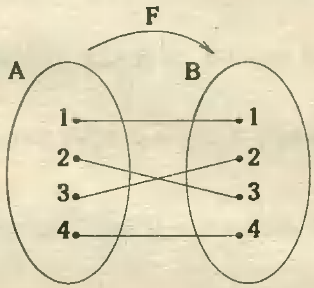


24.4) CLASES DE FUNCIONES

24.4A FUNCION INYECTIVA O UNIVALENTE

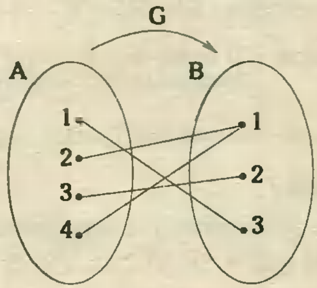
Una función F es Inyectiva si a cada elemento del *rango* le corresponde un único elemento del *dominio*.

1er) Ejemplo.- *Sea la función numérica F representada por el diagrama sagital.*



Es decir : F = {(1 ; 1) , (2 ; 3) , (3 ; 2) , (4 ; 4)}, es Inyectiva puesto que a cada elemento del rango le corresponde solo un elemento del dominio.

2do) Ejemplo.- *Analicemos a la función G definida por el diagrama sagital :*

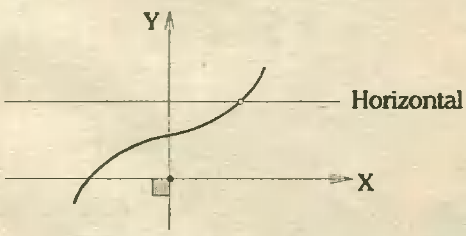


G = {(1 ; 3) , (2 ; 1) , (3 ; 2) , (4 ; 1)} no es Inyectiva, pues al elemento «1» del rango le corresponden dos elementos del dominio : «2 ∧ 4 ».

RECONOCIMIENTO GRAFICO

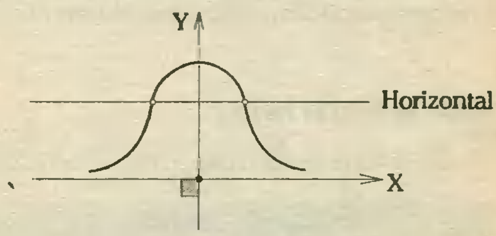
Si F es una función real de variable real Inyectiva, entonces toda recta horizontal debe cortar a su gráfica en un solo punto.

1er) Ejemplo.- *Sea la función F cuya gráfica es :*



Reconocemos que es una función Inyectiva, dado que la recta horizontal mostrada corta a su gráfica en solo un punto.

2do) Ejemplo.- *Sea la función G cuya gráfica es :*



Reconocemos que no es una función Inyectiva, dado que la recta horizontal mostrada corta a su gráfica en más de un punto.

DEFINICION PRACTICA

Una función F es Inyectiva si para cada : x_1 , $x_2 \in$ *Dom* (F), se cumple la relación :

$$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

24.4B FUNCION SURYECTIVA, SOBREYECTIVA O EPIYECTIVA

Una función F es Suryectiva si el rango o imagen de F coincide con el conjunto de llegada, es decir, dada la función F : A → B , F es Suryectiva si y solamente si $\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A / F(x) = y$, equivalentemente : *Ran* (F) = B.

Observación : *Si se da una función F y no se especifica el conjunto de llegada la función es implícitamente Suryectiva.*

Ejemplo.- *Determinar si la función definida por* $F(x) = x^2 + 3x + 1$; $x \in\ <-3 ; 2]$ *es Suryectiva.*

Resolución.-

Como no se especifica el conjunto de llegada, se podrá afirmar que la función F definida por : $F(x) = x^2 + 3x + 1$, $x \in \langle -3 ; 2]$ es Suryectiva.

24.4C FUNCION BIYECTIVA

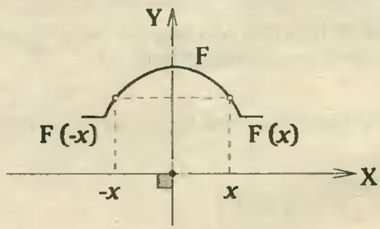
Una función F que va desde A hasta B (F : A → B), es Biyectiva si es a la vez Inyectiva y Suryectiva.

24.5) FUNCIONES IMPORTANTES

24.5A FUNCION PAR

Si F es una función Par, debe verificarse que :

$$F(-x) = F(x)\ ;\ \forall\, x \in Dom(F) \Rightarrow -x \in Dom(F)$$

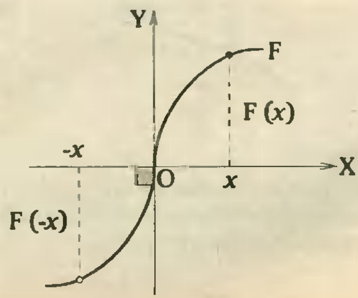


Se reconoce gráficamente por su simetría al eje Y.

24.5B FUNCION IMPAR

Si F es una función Impar, debe verificarse que :

$$F(-x) = -F(x)\ ;\ \forall\, x \in Dom(F) \Rightarrow -x \in Dom(F)$$



Se reconoce gráficamente por su simetría respecto al origen O de coordenadas.

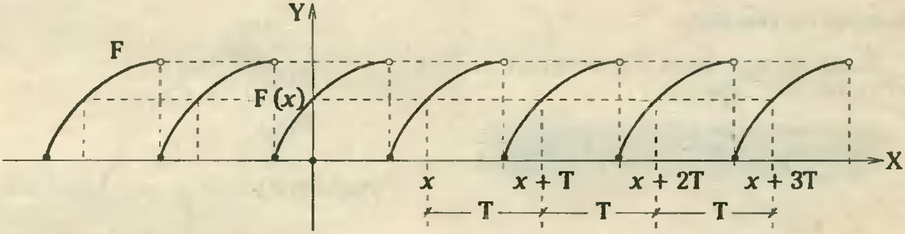
24.5C FUNCION PERIODICA

Una función F se denomina Periódica, si existe un número real $T \neq 0$, denominado período tal que T es el menor número positivo que verifica las siguientes condiciones :

1^{ra}) $x \in Dom\,(F) \Rightarrow (x + T) \in Dom\,(F)$

2^{da}) $F(x + T) = F(x)$; $\forall x \in Dom\,(F)$

Observación : *Toda función periódica tiene su gráfica de tal manera que la misma forma que tiene en un intervalo de longitud T se repite horizontalmente y periódicamente en el anterior y en el siguiente intervalo de longitud T.*



De la gráfica podemos observar que : $F(x) = F(x + T)$. Notar también que si T es un período de F ; 2T , 3T, ... también lo son.

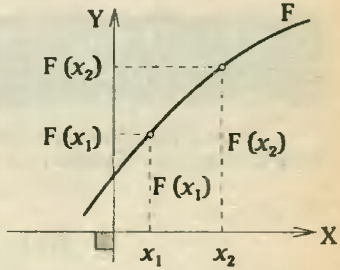
24.5D FUNCION MONOTONA

Una función F se llama Monótona si corresponde a cualquiera de las siguientes funciones que a continuación indicaremos :

I) Función Creciente.-

Sean: $x_1, x_2 \in Dom\,(F)$, entonces se dice que F es creciente :

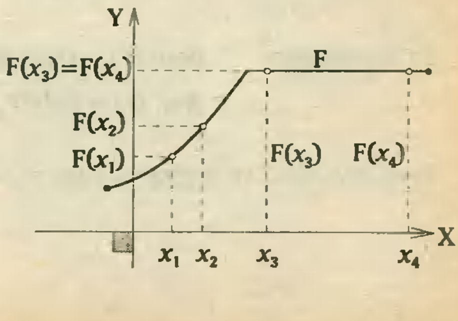
$$\textit{Si}: x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$



II) Función No Decreciente.-

Sean: $x_1, x_2 \in Dom\,(F)$, entonces se dice que F es no decreciente :

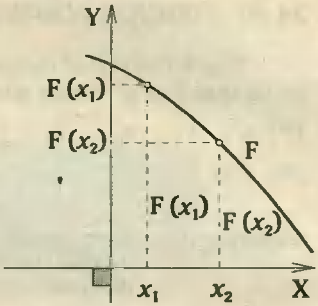
$$\textit{Si}: x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$



III) Función Decreciente.-

Sean: $x_1, x_2 \in Dom$ (F), entonces se dice que F es decreciente :

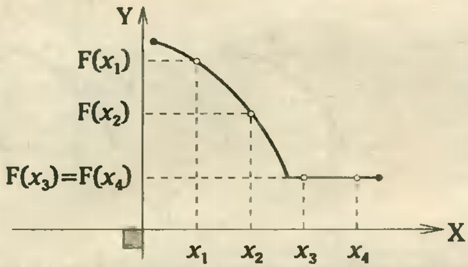
$$Si: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ F(x_1) > F(x_2)$$



IV) Función No Creciente.-

Sean: $x_1, x_2 \in Dom$ (F), entonces se dice que F es no creciente :

$$Si: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ F(x_1) \geq F(x_2)$$



Observaciones :

1. A la función Creciente también se le llama Estrictamente Creciente, asimismo como a la función Decreciente también se le podrá llamar Estrictamente Decreciente.
2. Si una función F es Creciente o Decreciente entonces se podrá afirmar que F es una función Inyectiva.

24.6) FUNCIONES CON VARIAS REGLAS DE CORRESPONDENCIA

Si una función F está constituida por varias reglas de correspondencias o funciones parciales; como por ejemplo :

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) \ ; \ x \in Dom\,(F_1) = A \\ F_2(x) \ ; \ x \in Dom\,(F_2) = B \end{cases} \quad ; \text{donde} : A \cap B = \phi$$

Se cumple que : $\quad$ ***Dom (F) = Dom*** $(F_1) \cup$ ***Dom*** $(F_2) = A \cup B$

$$Ran\,(F) = Ran\,(F_1) \cup Ran\,(F_2)$$

Estos resultados se extienden a funciones con tres o más funciones parciales.

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Obtener la gráfica de la función $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por : $F(x) = \begin{cases} 0 \ ; \ si \ x = 0 \\ 1 \ ; \ si \ x \ es \ par \\ -1 \ ; \ si \ x \ es \ impar \end{cases}$

Resolución.-

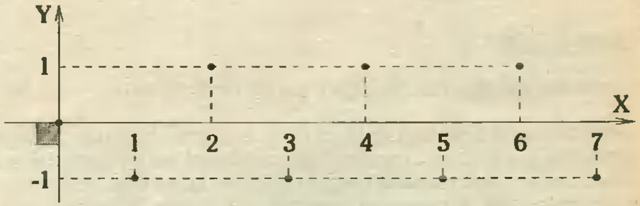
De la regla de correspondencia se establece :

Para $x = 0 \Rightarrow F(0) = 0$ ... F_1

Para x = par $\Rightarrow F(x) = 1$ ... F_2

Para x = impar $\Rightarrow F(x) = -1$ ... F_3

Finalmente; la gráfica de F viene dada por la unión de las gráficas de F_1 ; $F_2 \wedge F_3$, veamos :



2.- Con respecto al problema anterior, determinar si F es una función Inyectiva

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 24.4A si una función es Inyectiva toda recta horizontal deberá cortar a su gráfica en un solo punto; si observamos la gráfica de F podemos notar que tal condición no se cumple :

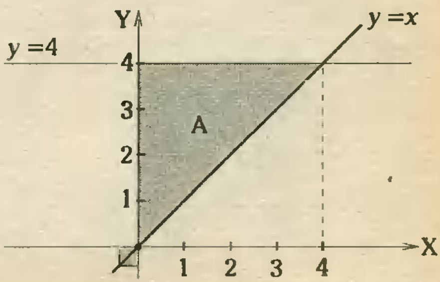
$\therefore$ ***F no es Inyectiva***

3.- Hallar el área del triángulo que resulta de intersectar la gráfica de la función identidad con la función constante : y = 4 y el eje y.

A) 2 u^2 ***B) 4 u^2*** ***C) 6 u^2*** ***D) 8 u^2*** ***E) 10 u^2***

Resolución.-

De acuerdo al enunciado podemos graficar :

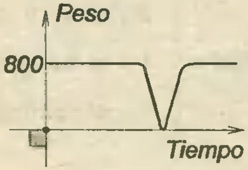


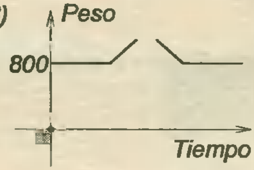
Luego observamos que el área pedida le corresponde al triángulo rectángulo sombreado.

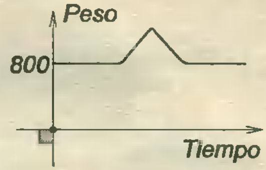
Finalmente : $A = \dfrac{4 \cdot 4}{2}$

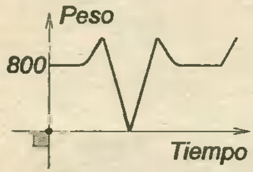
$\therefore$ $\boldsymbol{A = 8\ u^2}$ ***RPTA. D***

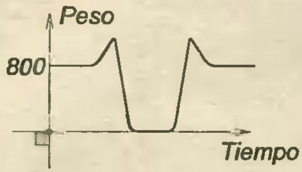
4.- Una persona pesa 800N y está parada sobre una balanza digital . A continuación da un salto sobre ella ¿Qué gráfica representa mejor lo que indica la balanza durante estas circunstancias?

A)


B)


C)


D)


E)


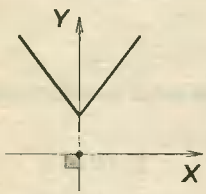
Resolución.-

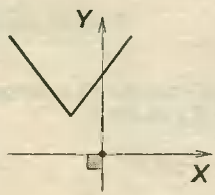
De acuerdo al enunciado podemos deducir que :

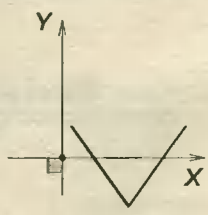
«Mientras la persona está parada sobre la balanza, ésta indica 800 *N* . Cuando el hombre se impulsa para saltar la lectura de la balanza aumenta debido a una mayor presión sobre la plataforma. Cuando el hombre está en el aire, la lectura de la balanza desciende hasta hacerse cero. A continuación, cuando el hombre cae sobre la balanza, la lectura aumenta por encima de los 800*N*, para finalmente estabilizarse en 800*N*.»

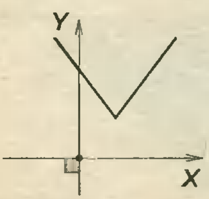
Luego la gráfica que mejor concuerda con esta descripción, es la ***E*** ***RPTA. E***

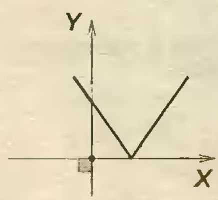
5.- La gráfica de la función : F definida por : $F : y = |x - 1| + 3$ ***; es aproximadamente :***

A)


B)


C)


D)


E)


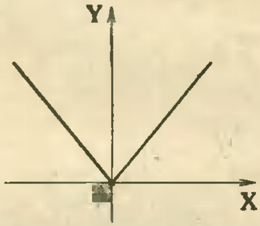
<u>Resolución</u>.-

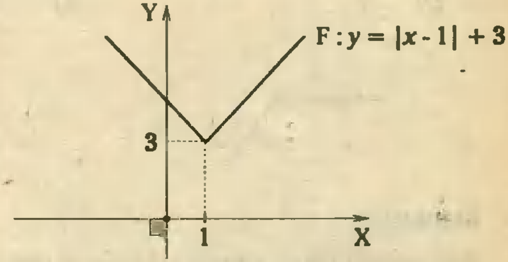
La función F, se puede expresar así : $y - 3 = |x - 1|$ ... (*)

Una simple inspección de (*) nos permite afirmar que la función dada proviene de la función valor absoluto : $y = |x|$

De acuerdo con lo expuesto en el item 24.3 podemos notar que la gráfica de : $y = |x|$ se deberá desplazar una unidad en el eje x (hacia la derecha) y tres unidades en el eje y (hacia arriba) , obteniéndose :

$$F: \quad y = |x - 1| + 3$$





La gráfica de esta función sería la ***D***. ***RPTA. D***

6.- Demostrar que la función F : $y = x^3 - 1$, es Inyectiva.

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con lo expuesto con el item 24.4A, si F es una función Inyectiva, se deberá cumplir que :

$$\forall (x_1 ; x_2) \in \text{Dom (F)} / F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

La función dada es : $F(x) = x^3 - 1$

Si : $(x_1 ; x_2) \in$ *Dom* (F) planteamos : $F(x_1) = F(x_2)$

Es decir : $x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$

$$x_1^3 - x_2^3 = 0$$

$$(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) = 0$$

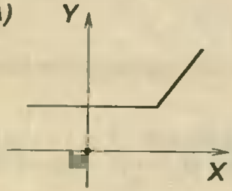
Como : $x_1^2 + x_1 . x_2 + x_2^2 \geq 0 \; ; \; \forall x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R}$

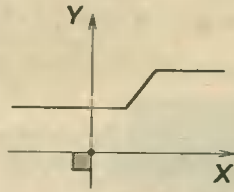
Se cumple : $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

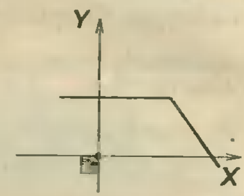
Como hemos demostrado que se trata del mismo elemento del *Dominio* de F ; por lo tanto podemos asegurar que no hay elementos distintos del *Dominio* de F con la misma imagen.

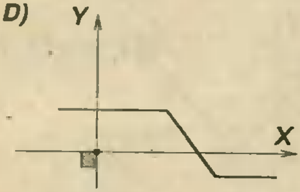
$\therefore$ ***F es Inyectiva***

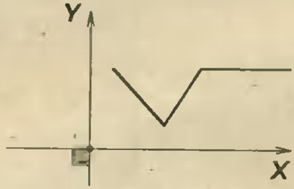
7.- ¿Cuál de las siguientes graficas representa a la función F definida por: $F: y = |x - 1| + x$?

A)


B)


C)


D)


E)


Resolución.-

Para graficar correctamente la función dada, debemos eliminar el Valor absoluto, para lo cual se deberán considerar 2 casos. Veamos:

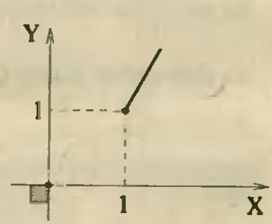
Caso (I):

Cuando: $x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$

Luego: $F: y = x - 1 + x$

Es decir: $F: y = 2x - 1 \iff x \geq 1$

La gráfica se muestra al lado:



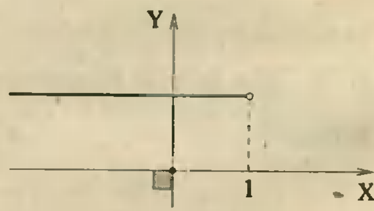
Caso (II):

Cuando: $x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$

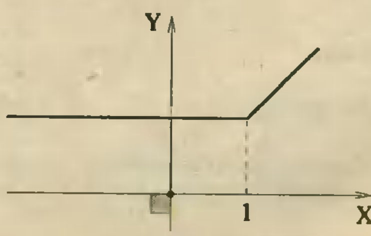
Luego: $F: y = -(x - 1) + x$

Es decir: $F: y = 1 \iff x < 1$

La gráfica se muestra al lado:



Finalmente la gráfica de la función $F: y = |x - 1| + x$; viene dada por la unión de (I) $\wedge$ (II).



RPTA. A

8.- Sea la función :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ ; \ x \in \langle 0\,;1\rangle \\ 1 \ ; \ x \in [1\,;2\rangle \cup \langle 4\,;5\rangle \\ 2 \ ; \ x = 2 \\ 3 \ ; \ x \in \langle 2\,;3\rangle \end{cases}$$

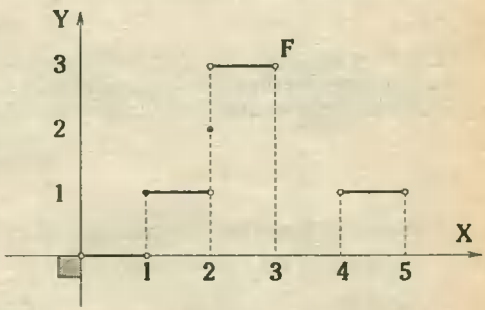
Entonces F es :

A) No Creciente en $\langle 0\,;2]$ **B) No Creciente en $\langle 2\,;5\rangle$** **C) No Decreciente en $\langle 2\,;5\rangle$**

D) Constante en $\langle 1\,;3\rangle$ **E) No Decreciente en $\langle 3/2\,;5/2\rangle$** **UNI 90**

Resolución.-

Para un mejor análisis resulta necesario graficar la función F. Veamos :



Al observar la gráfica, tenemos en cuenta la definición expuesta en el item 24.5D II, según la cual se puede afirmar la función F es No Decreciente en el intervalo :

$\langle 3/2\,;5/2\rangle$ **RPTA. E**

9.- Dada la función $F : y = [\![x]\!]$; determinar si es periódica.

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 24.5C procederemos así :

a) Suponemos que existe un periodo T > 0 , tal que :

$$F(x + T) = F(x)$$

b) Utilizando la función dada, tendremos :

$$[\![x+T]\!] = [\![x]\!] \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$$

c) En particular si : $x = 0$, la igualdad anterior se seguirá verificando, entonces :

$$[\![0 + T]\!] = [\![0]\!] \quad \Rightarrow \quad [\![T]\!] = 0$$

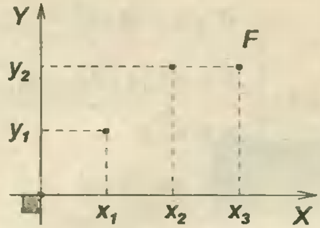
De acuerdo con la definición de Máximo Entero, esta última igualdad se verifica si :

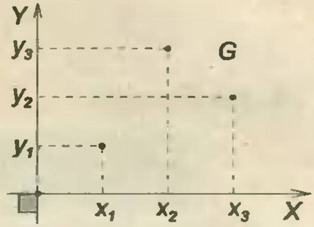
$$0 \le T < 1$$

Podemos notar que en dicho intervalo, no existe ningún T mínimo positivo, luego :

$F : y = [\![x]\!]$ ***¡ No es periódica !***

10.- A continuación se muestran 2 funciones : ¿Cuál de ellas es Biyectiva?





Resolución.-

Al observar detenidamente cada función, podemos afirmar lo siguiente :

a) F: No es Inyectiva. Observamos que a un mismo elemento del rango (Y), le corresponden dos elementos del dominio (X), luego no cumple con la definición de función inyectiva. Sin embargo F si es Suryectiva, pero como una función es Biyectiva si y solo si es Inyectiva y Suryectiva a la vez, concluimos que :

F : no es Biyectiva

b) G: Si es Inyectiva . Se puede notar que a cada elemento del rango (Y) le corresponde un único elemento del dominio (X), con lo cual se satisface la definición de función inyectiva.. Asimismo se observa que G es Suryectiva ; concluyéndose asi que la función G es Biyectiva.

$\therefore$ ***Solo G es Biyectiva***

11.- Hallar el área del triángulo que se genera por la intersección de la función :
$F : y = 2 - |x + 1|$ con el eje X.

A) 2 u^2 *B) 8 u^2* *C) 4 u^2* *D) 10 u^2* *E) 6 u^2*

Resolución.-

Inspeccionando la función dada, podemos predecir que ésta se puede obtener a partir de un desplazamiento de la gráfica para : $y = |x|$, la misma que se representa por la Fig. 1 :

Fig. 1

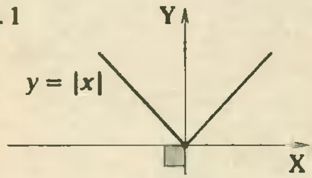


Fig. 2

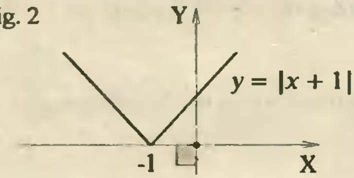


Fig. 3

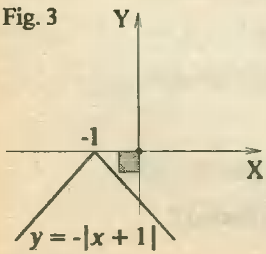


Fig. 4

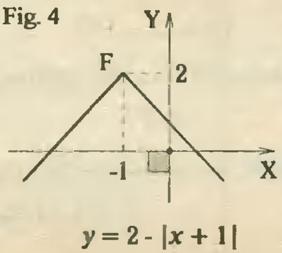
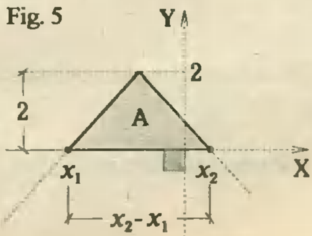


Fig. 5



A continuación desplazamos a dicha gráfica, una unidad (1) hacia la izquierda, obteniéndose la gráfica de la función : $y = |x+1|$; la cual está representada por la Fig.2

Ahora giraremos la última gráfica obtenida , con respecto del eje X. De este modo se obtiene una nueva función, que se expresa asi : $y = -|x+1|$; la misma que se representa por la Fig. 3 :

Finalmente desplazaremos esta última gráfica, dos unidades (2) hacia arriba, obteniéndose la gráfica de una nueva función que coincide con la propuesta en el problema : $y = 2 - |x + 1|$; la cual esta representada por la Fig. 4 :

De la última gráfica podemos notar que el área pedida es la del triángulo ubicado encima del eje X; debiendo reconocerse que su valor dependerá de los valores que asuman $x_1 \wedge x_2$. Para ello recurriremos a la función obtenida en la Fig. 4, haciendo : $y = 0$

$$0 = 2 - |x + 1| \quad \Rightarrow \quad |x + 1| = 2$$

Por definición : $x + 1 = 2 \quad \vee \quad x + 1 = -2$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -3$$

En consecuencia se deduce : $x_2 = 1 \quad \wedge \quad x_1 = -3$

De este modo el área buscada, se encontrará asi : $A = \dfrac{(x_2 - x_1) \,.\, 2}{2}$

Reemplazando datos, se tendrá : $A = 1 - (-3)$

$\therefore$ $\boldsymbol{A = 4\,u^2}$ ***RPTA. C***

12.- La función $F : y = \left(x\,|x| + \dfrac{1}{x}\right) \text{sen}\, x^2$ ¿Es par o impar?

Resolución.-

Para empezar recordemos las definiciones siguientes :

1) F es par si : $F(x) = F(-x)$; $\forall\, x \in \text{Dom}(F) \quad \Rightarrow -x \in Dom(F)$

2) F es impar si : $F(-x) = -F(-x)$; $\forall\, x \in \text{Dom}(F) \quad \Rightarrow -x \in Dom(F)$

La función dada es : $F(x) = \left[x\,|x| + \dfrac{1}{x}\right] \text{sen}\, x^2 \quad \ldots \quad (*)$

Ahora hagamos : $x = -x \quad \Rightarrow \quad F(-x) = \left[(-x)\,|-x| + \dfrac{1}{(-x)}\right] \text{sen}\,(-x)^2$

Recordemos que : $|x| = |-x| \quad \Rightarrow \quad F(-x) = \left(-x\,|x| - \dfrac{1}{x}\right) \text{sen}\, x^2$

Efectuando tendremos : $F(-x) = -\left(x\,|x| + \dfrac{1}{x}\right) \text{sen}\, x^2 \quad \ldots\ldots (**)$

De (*) y (**), observamos que : $F(-x) = -F(x)$

$\therefore$ ***F es una función impar***

24.7) IGUALDAD DE FUNCIONES

Dadas las funciones F y G, éstas serán iguales si cumplen dos condiciones :

I) $F(x) = G(x)\ ;\ \forall\, x \in Dom(F)$
II) $Dom(F) = Dom(G)$ ... Dominios iguales

Ejemplo.- *Determinar si las funciones* F y G *son o no iguales* :

$$F : y = 2x + 1\ ;\ \ x \in \langle -10\,;2\rangle$$

$$G : y = 2x + 1\ ;\ \ x \in \langle 4\,;12\rangle$$

<u>Resolución</u>.-

De acuerdo con la definición :

I) Puesto que : $2x + 1 = 2x + 1 \ \Rightarrow\ F(x) = G(x)$,

II) Sin embargo : *Dom* (F) ≠ *Dom* (G) ; dado que : $\langle -10\,;2\rangle \neq \langle 4\,;12\rangle$

$\therefore$ ***$F \wedge G$ "no son iguales"***

24.8) ALGEBRA DE FUNCIONES

Dadas dos funciones reales F y G cuyas reglas de correspondencias son : $F(x) \wedge G(x)$, se definen cuatro operaciones : Adición, Sustracción, Multiplicación y División, de la siguiente manera :

I) Adición : $F+G = \{(x\,;y)\,/\,y = F(x) + G(x)\}$

$$Dom(F+G) = Dom(F) \cap Dom(G)$$

II) Sustracción : $F-G = \{(x\,;y)\,/\,y = F(x) - G(x)\}$

$$Dom(F-G) = Dom(F) \cap Dom(G)$$

III) Multiplicación : $F\,.\,G = \{(x\,;y)\,/\,y = F(x)\,.\,G(x)\}$

$$Dom(F\,.\,G) = Dom(F) \cap Dom(G)$$

IV) División : $\dfrac{F}{G} = \left\{(x\,;y)\,/\,y = \dfrac{F(x)}{G(x)}\right\}$

$$Dom\left(\frac{F}{G}\right) = Dom(F) \cap Dom(G)\ \wedge\ G(x) \neq 0$$

Ejemplo.- *Si* : $F = \{(1\,;2)\,,(5\,;3)\,,(4\,;7)\,,(8\,;1)\}$

$$G = \{(5\,;1)\,,(8\,;0)\,,(1\,;4)\}$$

Encontrar las funciones : $F + G\ ;\ F - G\ ;\ F\,.\,G$ y $\dfrac{F}{G}$

Resolución.-

De las funciones dadas tenemos : *Dom* (F) = {1 ; 5 ; 4 ; 8} $\wedge$ *Dom* (G) = {5 ; 8 ; 1}

Podemos observar que : *Dom* (F) $\cap$ *Dom* (G) = {1 ; 5 ; 8}

A continuación hallaremos cada operación pedida :

a) Para F + G : F + G = {(1 ; 2 + 4) , (5 ; 3 + 1) , (8 ; 1 + 0)}

F + G = {(1 ; 6) , (5 ; 4) , (8 ; 1)}

Dom (F + G) = {1 ; 5 ; 8}

b) Para F - G : F - G = {(1 ; 2 - 4) , (5 ; 3 - 1) , (8 ; 1 - 0)}

F - G = {(1 ; -2) , (5 ; 2) , (8 ; 1)}

Dom (F - G) = {1 ; 5 ; 8}

c) Para F . G : F . G = {(1 ; 2 · 4) , (5 ; 3 · 1) , (8 ; 1 · 0)}

F . G = {(1 ; 8) , (5 ; 3) , (8 ; 0)}

Dom (F · G) = {1 ; 5 ; 8}

Antes de hallar $\frac{F}{G}$ debemos establecer que : G (x) $\neq$ 0 ; es decir no debemos considerar aquellos valores de x que generen : G (x) = 0.

En consecuencia : $Dom\left(\frac{F}{G}\right) = \{1\,;5\}$.

Ahora notamos que en : *Dom* (F) $\cap$ *Dom* (G), se ha excluído al 8 , puesto que : G (8) = 0

Luego hallando $\frac{F}{G}$ se consigue : $\frac{F}{G} = \left\{\left(1\,;\frac{2}{4}\right)\left(5\,;\frac{3}{1}\right)\right\}$

$$\frac{F}{G} = \left\{\left(1\,;\frac{1}{2}\right),(5\,;3)\right\}$$

$$Dom\left(\frac{F}{G}\right) = \{1\,;5\}$$

24.9) COMPOSICION DE FUNCIONES

Dadas dos funciones reales F y G , la composición de F con G denotada por F $\circ$ G y que se lee: F compuesta con G, es la función cuyo *Dominio* consiste en los elementos: $x \in$ *Dom* (G) tales que G (x) $\in$ *Dom* (F), cuya regla de correspondencia es :

$$[F \circ G]\,(x) = F\,[G\,(x)]$$

donde : *Dom* (F $\circ$ G) = {$x \in \mathbb{R}$ / $x \in$ *Dom* (G) $\wedge$ G (x) $\in$ *Dom* (F)}

Ran (G) $\cap$ *Dom* (F) $\neq \phi$

Observación :

a) La composición de funciones no es conmutativà, es decir : $F \circ G \neq G \circ F$

b) En particular, si : $F \circ G = G \circ F \Rightarrow F = G$

Ejemplo.- *Cuántos elementos tiene la función* $F \circ G$ *si :*

$$F = \{(-2 ; 3) , (0 ; 2) , (3 ; 2) , (4 ; 6) , (5 ; 6) , (7 ; 0)\}$$
$$G = \{(-3 ; 3) , (0 ; 3) , (4 ; -1) , (5 ; 8) , (7 ; 8) , (8 ; 9), (-2 ; 0)\}$$

Resolución.-

Para encontrar la función $F \circ G$ seguimos los siguientes pasos :

1° Con los datos : *Ran* (G) = {3 ; -1 ; 8 ; 9 ; 0} ... (I)

Dom (F) = {-2 ; 0 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7} ... (II)

2° Obtenemos la intersección de (I) y (II), veamos :

Ran (G) $\cap$ *Dom* (F) = {3 ; 0}

3° Seleccionamos aquellos pares de G y de F que admitan como segundas y primeras componentes a : 3 y 0.

$$(-3 ; 3) \in G \wedge (3 ; 2) \in F \Rightarrow (-3 ; 2) \in F \,O\, G$$
$$(0 ; 3) \in G \wedge (3 ; 2) \in F \Rightarrow (0 ; 2) \in F \,O\, G$$
$$(-2 ; 0) \in G \wedge (0 ; 2) \in F \Rightarrow (-2 ; 2) \in F \,O\, G$$

4° Determinamos a la función $F \circ G$.

$$F \circ G = \{(-3 ; 2) , (0 ; 2) , (-2 ; 2)\}$$

$$\therefore \boldsymbol{n(F \circ G) = 3}$$

24.10) FUNCION INVERSA

Sea F una función Real definida por : F = {(x ; y) / $x \in$ *Dom* (F)} ; si F es una función Inyectiva, se define su función Inversa denotada por : F^{-1} , ó , F*, de la siguiente manera :

$$\boldsymbol{F^{-1} = \{(y ; x) / x \in Dom\,(F)\}}$$

Donde : *Dom* (F^{-1}) = *Ran* (F) $\wedge$ *Ran* (F^{-1}) = *Dom* (F)

1° Ejemplo.- *Dada la función Inyectiva* F *definida por* : F = {(2 ; 1) , (3 ; 4) , (4 ; 2)} *; encontrar la función Inversa de F indicando su Dominio y Rango.*

Resolución.-

Para la función dada : F = {(2 ; 1) , (3 ; 4) , (4 ; 2)}

Su inversa F^{-1} , viene dada por : F^{-1} = {(1 ; 2) , (4 ; 3) , (2 ; 4)} ; donde :

$Dom\ (F^{-1}) = \{1\ ;4\ ;2\} = Ran\ (F)$

$Ran\ (F^{-1}) = \{2\ ;3\ ;4\} = Dom\ (F)$

2º Ejemplo.- *Dada la función* $F : y = 2x - 3$; *encontrar la función* F^{-1} *y graficarla.*

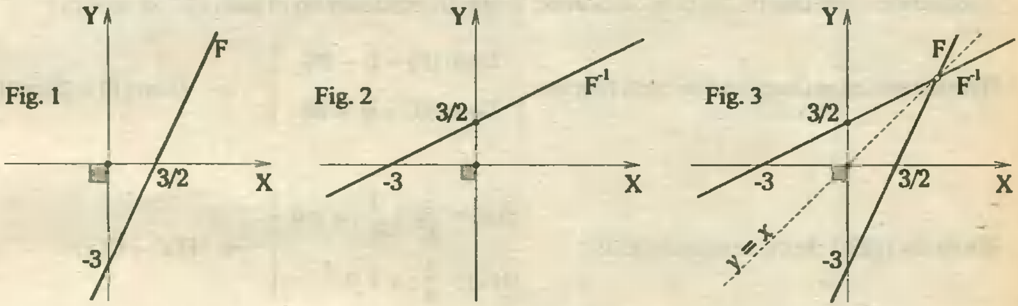
Resolución.-

La gráfica de la función dada esta dada por la Fig.1 . Por tratarse de una Función Inyectiva, admite inversa . Calculemos ahora la función inversa F^{-1}:

De la condición dada, se sabe que : $F\ :\ y = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{y+3}{2}$

Si ahora sustituímos x por y, se tendrá : $F^{-1} :\ y = \dfrac{x+3}{2}$

La gráfica de F^{-1} está dada por la Fig. 2; y en la Fig. 3 se observa como quedan las gráficas de la función F y de su inversa F^{-1} con relación a la recta : $y = x$. Esta última recta desarrolla el papel del eje de simetría entre ambas gráficas.



PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA FUNCION INVERSA

Dada una función Inyectiva F y su inversa F^{-1} se cumple :

I) $(F^{-1})^{-1} = F$ ***Inversa de la Inversa***

II) $F \circ F^{-1} = I$; $Dom\ (I) = Ran\ (F)$

III) $F^{-1} \circ F = I$; $Dom\ (I) = Dom\ (F)$

IV) $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

V) La aplicación $F : A \rightarrow B$ ***, admite Inversa***

$F^{-1} : B \rightarrow A \Leftrightarrow F$ ***, es una función Biyectiva***

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

13.- Indicar el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones :

I) Siendo : $F(x)=\frac{x}{x^2} \wedge G(x)=\frac{1}{x}$, entonces : F = G .... ( )

II) Siendo : $F(x)=\frac{x^2}{x} \wedge G(x)=x$, entonces : F = G .... ( )

III) Siendo : $F(x)=x \wedge G(x)=\sqrt{x^2}$, entonces : F = G .... ( )

A) VVV B) FFF C) VFF D) VVF E) FVF

<u>**Resolución**</u>.-

Analizando cada una de las proposiciones ; según lo expuesto en el item 24.7 se tendrá :

I) Analicemos los *Dominios* de cada función : $\left.\begin{array}{l} Dom\,(F)=\mathbb{R}-\{0\} \\ Dom\,(G)=\mathbb{R}-\{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow Dom\,(F)=Dom\,(G)$

Ahora las reglas de correspondencias : $\left.\begin{array}{l} F(x)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}\,;\, x\neq 0 \\ G(x)=\frac{1}{x}\,;\, x\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(x)=G(x)$

$\therefore$ La proposición (I) es verdadera (V)

II) Analicemos los *Dominios* de cada función : $\left.\begin{array}{l} Dom\,(F)=\mathbb{R}-\{0\} \\ Dom\,(G)=\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow Dom\,(F)\neq Dom\,(G)$

Luego ya no es necesario analizar a las reglas de correspondencias pues al ser los *Dominios* diferentes es suficiente para afirmar que F ≠ G.

$\therefore$ La proposición (II) es falsa (F)

III) Analizando los *Dominios* de cada función, encontramos que :

$$Dom\,(F)=\mathbb{R} \wedge Dom\,(G)=\mathbb{R} \Rightarrow Dom\,(F)=Dom\,(G)$$

Analicemos ahora las reglas de correspondencia : $F(x)=x \quad \wedge \quad G(x)=\sqrt{x^2}=|x|$

De aquí podemos reconocer que : $F(x)\neq G(x)$; por lo tanto la proposición (III) es falsa (F)

Finalmente se obtiene : ***I (V) ; II (F) ; III (F)*** ***RPTA. C***

14.- Si : $F(x) = 4x + 3$; $x \in \langle 15 ; 22 \rangle$ $\wedge$ $G(x) = 3x - 1$; $x \in \langle 7 ; 14 \rangle$; determinar si existe o no la función $F \circ G$.

Resolución.-

Teniendo en cuenta la definición dada en el item 24.9, la función : F ∘ G existe si se cumple que : $Ran\ (G) \cap Dom\ (F) \neq \phi$ ... (I)

Según el problema se sabe que : $Dom\ (F) = x \in \langle 15 ; 22 \rangle$ ... (II)

Hallemos *Ran* (G) a partir de *Dom* (G), veamos : $Dom\ (G) = x \in \langle 7 ; 14 \rangle$

De aquí deducimos que : $7 < x < 14$

Multiplicando por 3 : $21 < 3x < 42$

Restando 1 a cada miembro, tendremos : $20 < \underbrace{3x - 1}_{G(x)} < 41$

De esta relación observamos que : $Ran\ (G) = G\ (x) = y \in \langle 20 ; 41 \rangle$ ... (III)

Finalmente de acuerdo con (I) debemos intersectar (II) y (III) : $Ran\ (G) \cap Dom\ (F) = \langle 20 ; 41 \rangle \cap \langle 15 ; 22 \rangle$

Efectuando nos queda : $Ran\ (G) \cap Dom\ (F) = \langle 20 ; 22 \rangle$

Asimismo tenemos que : $Ran\ (G) \cap Dom\ (F) = \langle 20 ; 22 \rangle \neq \phi$

Finalmente podemos concluir afirmando que si existe la función F ∘ G.

15.- Con respecto al problema anterior, la función F ∘ G tiene regla de correspondencia idéntica a :

A) 10x + 2 ***B) 11x - 1*** ***C) 12x + 1*** ***D) x - 12*** ***E) 12x - 1***

Resolución.-

Como en el problema anterior se comprobó la existencia de la función F ∘ G; hallaremos directamente su regla de correspondencia a partir de : $[F \circ G]\ (x) = F\ (G\ (x))$

Por dato del problema las funciones son : $\begin{cases} F(x) = 4x + 3 \ ......(*) \\ G(x) = 3x - 1 \end{cases}$

Sustituyendo en (*) x por G (x) , tendremos : $F\ (G\ (x)) = 4\ G\ (x) + 3$

Reemplazando ahora G (x) por su regla de correspondencia, tendremos : $F\ (G\ (x)) = 4\ (3x - 1) + 3$

Efectuando, obtenemos : $F\ (G\ (x)) = 12x - 1$

∴ La regla de correspondencia de F ∘ G es : $[F \circ G]\ (x) = 12x - 1$ ***RPTA. E***

16.- Asimismo del problema 14 ; indicar el menor número entero x del dominio de la funcion: F ∘ G .

A) 6 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) No existe tal número***

<u>***Resolución***</u>.-

Recordemos que las funciones son : $F(x) = 4x + 3 \;\wedge\; G(x) = 3x - 1$

Luego el *Dominio* de la función F ∘ G se obtiene de : $Dom\,(F \circ G) = x \in Dom\,(G) \;\wedge\; G(x) \in Dom\,(F)$ ... (I)

Asimismo sabemos que : $Dom\,(F) = \langle 15 ; 22 \rangle \quad \wedge \quad Dom\,(G) = \langle 7 ; 14 \rangle$

Luego en (I) se tendrá : $x \in \langle 7 ; 14 \rangle \quad \wedge \quad (3x - 1) \in \langle 15 ; 22 \rangle$

Pasando a notación de desigualdad : $7 < x < 14 \quad \wedge \quad 15 < 3x - 1 < 22$

Despejando $3x$: $7 < x < 14 \quad \wedge \quad 16 < 3x < 23$

Dividiendo por 3 : $7 < x < 14 \quad \wedge \quad \dfrac{16}{3} < x < \dfrac{23}{3}$

Intersectando ambos intervalos : $7 < x < \dfrac{23}{3}$

Esto significa que : $Dom\,(F \circ G) = x \in \left\langle 7 ; \dfrac{23}{3} \right\rangle$

Finalmente podemos afirmar que en el intervalo hallado ; no existe ningún valor entero para x.

RPTA. E

17.- Dadas las funciones : $F = \{(-3 ; 2), (0 ; 0), (2 ; 4), (3 ; -1), (4 ; 3)\}$

$G = \{(2 ; 0), (3 ; 4), (4 ; 7), (6 ; 2)\}$;

calcular la suma de los elementos del rango de la función : $F^2 + 3G$

A) 58 ***B) 59*** ***C) 60*** ***D) 61*** ***E) 57***

<u>***Resolución***</u>.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 24.8, podemos plantear :

$$Dom\,(F^2 + 3G) = Dom\,(F) \cap Dom\,(G) \quad \text{... (I)}$$

A partir de los datos se tiene : $Dom\,(F) = \{-3 ; 0 ; 2 ; 3 ; 4\} \;\wedge\; Dom\,(G) = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$

Reemplazando en (I), se tendrá : $Dom\,(F^2 + 3G) = \{2 ; 3 ; 4\}$

A continuación hallaremos $F^2 + 3G$, para lo cual efectuaremos la operación indicada :

$$F^2 + 3G = \{(2 ; 4^2 + 3 \cdot 0), (3 ; [-1]^2 + 3 \cdot 4), (4 ; 3^2 + 3 \cdot 7)\}$$

Efectuando nos queda : $F^2 + 3G = \{(2 ; 16), (3 ; 13), (4 ; 30)\}$

De acuerdo con estos resultados observamos que : $Ran\ (F^2 + 3\,G) = \{16\ ;\ 13\ ;\ 30\}$

$\therefore \quad \Sigma$ elementos del *Rango* $= 16 + 13 + 30 = \boxed{59}$ **RPTA. B**

18.- Dadas las funciones : $F = \left\{(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \sqrt{4-x}\right\} \wedge G = \left\{(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right\}$

Indicar el dominio de : F . G

A) $\langle -\infty\ ;\ -1\rangle \cup \langle 1\ ;\ 3]$ *B)* $\langle -\infty\ ;\ -1\rangle \cup \langle 0\ ;\ 4\rangle$ *C)* $\langle -\infty\ ;\ -2\rangle \cup \langle 2\ ;\ 4]$

D) $\langle -\infty\ ;\ -2] \cup \langle 2\ ;\ 4\rangle$ *E)* $\langle 2\ ;\ 4\rangle$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 24.8 el *Dominio* de la función F . G, viene dado por :

$$Dom\,(F\,.\,G) = Dom\,(F) \cap Dom\,(G) \quad \ldots (*)$$

Esto nos obliga a hallar por separado : $Dom\,(F) \wedge Dom\,(G)$

De la función F, se establece que : $y = \sqrt{4-x}$

De aquí , se debe cumplir que : $4 - x \geq 0$

Al despejar x obtenemos : $x \leq 4 \Rightarrow$ **Dom (F)** $= x \in \langle -\infty ;\ 4]$

Para la función G, se sabe que : $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

De aqui se debe cumplir que : $x^2 - 4 > 0$

Factorizando, tendremos : $(x+2)\,(x-2) > 0 \Rightarrow$ **Dom (G)** $= x \in \langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 2\ ;\ \infty\rangle$

Finalmente en (*) : $Dom\,(F\ .\,G) = \langle -\infty ;\ 4] \cap \{\langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 2 ; \infty\rangle\}$

$\therefore$ $\boxed{Dom\,(F\,.\,G) = \langle -\infty ; -2\rangle \cup \langle 2\ ;\ 4]}$ **RPTA. C**

19.- Dadas las funciones : $F = \{(2\ ;\ 4), (3\ ;\ 6), (5\ ;\ 10), (7\ ;\ 14) ; (m\ ;\ 1)\}$

$$F^{1} = \left\{(4\ ;\ a), (10\ ;\ b), (6\ ;\ m-7), \left(\frac{p}{2}\ ;\ c\right), (14\ ;\ d)\right\} ;$$

calcular el valor de : a + b + c + d + m + p

A) 22 *B) 24* *C) 26* *D) 36* *E) 12*

Resolución.-

De acuerdo con los datos del problema sabemos que :

$$F = \{(2\,;4)\,,(3\,;6)\,,(5\,;10)\,,(7\,;14)\,,(m\,;1)\} \qquad \text{... (I)}$$

$$F^{-1} = \left\{(4\,;a),(10\,;b),(6\,;m-7),\left(\frac{p}{2}\,;c\right),(14\,;d)\right\} \qquad \text{... (II)}$$

De (I) hallamos F^{-1} : $F^{-1} = \{(4\,;2)\,,(6\,;3)\,,(10\,;5)\,,(14\,;7)\,,(1\,;m)\}$ ... (III)

Igualando (II) $\wedge$ (III), encontramos que : $a=2 \;\wedge\; m=10 \;\wedge\; d=7 \;\wedge\; b=5$

También podemos decir que : $\left(\frac{p}{2}\,;c\right) = (1\,;m) = (1\,;10)$

De donde al resolver, encontramos : $p=2 \wedge c=10$

$\therefore \quad a+b+c+d+m+p = 2+5+10+7+10+2 = \boxed{36}$ **RPTA. D**

20.- Sea la función F : $y=\sqrt{x-1}+2$, encontrar el dominio, rango y gráfica de F^{-1} , indicando por respuesta $y^{-1}_{mín}$.

A) -1 B) 1 C) 0 D) 2 E) -2

Resolución.-

Por tratarse de una función Raíz cuadrada , haremos uso de los desplazamientos en el eje X ,y en el eje Y, para finalmente tomar la inversa a la función obtenida . Veamos :

a) Desplazamiento de una unidad (1) hacia la derecha, en el eje X .- $F : y=\sqrt{x-1}$

Ver Fig. 2

b) Desplazamiento de dos unidades (2) hacia arriba, en el eje Y :

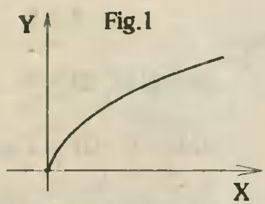
$F : y = \sqrt{x-1} + 2$ ..... (*)

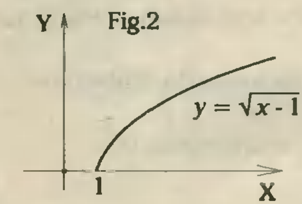
Ver Fig. 3

c) Ahora tomamos la inversa de (*)

$F^{-1} : x = \sqrt{y-1} + 2$

Ver Fig. 4



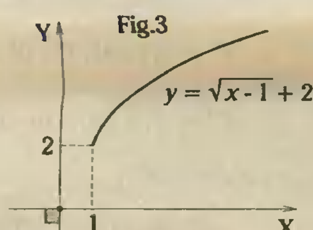


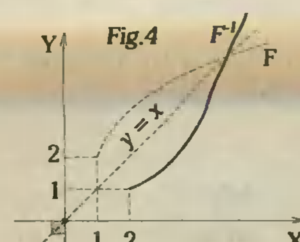
d) Finalmente afirmamos que :

Dom $(F^{-1}) = [2\,;\infty\rangle \quad \wedge$

Ran $(F^{-1}) = [1\,;\infty\rangle$

$\therefore \quad \boxed{y^{-1}_{min} = 1}$ ***RPTA. B***



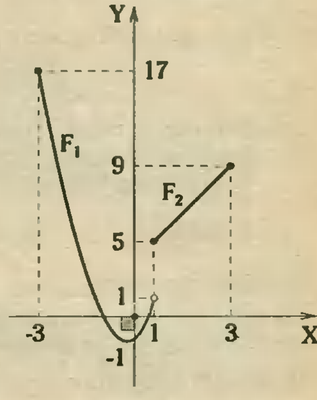


MISCELANEA

21.- Dada la función : $F(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 \ ; & -3 \leq x \leq 1 \\ 2x + 3 \ ; & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ **, indicar su rango.**

A) [1 ; 17] B) < 1 ; 17] C) [-1 ; 17 > D) [-1 ; 17] E) [-17 ; 1]

Resolución.-



La función dada se debe analizar como si se tratara de dos funciones F_1 y F_2 de este modo :

a) $F_1 : y = 2x^2 - 1 \ ; \ -3 \leq x < 1$

Por tratarse de una función cuadrática , la identificamos como una porción de parábola

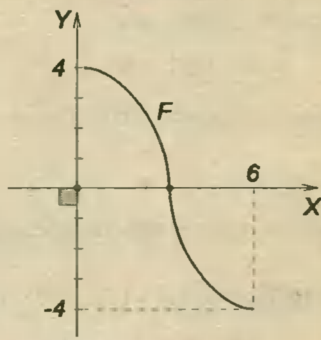
b) $F_2 : y = 2x + 3 \ ; \ 1 \leq x \leq 3$

Por trtarse de una función lineal , la identificamos como una porción de recta

Gracias a la gráfica obtenida logramos reconocer con facilidad el rango de la función F dada :

$\therefore$ *Ran* (F) = ***[-1 ; 17]*** ***RPTA. D***

22.- La gráfica de $F : [0 ; 6] \rightarrow [-4 ; 4]$ es :
Luego podemos afirmar que :



I) F es Biyectiva

II) I F I no es Biyectiva

III) I F I - 1 es Monótona

A) I B) II C) I ∧ II

D) I ∧ III E) II ∧ III

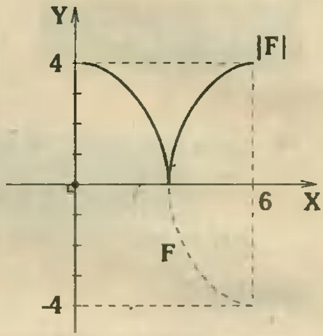
Resolución.-

Analicemos cada proposición por separado :

I) F es Biyectiva .-Observando la gráfica dada podemos afirmar que F es *Inyectiva* ya que cualquier recta horizontal cortará a su gráfica en un solo punto . Asimismo la gráfica nos permite reconocer que F también es *Suryectiva* dado que su conjunto de llegada : [-4 ; 4], coincide con su *rango* [-4 ; 4]

II) A continuación graficaremos la función $|F|$ a partir de F, y a partir de él reconoceremos si se trata de una función Biyectiva.

Es evidente que $|F|$ no es Inyectiva ya que al trazar una recta horizontal esta la cortará en más de un punto.Por lo tano no es Biyectiva.



III) Debemos tener en cuenta que una función es Monótona si corresponde a cualquiera de las funciones descritas en el item 24.5D.

Es evidente apreciar que la función : $|F|-1$ no es Monótona ya que al graficarla obtendremos la gráfica de la proposición II desplazada una unidad verticalmente hacia abajo.

$\therefore$ Finalmente solo podemos afirmar :

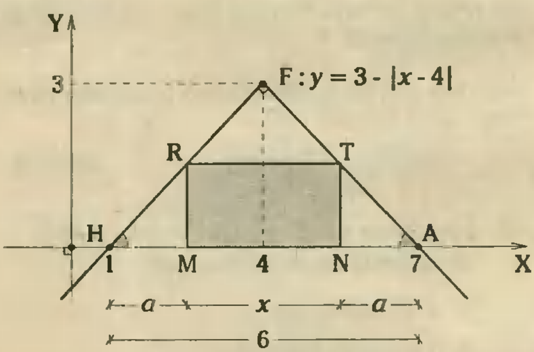
$$I \wedge II$$ ***RPTA. C***

23.- En la región determinada por el eje "X" y la gráfica de la función F tal que F (x) = 3 - Ix - 4I, se inscribe un rectángulo una de cuyas bases está sobre el eje "X" y los otros dos vértices están en la gráfica de F. Halle el área máxima de dicho rectángulo.

A) 4,5 u² ***B) 5 u²*** ***C) 3,5 u²*** ***D) 2,5 u²*** ***E) 6 u²***

Resolución.-

De acuerdo con el enunciado podemos construir el siguiente gráfico :



De la gráfica podemos observar que :

$$HA = 7 - 1 = 6$$

Asimismo reconocemos que el ⊿ NTA es Isósceles , por lo tanto :

$$NA = NT = MH = a \qquad \text{... (1)}$$

También se puede reconocre que :

$$a + x + a = 6 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{6-x}{2} \quad \text{... (2)}$$

A continuación el área del rectángulo MRTN viene dado por : Area = (MN) (NT) .....(3)

Reemplazando (1) $\wedge$ (2) en (3), tendremos : $\text{Area} = x\left(\frac{6-x}{2}\right) = \frac{1}{2}(-x^2 + 6x)$

Nuestra experiencia nos sugiere completar cuadrados en el paréntesis, para así poder encontrar el máximo valor del área . Veamos :

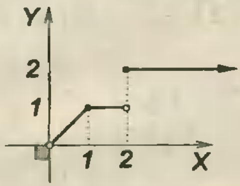
$$\text{Area} = \frac{1}{2}[9 - x^2 + 6x - 3^2] = \frac{1}{2}[9 - (x-3)^2]$$

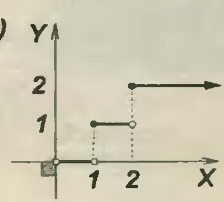
Observar que : Area Máxima $\Leftrightarrow$ $(x-3)^2$ es lo Mínimo posible $\Rightarrow$ $(x-3)^2 = 0$

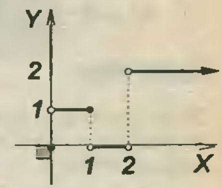
$\therefore$ Area Máxima $= \frac{9}{2} =$ **4,5** ***RPTA. A***

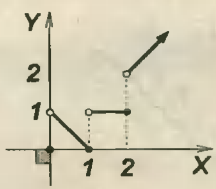
24.- Sea la función F definida por : $F(x-a)=\begin{cases} 0 \ ; \ 0<x<a \\ 1 \ ; \ x \geq a \end{cases}$

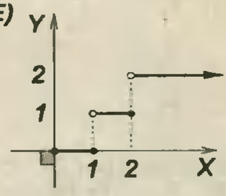
Luego la gráfica de la función : $y = F(x-1) + F(x-2)$ es :

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

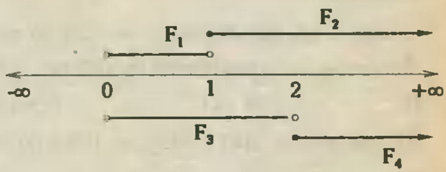
Resolución.-

De la regla de correspondencia planteamos :

Si : $a = 1 \ \Rightarrow \ F(x-1)=\begin{cases} 0 ; \ 0<x<1 & ..... F_1 \\ 1 ; \ x \geq 1 & ..... F_2 \end{cases}$

Si : $a = 2 \ \Rightarrow \ F(x-2)=\begin{cases} 0 ; \ 0<x<2 & ..... F_3 \\ 1 ; \ x \geq 2 & ..... F_4 \end{cases}$

Dado que nuestro problema consiste en efectuar una adición de funciones ,debemos recordar que esta operación solo existe en la intersección de los *dominios* de : F (x - 1) y F (x - 2). Por ello resulta necesario visualizar en un esquema la intersección de dichos *dominios*. Veamos :

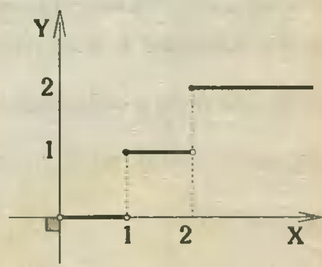


Como existe : $F_1 \cap F_3 = < 0 ; 1 >$; existe $F_1 + F_3$

Como existe : $F_2 \cap F_3 = [1 ; 2 >$; existe $F_2 + F_3$

Como existe : $F_2 \cap F_4 = [2 ; \infty >$; existe $F_2 + F_4$

$$\Rightarrow \ F(x-1) + F(x-2) = \begin{cases} 0 ; \ x \in \langle 0 ; 1 \rangle .... & F_1 + F_3 \\ 1 ; \ x \in [1 ; 2 \rangle ..... & F_2 + F_3 \\ 2 ; \ x \in [2 ; \infty \rangle .... & F_2 + F_4 \end{cases}$$



Y su gráfica será como la mostrada al lado ***RPTA. B***

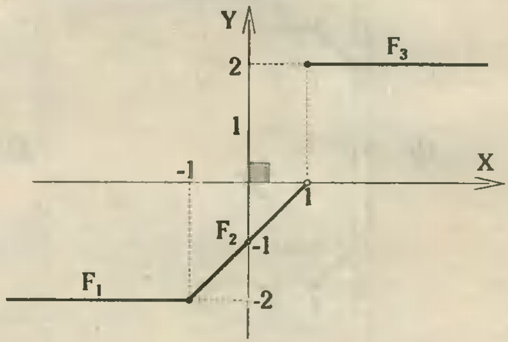
25.- Graficar para luego indicar el rango de la función : $F(x) = \begin{cases} -2 & ; \quad x \leq -1 \\ x-1 & ; \quad -1 < x < 1 \\ 2 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$

***A)** < -2 ; 2 >* ***B)** < -2 ; 2]* ***C)** [-2 ; 2 >* ***D)** [-2 ; 2]* ***E)** [-2 ; 2] - {0}*

Resolución.-

De acuerdo con la regla de correspondencia, se pueden reconocer las siguientes funciones componentes :

$$F(x) = \begin{cases} -2 & ; \quad x \leq -1 & \ldots\ldots F_1 \\ x-1 & ; \quad -1 < x < 1 & \ldots\ldots F_2 \\ 2 & ; \quad x \geq 1 & \ldots\ldots F_3 \end{cases}$$



La gráfica de la función F viene dada por la reunión de las gráficas de: F_1 ; F_2 $\wedge$ F_3 ,tal como se muestra al lado :

Finalmente concluímos que : $Ran(F) =$ ***[-2 ; 2]*** ***RPTA. D***

26.- Sea F una Función Creciente definida por : F (x) = ax + b , tal que :
F ([1 ; 2]) = [107 ; 901] . Calcular : a - b.
***A)** 1 481* ***B)** 1 841* ***C)** 1 418* ***D)** 4 811* ***E)** 8 141*

Resolución.-

Como F (x) es Creciente , entonces el coeficiente : $a > 0$

Del enunciado podemos reconocer que :

I) $x \in [1 ; 2] \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x \leq 2$

II) $(ax + b) \in [107 ; 901] \Rightarrow 107 \leq ax + b \leq 901$ .....(*)

Nuestra estrategia consistirá en formar el intervalo de x a partir de la relación (II); a continuación se compararán los extremos obtenidos con los extremos de (I).

De (*), sumamos $-b$ acada miembro : $107 - b \leq ax \leq 901 - b$

Dividiendo por a a cada miembro : $\dfrac{107-b}{a} \leq x \leq \dfrac{901-b}{a}$

Comparando este resultado con (I) se puede establecer que :

Extremo inferior : $\dfrac{107-b}{a} = 1 \Rightarrow a + b = 107$ ..... (α)

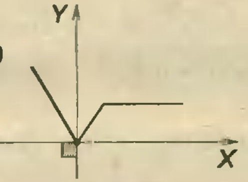
Extremo superior : $\dfrac{901-b}{a} = 2 \Rightarrow 2a + b = 901$ ...... (β)

Resolviendo (α) y (β) , encontramos que : $a = 794 \wedge b = -687$

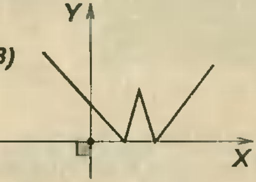
$\therefore$ Finalmente el valor pedido será : $a - b =$ **1 481** ***RPTA. A***

27.- La gráfica que mejor representa a la función : $F: y = \left| |x+1| - 2 \right|$ es :

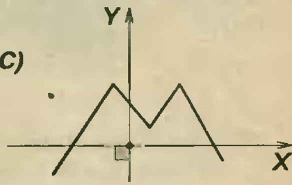
A)



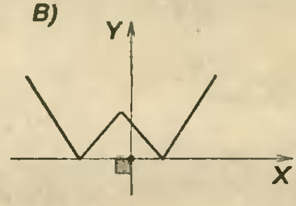
B)



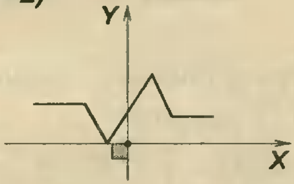
C)



B)



E)



Resolución.-

Para graficar la función : $F: y = \left| |x+1| - 2 \right|$

Partimos de : $y = |x|$

Luego para graficar la función dada ,se desplazará la gráfica de $y = |x|$ una unidad (1) hacia la izquierda y dos unidades(2) hacia abajo. Esto se da en la Fig. 2 ;veamos :

Fig. 1

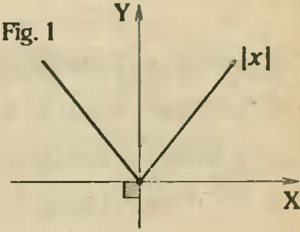


Fig. 2

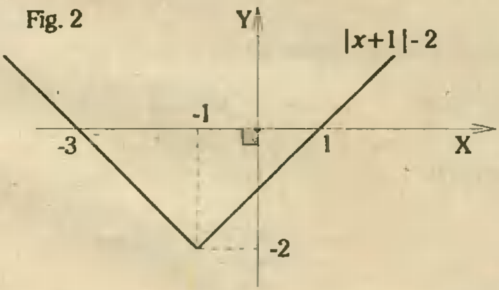
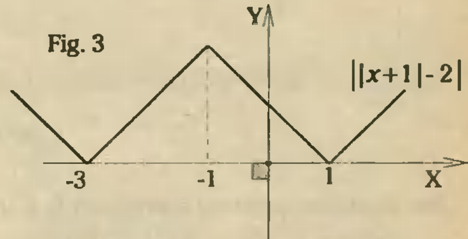


Fig. 3



Finalmente tomando valor absoluto a la función : $|x+1| - 2$; se obtiene el gráfico de la Fig. 3 . ***RPTA. D***

28.- Sea la función : $F(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ para satisfacer : $F: x < 0$; es necesario que se cumpla :

A) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ***B)*** $0 \le x \le \pi$ ***C)*** $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ***D)*** $\pi < x < 2\pi$ ***E) No existe tal x***

Resolución.-

Por condición del problema se plantea : $e^{sen\,x} < 0$

Debemos recordar que : $e \cong 2{,}7182 > 0$ ¡ Es positivo !

Es evidente que un número positivo elevado a un exponente real siempre es positivo ; en conclusión la desigualdad :

$e^{sen\,x} < 0$ ¡ Es absurda !

$\therefore$ **No existe tal x** **RPTA. E**

29.- Sea F una función que satisface : F (x + 1) = - F (x) , para todo x real . Además : F (998,6) = -3 ; luego el valor de F (800,6) es :

A) 3 ***B) -3*** ***C) 998,6*** ***D) -998,6*** ***E) 1***

Resolución.-

Por condición del problema $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes condiciones :

$$F(x+1) = -F(x) \quad \ldots \quad (I)$$

$$F(998{,}6) = -3 \quad \ldots \quad (II)$$

En (I) $\Rightarrow$ ***De (II)***

Si $x = 997{,}6$: $F(998{,}6) = -F(997{,}6)$ $\qquad F(997{,}6) = 3$

Si $x = 996{,}6$: $F(997{,}6) = -F(996{,}6)$ $\qquad F(996{,}6) = -3$

Si $x = 995{,}6$: $F(996{,}6) = -F(995{,}6)$ $\qquad F(995{,}6) = 3$

Si $x = 994{,}6$: $F(995{,}6) = -F(994{,}6)$ $\qquad F(994{,}6) = -3$

•
•
•

Finalmente; observando atentamente cada resultado obtenido, se podrá deducir que :

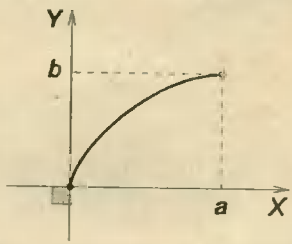
$\therefore \quad F(800{,}6) = $ ***- 3*** **RPTA. B**

30.- El gráfico adjunto corresponde a : (F ∘ G) (x)

Si : $n \in \mathbb{N}^*$; a ∧ b ∈ $\mathbb{R}$, tal que :

$F(x) = n\,sen\,x \;;\quad x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$

$G(x) = n\,x \;;\quad x \in \langle -\pi\,;\,\pi \rangle$



Determinar : sen (a . b) .

A) 1 ***B) -1*** ***C) 0*** ***D) $\frac{1}{2}$*** ***E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$***

Resolución.-

Debemos tener en cuenta que : $Dom\ (F \circ G) = x \in Dom\ (G) \wedge G(x) \in Dom\ (F)$

En el problema : $Dom\ (F \circ G) = x \in \langle -\pi;\pi\rangle \quad \wedge \quad nx \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$

Estos intervalos equivalen a : $Dom\ (F \circ G) = x \in \langle -\pi;\pi\rangle \quad \wedge \quad x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2n}\right\rangle$

Al intersectar los intervalos , se obtiene : $Dom\ (F \circ G) = x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2n}\right\rangle$ ... (I)

Observando el gráfico se establece que : $Dom\ (F \circ G) = \langle 0\,;a\rangle$ ... (II)

Luego de (I) $\wedge$ (II), se obtiene : $a = \dfrac{\pi}{2n}$ .... (*)

Teniendo en cuenta que : $F(x) = n\ \text{sen}\,x \quad \wedge \quad G(x) = nx$

Luego se puede encontrar : $(F \circ G)(x) = F[G(x)]$

Esto significa que : $(F \circ G)(x) = n\ \text{sen}\,(nx)$ ... (III)

Pero observando el gráfico : $(F \circ G)(a) = b$ ... (IV)

Sustituyendo x por a en (III) para luego igualar con (IV), tendremos :

$$n\ \text{sen}\,(na) = b \quad ....(**)$$

Reemplazando (*) en (**), se tiene : $n\left(\text{sen}\ n.\dfrac{\pi}{2n}\right) = b$

Efectuando, tendremos : $n\underbrace{\left(\text{sen}\ \dfrac{\pi}{2}\right)}_{1} = b \Rightarrow \quad \boldsymbol{b = n}$

Finalmente se observa que : $\text{sen}\,(a\,.\,b) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2n}.n\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \text{sen}\,(a\,.\,b) = \boldsymbol{1}$ ***RPTA. A***

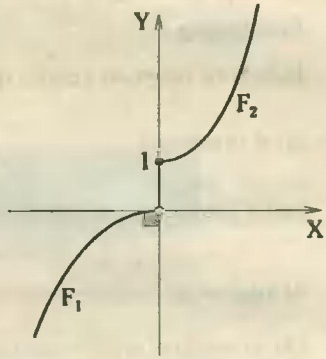
31.- Consideremos la función F definida por : $F(x) = \begin{cases} -x^2 & ;\ x < 0 \\ x^3 + 1 & ;\ x \geq 0 \end{cases}$; luego F^{-1} , es :

Resolución.-

De la condición dada para F, podemos reconocer en él , dos funciones componentes :

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 & ;\ x < 0 \quad .... \quad F_1 \\ x^3 + 1 & ;\ x \geq 0 \quad .... \quad F_2 \end{cases}$$

Graficando éstas dos funciones, encontramos el gráfico de F.



Según el gráfico, reconocemos que la función F es Inyectiva, por lo tanto admite Inversa. Hallemos F^{-1} :

De F_1 : $y = -x^2 \Rightarrow x = -y^2$

$\therefore\ F_1^{-1} : y = \sqrt{-x}\ ;\ x < 0$

De F_2 : $y = x^3 + 1 \Rightarrow x = y^3 + 1$

$\therefore\ F_2^{-1} : y = \sqrt[3]{x-1}\ ;\ x \geq 1$

Finalmente : $$F^{1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & ;\ x < 0 \\ \sqrt[3]{x-1} & ;\ x \geq 1 \end{cases}$$

32.- Dada la función : $F(x) = [\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]}$, $x \in [0 ; 2]$; bosquejar la gráfica de la función inversa : F^{-1}

Resolución.-

Por dato del problema : *Dom* (F) = $x \in [0 ; 2]$

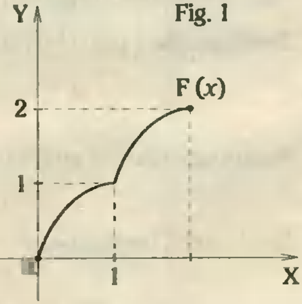


Fig. 1

Redefiniendo la función :

I) Si : $x \in [0 ; 1\rangle \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow [\![x]\!] = 0$

En consecuencia la regla de correspondencia para éste intervalo será :

$$F(x) = \sqrt{x}$$

II) Si : $x \in [1 ; 2\rangle \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow [\![x]\!] = 1$

En consecuencia la regla de correspondencia será :

$$F(x) = 1 + \sqrt{x-1}$$

III) Si : $x = 2 \Rightarrow [\![x]\!] = 2 \Rightarrow F(x) = 2$

Es decir la función F se podrá expresar del siguiente modo :

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ;\ 0 \leq x < 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & ;\ 1 \leq x < 2 \\ 2 & ;\ x = 2 \end{cases}$$

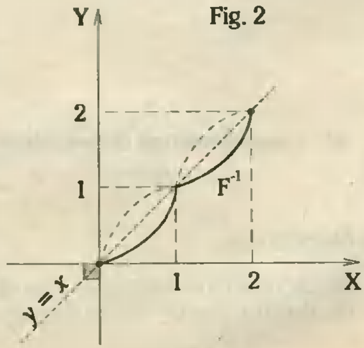


Fig. 2

Y su gráfica será como lo indica la Fig.1, siendo la gráfica de su inversa la indicada en la Fig.2.

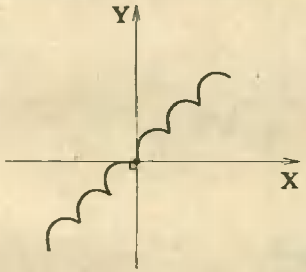
PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Luego de graficar la función : $F = \{(1\,;a), (b;5), (5\,;a)\}$; se unen los tres puntos mediante segmentos y se obtiene un triángulo isósceles. Hallar el valor de b sabiendo que el vértice $(b\,;5)$ se opone al lado desigual.

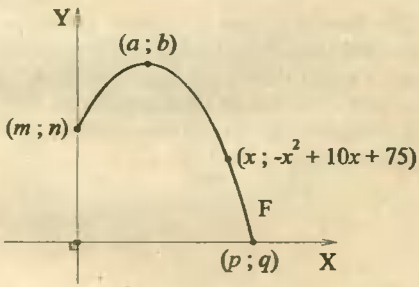
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.- Si : $F(x)$ es una función donde solamente intervienen x y sen x ; entonces el gráfico siguiente representa a :



A) $F(x) = |x| + \text{sen}\,x$
B) $F(x) = x + \text{sen}\,x$
C) $F(x) = -x + |\text{sen}\,x|$
D) $F(x) = x + |\text{sen}\,x|$
E) $F(x) = |x| + |\text{sen}\,x|$

3.- Proporcionar el *dominio* de la siguiente función :



A) $[0\,;15]$ B) $[0\,;15\rangle$ C) $[0\,;12]$
D) $[0\,;12\rangle$ E) N.A.

4.- Con respecto al problema anterior. ¿Cuál es su *rango*?

A) $[0\,;50]$ B) $[0\,;60]$ C) $[0\,;80]$
D) $[0\,;90]$ E) $[0\,;100]$

5.- Las gráficas de las funciones : $F(x) = x^2 \wedge G(x) = \sqrt{x}$ tienen dos puntos en común, luego el segmento que une estos puntos mide :

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) 1

6.- Sea la función :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ -24 < x < 1 \\ x^2 - 209 & ; \ 1 \leq x < 40 \end{cases}$$

Se pide calcular : $F(3x - 4) - F(15 - 3x)$; si: $x \in \left\langle -6\,;\frac{4}{3}\right\rangle$.

A) 1 B) x C) $66x$ D) $-66x$ E) 66

7.- Al graficar la función : $F: y = x^2 + 10x + 21$ podemos observar que el menor valor de su *rango* es :

A) 21 B) 4 C) 5 D) -4 E) -5

8.- Si : $F(x) = x^2 + x + 1$
$H(x) = F(x) + F(-x)$
$R(x) = F(x) - F(-x)$;

con respecto a : $H(x)$ y $R(x)$ ¿Cuál es par?

A) $H(x)$ B) $R(x)$ C) Los dos
D) F.D. E) N.A.

9.- Sea F una función definida en $\mathbb{Z}$ por : $F(x + 2) = F(x) + F(2)$ ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas :

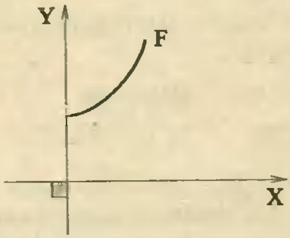
I) $F(0) = 0$

II) $F(2) + F(-2) = 0$;

III) $F(8) = 4F(2)$?

A) I B) II C) III D) I , II $\wedge$ III E) N.A.

10.- De la gráfica :



Se puede afirmar que :

A) $F(x) < 0$

B) $F(x) \leq 0$

C) Si : $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2)$

D) Si : $x_1 > x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2)$

E) Si : $x_1 = x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$

11.- Sea $F(x) = x^2 \wedge F^{-1}(x)$ la Inversa de $F(x)$. Calcular $F^{-1}(-4)$.

A) 4 B) -4 C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) ϕ

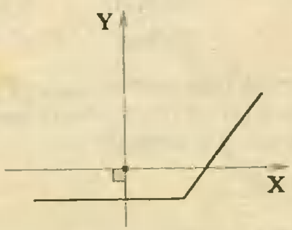
12.- Calcular la suma de los elementos del *rango* de la función F + G sabiendo que :

$F = \{(1;2), (2;4), (3;6), (4;3), (5;7)\}$

$G = \{(-1;1), (1;3), (2;0), (3;5), (4;2)\}$

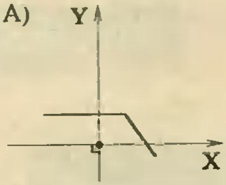
A) 22 B) 17 C) 25 D) 28 E) 12

13.- Sea la función F cuya gráfica es :

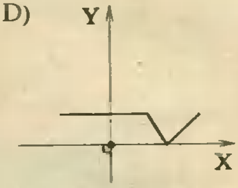


Luego la gráfica de la función H definida por : $H(x) = |F(x)|$. es :

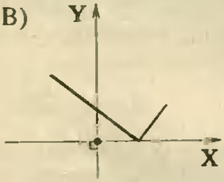
A)



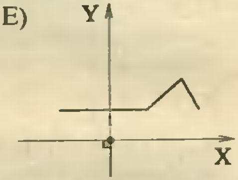
D)



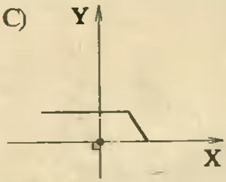
B)



E)



C)



NIVEL B

14.- Sean las funciones:

$F = \{(2;5), (3;4), (4;1), (5;0)\}$

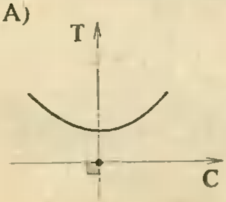
$G = \{(0;1), (1;2), (2;1)\}$

Calcular : $F + G + F \, . \, G$

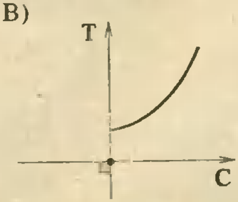
A) $\{(2;11)\}$ B) $\{(2;9)\}$ C) $\{(1;7)\}$
D) $\{(3;11)\}$ E) $\{(11;2)\}$

15.- Sabiendo que el trabajo T realizado por un obrero es proporcional a la raíz cuadrada de la suma de 3 y el cuadrado de C , siendo ésta la cantidad de obra a trabajar. Si además la constante de proporcionalidad es 1/3; indique la mejor gráfica : T - C.

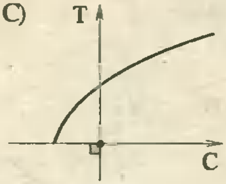
A)



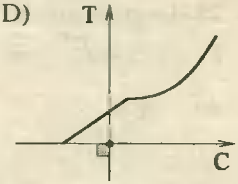
B)



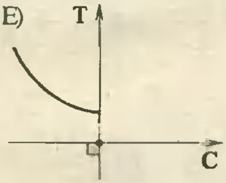
C)



D)



E)



16.- Si: $F(x) = (x-1)^2 \; ; x \in \langle -1 ; 7]$

$G(x) = 2x + 1 \; ;, x \in [1 ; \infty \rangle$

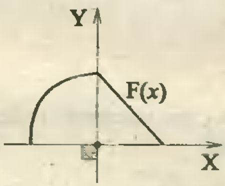
Encontrar la regla de correspondencia de : $F \circ G$

A) x^2 B) $2x$ C) $4x^2$ D) $4x - 1$ E) $8x^2 + 1$

17.- Con respecto al problema anterior. ¿Cuántos números enteros admite el dominio de $F \circ G$?

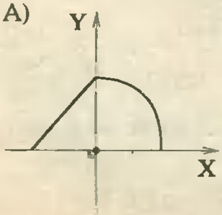
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Infinitos

18.- A continuación se muestra la gráfica de $F(x)$:

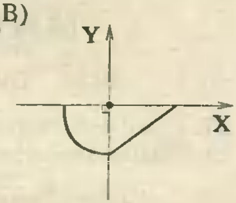


¿Cuál de las siguientes gráficas representa a la función : $-F(-x)$?

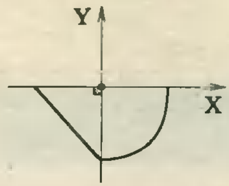
A)



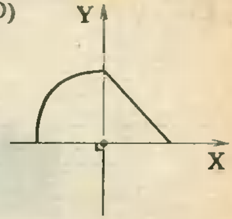
B)



C)



D)



E) N.A.

19.- La sucesión de Fibonacci se puede definir como una función en $\mathbb{N}$ mediante la siguiente regla :

$$F(n) = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } : n = 1 \\ 1 & ; \text{ si } : n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & ; \text{ si } : n \geq 3 \end{cases}$$

Según esto, hallar : F (9)

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

20.- Dada la función : $F : [-1 ; 1\rangle \rightarrow \langle -\infty ; 0]$

Donde : $F(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

¿Qué clase de función es F?

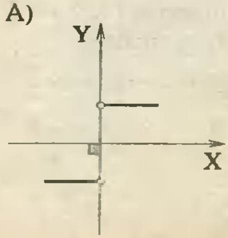
A) Inyectiva B) Suryectiva C) Biyectiva

D) Par E) Periódica

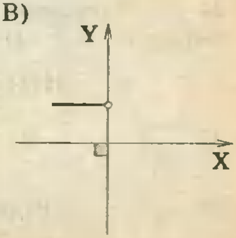
21.- La gráfica de la función :

$F(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, es :

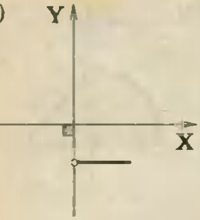
A)



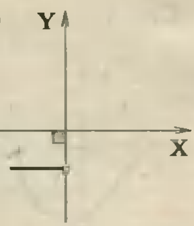
B)



C)

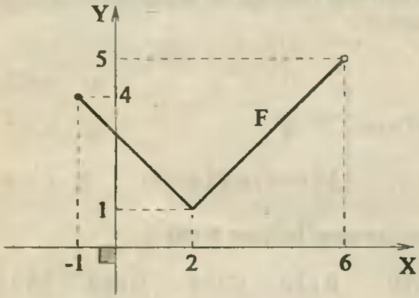


D)



E)N.A.

22.- Hallar el *dominio* y *rango* respectivamente de la siguiente función :



A) $\langle -1;6\rangle$; $\langle 0;5\rangle$

B) $\langle -1;6]$; $[1;5]$

C) $[-1;6\rangle$; $[1;5\rangle$

D) $[-1;6]$; $\langle 1;5\rangle$

E) $[-1;6\rangle$; $[0;5]$

23.- Si : $F:\mathbb{R}\rightarrow B$; es una función Suryectiva tal que : $F(x)=|x-2|-x$; hallar B.

A) $[2;\infty\rangle$ B) $[-2;2]$ C) $[-2;0\rangle$

D) $[-2;0]$ E) $[-2;\infty\rangle$

24.- Si : F^{-1} representa la Inversa de F y $\forall x\in\mathbb{R}$ definimos : $F(x^2-1)=2x^2-1$; hallar :

$$H(x)=F^{-1}[F^{-1}(x-3)]$$

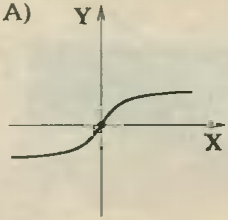
A) $\dfrac{x-4}{2}$ B) $\dfrac{x-6}{2}$ C) $\dfrac{x-3}{4}$

D) $\dfrac{x-6}{4}$ E) N.A.

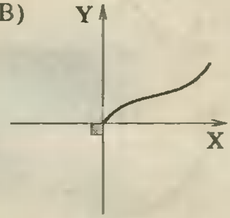
25.- La gráfica de la función :

$F: y=x^3+\sqrt{x}$; es :

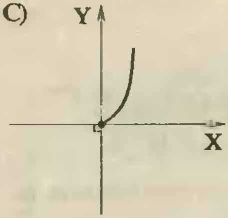
A)



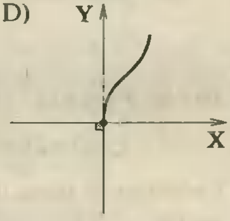
B)



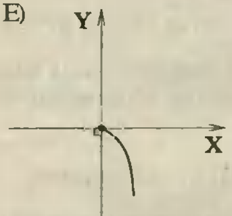
C)



D)



E)



NIVEL C

26.- Si : F y G son funciones reales de variable real, tales que :

$$F(x)=\sqrt{x-1} \quad \wedge \quad G(x)=\frac{1}{|x|} \; ;$$

hallar : $(F\circ G)(T-1)$, sabiendo que :

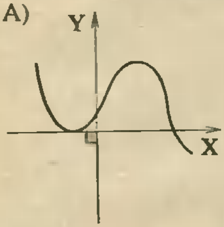
$$(G\circ F)(T)=1$$

A) -1 B) 1 C) 0 D) 2 E) -2

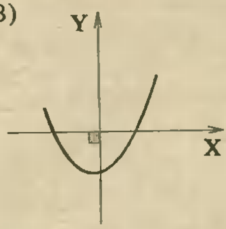
27.- ¿Cuál de las siguientes puede ser la gráfica de la función polinomial :

$$P(x)=x^3+ax+b \;;\; a\neq 0 \;?$$

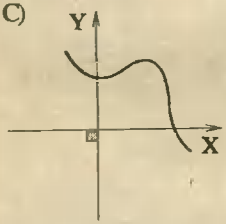
A)



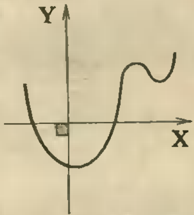
B)



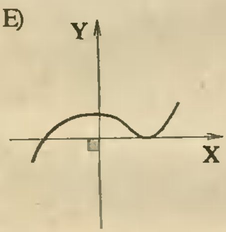
C)



D)



E)



28.- Se tiene una función periódica : $y = F(x)$ con período : $T = 3$, tal que :

$F(5) = 3$. $F(-2) = 7$. Calcular :

$F(11) + F[F(1) + 4]$

A) 3 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

29.- Sean las funciones reales :

$$F(x) = \begin{cases} x+2 & ; \ x<2 \\ 2x-2 & ; \ x \geq 2 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; \ x<0 \\ |x-1| & ; \ x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar el valor de x_0 , sabiendo que :

$$(F+G)\ (x_0) = 18$$

A) -4 B) $-\dfrac{20}{3}$ C) 4 D) $\dfrac{3}{20}$ E) 17

30.- Si : $F(x) = x^2 - 1$

$G(x) = 2x - b$; $b \in \mathbb{R}$;

calcular la suma de los valores de b , tal que :

$$(F \circ G)(1/2) = (G \circ F)(b+1)$$

A) -5 B) 6 C) 5 D) -6 E) 0

31.- ¿Cuál es el *rango* de la función :

$F(x) = |\operatorname{sen} x| + \operatorname{sen} x$; $0 \leq x \leq 360$

A) $\langle 0 ; 2 \rangle$ B) $[0 ; 2]$ C) $\langle -2 ; 0 \rangle$

D) $[-2 ; 0]$ E) N.A.

32.- Dada la función : $F(x) = x^5 + x - 10$, es cierto que :

I) $F(x)$ es Creciente en todo $\mathbb{R}$ y su gráfica corta una sola vez al eje real.

II) $F(x)$ es Inyectiva en todo $\mathbb{R}$ y su gráfica corta tres veces al eje real.

III) $F(x)$ no tiene Inversa.

A) I B) II C) III D) I $\wedge$ II E) I $\wedge$ III

33.- Sea: $F(x) = \sqrt{2-|x|}$ en su mayor *dominio.*

$G = \{(-3;6), (-2;1), (0;2), (1;5), (2;3), (4;-2)\}$

¿Cuántos elementos tiene $F . G$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

34.- Sea : $F : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $F(T) = T^2$

El menor valor de k , tal que :

$$|F(T) . (b-a)| \leq k \ ;$$

para todo T , siendo : $a\,|b| > 0$; es :

A) $b^2 - a^2$ B) $\dfrac{b^2 - a^2}{2}$ C) $(b-a)\,b^2$

D) $(b-a)\,a^2$ E) $a^2 + b^2$

35.- Sea : $F : \mathbb{R} \rightarrow [-1 ; 1]$, tal que :

$$F(x) = \begin{cases} -1 & ; \ x \in \mathbb{Q}' \\ 1 & ; \ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

De las afirmaciones siguientes ¿Cuáles son verdaderas?

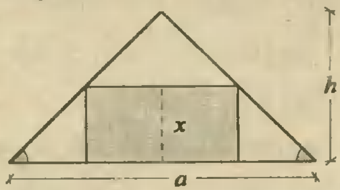
I) $\forall x\,;y \in \mathbb{Q} : F(x) + F(y) = 2F(x+y)$

II) $\forall x\,;y \in \mathbb{Q}' : F(x) + F(y) = 2F(x+y)$

III) $\forall x \in \mathbb{Q}\,;\forall y \in \mathbb{Q}' : F(x)\,.\,F(y) = F(y)$

A) FVV B) VVV C) VVF D) VFV E) VFF

36.- Un triángulo isósceles de base a y altura h lleva inscrito un rectángulo tal como se muestra en la figura :



Expresar el área del rectángulo en términos de su altura x, indicando como respuesta la suma de los extremos finitos del *dominio* de definición de la función encontrada.

A) $2h$ B) $\frac{3}{2}h$ C) h D) $\frac{h}{2}$ E) $a+h$

37.- Sean las funciones :

$F : y = \sqrt{x+4}\ ;\ x \in [\,-4\,;4\,]$

$G = \{(-3;0),(1;4),(2;3),(-2;-2),(-1;-3),(3;4)\}$

Halle la función : $(F^2+G)^{-1}$; indicando como respuesta : $(F^2+G)^{-1}(3)$

A) 1/9 B) -1 C) 1 D) 1/8 E) 1/11

38.- De las siguientes afirmaciones ¿Cuáles son verdaderas?

I) $F(x) = 2 + \operatorname{sen}^2 x - x^2$, es una función par.

II) $G(x) = x\operatorname{sen}^2 x - x^5$, es una función impar.

III) $H(x) = \sqrt[5]{(1+x)^2} + \sqrt[5]{(1-x)^2}$, es una función par.

A) I B) I y II C) II y III

D) Todas E) N.A.

39.- ¿Cuántas funciones lineales existen tal que sean iguales a su Inversa?

A) Ninguna B) 1 C) 2

D) 3 E) F.D.

40.- Dada la función :

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & ;\ x \in \langle -\infty\,;0] \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & ;\ x \in \langle 0\,;\infty\rangle \end{cases} \quad ;$$

hallar F^{-1}, si existe.

A)
$$\begin{cases} \sqrt{2x} & ;\ x \in \langle -\infty\,;0] \\ \frac{1}{x^2} & ;\ x \in \langle 0\,;\infty\rangle \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} -\sqrt{2x} & ;\ x \in \langle -\infty\,;0] \\ \frac{1}{x^2} & ;\ x \in \langle 0\,;\infty\rangle \end{cases}$$

C)
$$\begin{cases} \pm\sqrt{2x} & ;\ x \in \langle -\infty\,;0] \\ \frac{1}{x^2} & ;\ x \in \langle 0\,;\infty\rangle \end{cases}$$

D)
$$\begin{cases} \pm\sqrt{2x} & ;\ x \in \langle -\infty\,;0] \\ \frac{1}{x} & ;\ x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

E)
$$\begin{cases} 2x & ;\ x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & ;\ x \in \langle 0;\infty\rangle \end{cases}$$

25 Función Exponencial y Logarítmica

25.1) FUNCION EXPONENCIAL

Si b es un número real positivo distinto de la *unidad*, se llama función exponencial de base b a aquella función con dominio en el campo real , cuya regla de correspondencia es :

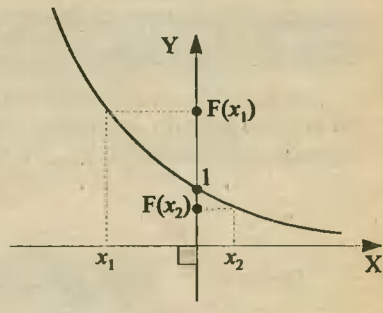
$$F(x) = b^x$$

Es decir : $F = \{(x\,;y)\,/\,y = b^x\ ;\ b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge\ b \neq 1\}$

25.2) GRAFICAS DE LA FUNCION EXPONENCIAL

Se presentan dos casos, esto se debe a los distintos intervalos de valores al que puede pertenecer b.

25.2A Si : $0 < b < 1$



La gráfica de la función será como la que se muestra.;de donde se pueden rescatar las siguientes características:

I) *Dom* (F) = $\langle -\infty\,;\,\infty\rangle$; *Ran* (F) = $\langle 0\,;\,\infty\rangle$.

Esto significa que la curva está situada siempre por encima del eje de las abcisas : X

II) F es univalente (inyectiva) en todo su dominio.

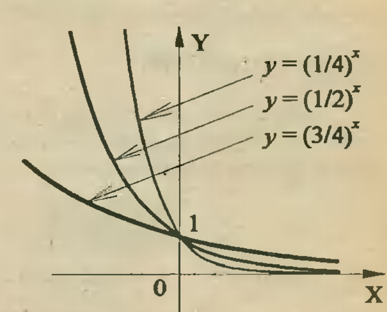
Esto significa que la función tiene inversa.

III) Intercepta al eje Y en (0 ; 1).

Esto significa que el punto $(0\,;\,1) \in F$, $\forall\, b \in \langle 0\,;\,1\rangle$.

IV) La función es decreciente en todo su dominio :

$$\forall\ x_1\,,\,x_2 \in F,\ \text{si} : x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ F(x_1) > F(x_2)$$

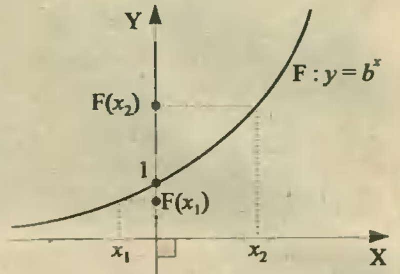


V) Si x crece ilimitadamente entonces F (x) se aproxima a cero.

VI) Si x decrece ilimitadamente entonces F(x) crece ilimitadamente.

25.2B Si : $b > 1$

La gráfica de la función resulta ser como la que se muestra al lado ,de donde se pueden rescatar las siguientes propiedades:



I) *Dom* (F) = $\langle -\infty ; \infty \rangle$; *Ran* (F) = $\langle 0 ; \infty \rangle$, la curva está situada siempre por encima del eje de las abcisas (eje X)

II) F. es univalente (inyectiva) en todo su dominio

Esto significa que tiene inversa.

III) Intercepta al eje Y en (0 ; 1)

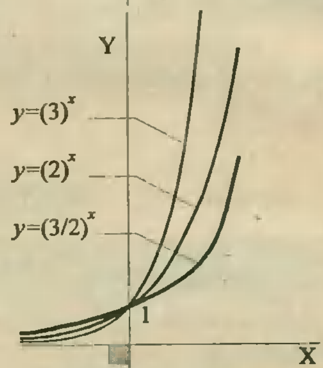
Esto significa que el punto $(0 ; 1) \in F$, $\forall b \in \langle 1 ; \infty \rangle$

IV) La función es creciente en todo su dominio :

$$\forall\ x_1 , x_2 \in F , \text{si} : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) < F(x_2)$$

V) Si x crece ilimitadamente, F (x) también crece ilimitadamente.

VI) Si x decrece ilimitadamente F(x) se aproxima a cero.



25.3) FUNCION LOGARITMICA

Si b es un número real positivo distinto a la unidad ,se llama función logaritmica en base b a aquella función que tiene por dominio al conjunto de los números reales positivos, cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$F(x) = \log_b x$$

Es decir : $F = \{(x ; y) / y = \log_b x \ ; \ b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b \neq 1 \ \wedge \ x \in \mathbb{R}^+\}$

Frecuentemente a la función logaritmo en base b se le define como la función inversa de la función exponencial de base b.

25.3A LOGARITMO

«Se denomina logaritmo de un *número real positivo* al exponente al cual será necesario elevar una base positiva y diferente de la unidad para obtener como resultado una potencia igual al número propuesto»

Notación : $y = \log_b x$ .... (I)

Donde : y = logaritmo ($y \in \mathbb{R}$)

x = número propuesto ($x \in \mathbb{R}^+$)

b = base ($b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ b \neq 1$)

De acuerdo con la definición de logaritmo y de la notación (I) ,se puede establecer que:

$$b^y = x \quad \text{..} \quad \text{(II)}$$

Si se sustituye (I) en (II) se obtendrá la siguiente igualdad fundamental :

$b^{\log_b x} = x$. Esto equivale a simplificar b con $\log_b$

Ejemplo.- *De acuerdo con la definición de logaritmo , podemos establecer :*

1) *Como :* $2^3 = 8$, *entonces :* $3 = \log_2 8$

Esto se lee así : « 3 es el logaritmo de 8 en base 2 »

2) *Como :* $3^{-3} = \frac{1}{27}$, *entonces :* $-3 = \log_3 \frac{1}{27}$

Esto se lee así : « -3 es el logaritmo de $\frac{1}{27}$ en base 3 »

25.4) GRAFICAS DE LA FUNCION LOGARITMICA

Como la función logarítmica, resulta ser la inversa de la función exponencial, es necesario estudiar los mismos casos que se presentaron en el item 25.2 :

25.4A Si : $0 < b < 1$

Para este caso la gráfica de la función logaritmo es como se muestra al lado; de donde se pueden apreciar las siguientes propiedades:

I) *Dom* (F) = $\langle 0 ; \infty \rangle$; *Ran* (F) = $\langle -\infty ; \infty \rangle$.

Esto significa que la curva está situada siempre a la derecha del eje de las ordenadas (eje Y)

II) F es univalente (inyectiva) en todo su dominio

Esto significa que tiene inversa.

III) Intercepta al eje X en (1 ; 0)

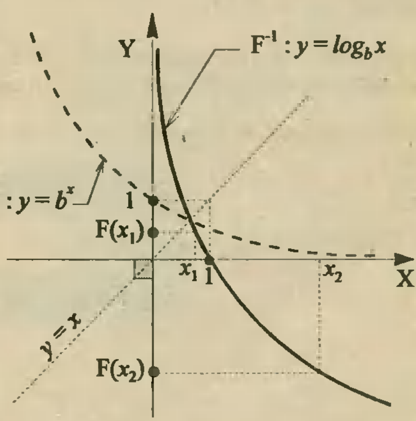
Esto significa que el punto : $(1 ; 0) \in F$

IV) La función es decreciente en todo su dominio .

$$\forall\, x_1 , x_2 \in F , \text{si} : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; F(x_1) > F(x_2)$$

V) Si x crece ilimitadamente, F (x) decrece ilimitadamente.

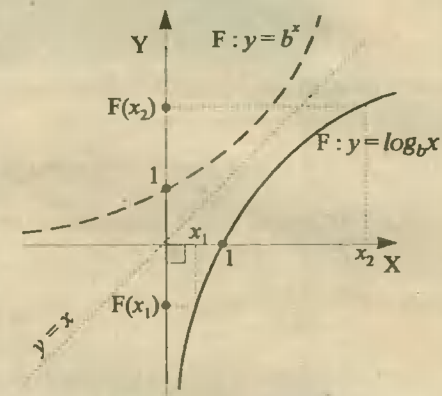
VI) Si x se aproxima cero, F(x) crece ilimitadamente.



25.4B Si : $b > 1$

La gráfica de la función es como la mostrada en la figura

De donde podemos apreciar las siguientes propiedades:



I) *Dom* (F) = $\langle 0 ; \infty \rangle$; *Ran* (F) = $\langle -\infty ; \infty \rangle$, la curva está situada siempre a la derecha del eje de las ordenadas (eje Y)

II) F. es univalente (inyectiva) en todo su dominio por lo tanto tiene inversa.

III) Intercepta al eje X en (1 ; 0) es decir el punto $(1 ; 0) \in F$

IV) La función es creciente en todo su dominio :

$\forall\ x_1 , x_2 \in F$. Si : $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

V) Si x crece ilimitadamente, F (x) crece ilimitada mente.

VI) Si x se aproxima a cero F (x) decrece ilimitada mente.

25.5) PROPIEDADES GENERALES DE LA FUNCION LOGARITMICA

25.5A En el campo de los números reales no existe el logaritmo para números negativos.

25.5B Si la base b está comprendida entre cero y uno $(0 < b < 1)$ los números comprendidos entre cero y uno tienen logaritmos positivos y los logaritmos de números mayores que uno serán negativos.

25.5C Si la base b es mayor que *uno* $(b > 1)$, los números comprendidos entre *cero* y *uno* tienen logaritmos negativos y los logaritmos de números mayores que uno serán positivos.

25.5D El logaritmo de la unidad es *cero*.

$$log_b\ 1 = 0 \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge\ \ b \neq 1$$

25.5E El logaritmo de la base es *uno*.

$$log_b\ b = 1 \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^+ \ \wedge\ \ b \neq 1$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO I)

1.- Calcular el logaritmo de $1997^2\ \sqrt[3]{1997}$ en la base $1997^3\ \sqrt{1997}$.

A) 1997 *B) $\frac{1}{1997}$* *C) $\frac{3}{2}$* *D) $\frac{2}{3}$* *E) 1998*

Resolución.-

Sea α el logaritmo de $1997^2\ \sqrt[3]{1997}$ en la base $1997^3\ \sqrt{1997}$, es decir : $\alpha = log_{1997^3\ \sqrt{1997}}\ 1997^2\ \sqrt[3]{1997}$

De acuerdo con la definición dada en el item 25.3A se puede establecer que : $\left(1997^3\ \sqrt{1997}\right)^{\alpha} = 1997^2\ \sqrt[3]{1997}$

Aplicando teoremas de exponentes en ambos miembros de la igualdad se consigue: $\left(\sqrt{1997^7}\right)^{\alpha} = \sqrt[3]{1997^7}$

Convirtiendo a exponentes fraccionarios : $1997^{\frac{7\alpha}{2}} = 1997^{\frac{7}{3}}$

Por analogía , se puede establecer que : $\frac{7\alpha}{2} = \frac{7}{3}$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \qquad \therefore \qquad \alpha = \frac{2}{3}$$ **RPTA. D**

2.- Si en la función $F(x) = 2^{ax+1}$, se cumple que : $x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\ /\ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2)$ Luego se puede afirmar que :

A) $1 < a$ *B) $a < 0$* *C) $a \geq 0$* *D) $-1 < a < 1$* *E) N.A*

Resolución.-

Por condición del problema, se sabe que : $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$ .... (1)

Asimismo sabemos que : $F(x_1) > F(x_2)$

De la regla de correspondencia dada, hallamos $F(x_1)$ y $F(x_2)$: $2^{ax_1+1} > 2^{ax_2+1}$

Comparando los exponentes tendremos : $ax_1 + 1 > ax_2 + 1$

Eliminando el «1» de cada miembro : $ax_1 > ax_2$

Transponiendo términos y factorizando : $a\left(x_1 - x_2\right) > 0$ .... (2)

Utilizando (1) en (2) , concluímos que : $a < 0$ **RPTA. B**

3.- ¿Qué valor de x verifica la igualdad : $2^{\log_2(2x-3)} + 3^{\log_3(3x-4)} + 4^{\log_4(4x-2)} = 9$?

A) 10 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 12*** ***E) 7***

Resolución.-

Teniendo en cuenta la igualdad fundamental vista en el item 25.3A , podemos realizar una simplificación de modo que la igualdad dada ,es equivalente a : $(2x - 3) + (3x - 4) + (4x - 2) = 9$

Eliminando paréntesis , tendremos : $2x + 3x + 4x - 3 - 4 - 2 = 9$

Reduciendo, encontramos : $9x = 18 \Rightarrow \mathbf{x = 2}$ **RPTA. B**

4.- Obtener la gráfica de la función cuya regla de correspondencia es :F (x) = $\log_3(3 - x)$

Resolución.-

Teniendo en cuenta los pasos indicados para graficar una relación vistos en el Cap.23 , en este problema debemos proceder del siguiente modo :

1º Obtenemos el dominio : $Dom\ (F) : 3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$

2do Intersección con el eje X (se hace $y = 0$) $\log_3(3 - x) = 0$

De aquí deducimos que : $1 = 3 - x \Rightarrow x = 2$

Es decir la gráfica de F corta el eje X en el punto : $(2 ; 0)$

3ro Intersección con el eje Y (se hace $x = 0$) :

$y = \log_3(3 - 0) = \log_3 3$

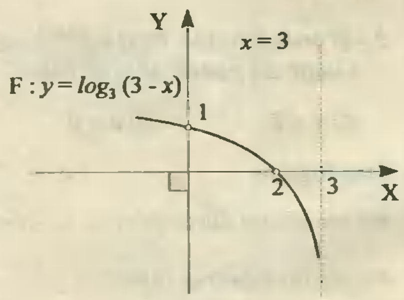
De aquí deducimos que : $y = 1$

Es decir la gráfica de F corta el eje Y en el punto $(0 ; 1)$

4to Obtenemos la asíntota de la gráfica:

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ Asíntota vertical

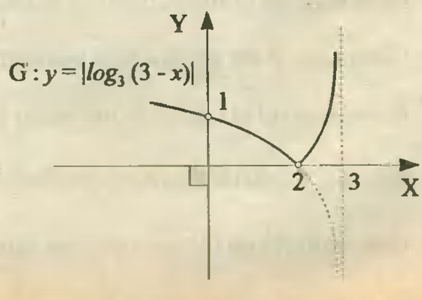
Finalmente la gráfica es como se muestra al lado .



5.- Del problema anterior, graficar G = |F (x)|

Resolución.-

Considerando como dato la gráfica del problema anterior, es fácil deducir que para graficar $|F(x)|$, es suficiente reflejar en el eje X la parte del gráfica $F(x)$ que se encuentra por debajo del mencionado eje, veamos.



6.-¿Qué valor de x verifica la siguiente ecuación : $x^{\log_x(x+1)} = 2$?

A) 2 ***B) 1*** ***C) 3*** ***D) 1/2*** ***E) No existe tal x***

Resolución.-

Debemos reconocer que "x" es la base del logaritmo, luego : $x \in \mathbb{R}^+ \wedge x \neq 1$ .... (*)

Aplicando la propiedad vista en el item 25.3A , podemos realizar una simplificación que nos conduce a la siguiente ecuación equivalente : $x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$

Pero de (*), sabemos que $x \neq 1$, por lo tanto : **No existe tal x** **RPTA. E**

7.- Proporcionar el equivalente de : $\log_2(tg\,1^o)^3 \cdot \log_3(tg\,2^o)^4 \cdot \log_4(tg\,3^o)^5$ .... 89 factores

A) 1 ***B) 0*** ***C) 0,5*** ***D) 89*** ***E) F.D***

Resolución.-

Al examinar detenidamente la multiplicación dada, será fácil deducir que uno de los 89 factores es la expresión : $\log_{46}(tg\,45^o)^{47}$ ......(*)

Recordando que tg 45° = 1 ; el factor indicado en (*), será : $\log_{46}(1)^{47} = \log_{46}(1)$

De acuerdo con el item 25.5E el logaritmo de la *unidad* es igual a cero, esto significa que : $\log_{46}(tg\,45^o)^{47} = 0$

Luego como uno de los 89 factores es *cero*, el equivalente de la multiplicación dada necesariamente será igual a :

cero **RPTA. B**

25.6) SISTEMAS DE LOGARITMOS

Un sistema de logaritmos de base b, es el conjunto de todos los logaritmos de los números reales positivos en base b, tal que $b > 0 \;\wedge\; b \neq 1$.

Ejemplo.- *Para los conjuntos* : $A = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y = log_2 x \;\; ; \;\; x \in \mathbb{R}^+\}$

$B = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y = log_{0,8} x \;\; ; \;\; x \in \mathbb{R}^+\}$

Tenemos : A : Es un sistema de logaritmos en base 2

B : Es un sistema de logaritmos en base 0,8

Es fácil deducir que así como existen infinitas bases, existen también infinitos sistemas de logaritmos de entre los cuales los de mayor uso son dos :

25.6A SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES

También llamados logaritmos vulgares o logaritmos de Briggs, es el sistema que tiene como base al número 10, es decir :

$$A = \left\{ y \in \mathbb{R} \;/\; y = log_{10} x \;\; ; \;\; x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

Notación utilizada : $\boxed{y = log_{10} x = log\, x}$

Lectura: $y = log\, x$: logaritmo decimal del número x

25.6B SISTEMA DE LOGARITMOS NATURALES

También llamado sistema de logaritmos neperianos, en honor a su inventor Jhoan Napier, es el sistema que tiene como base al número irracional : $e = 2,718\,281\,82...$

Notación utilizada : $\boxed{y = log_e x = ln\, x}$

Lectura : $y = ln\, x$: logaritmo natural del número x

25.6C FORMULAS DE CONVERSION

I) Conversión de logaritmos naturales en decimales

$$\boxed{log\, x = 0,4343\, ln\, x}$$

Dato

Incógnita

II) Conversión de logaritmos decimales en naturales.

$$\boxed{ln\, x = 2,302\,6\, log\, x}$$

Dato

Incógnita

25.7) PROPIEDADES OPERATIVAS DE LOS LOGARITMOS

25.7A Logaritmo de un Producto : $\forall\, b > 0 \;\wedge\; b \neq 1 \;;\; \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\log_b x_1 + \log_b x_2 = \log_b (x_1 \,.\, x_2)$$

Ejemplo.- *Reducir* : $T = \log_8 4 + \log_8 2$

Por la propiedad : $T = \log_8 (4\,.\,2) = \log_8 8$

$\therefore \quad T = 1$

25.7B Logaritmo de un Cociente : $\forall\, b > 0 \;\wedge\; b \neq 1 \;;\; \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\log_b x_1 - \log_b x_2 = \log_b \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Ejemplo.- *Reducir* : $T = \log_5 125 - \log_5 25$

Por la propiedad : $T = \log_5 \left(\frac{125}{25}\right) = \log_5 (5)$

$\therefore \quad T = 1$

25.7C Logaritmo de una Potencia : $\forall\, b > 0 \;\wedge\; b \neq 1 \;;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \;;\; \forall\, \theta \in \mathbb{Q}$

$$\log_b x^\theta = \theta \log_b x$$

Ejemplo.- *Reducir* : $T = \log_3 3^4 - \log_2 2^5 + \log_7 7^3$

Por la propiedad : $T = 4(\log_3 3) + 5(\log_2 2) + 3(\log_7 7)$

$T = 4\,(1) + 5\,(1) + 3\,(1)$

$T = 4 + 5 + 3 \qquad \therefore \qquad \mathbf{T = 12}$

25.7D $\forall\, b > 0 \;\wedge\; b \neq 1 \;;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \;;\; \forall\, \theta \in \mathbb{Q}$

$$\log_b x = \log_{b^\theta} x^\theta$$

Ejemplo.- *Para* $\log_9 16$ *tenemos :*

$\log_9 16 = \log_{9^2} 16^2 = \log_{81} 256$, o , también

$\log_9 16 = \log_{\sqrt{9}} \sqrt{16} = \log_3 4$

25.7E CAMBIO DE BASE

Permite expresar el logaritmo de un número x en base b en otra base m, según la fórmula :

$$\log_b x = \frac{\log_m x}{\log_m b} \quad \Rightarrow \quad \log_m x = \log_b x \cdot \log_m b$$

Incógnita ($\log_m x$)
Dato ($\log_b x$)
Dato ($\log_m b$)

Ejemplo.- *Expresar* $\log_3 5$ *, en base* 2 .

De acuerdo con la 1ra fórmula : $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$

Ejemplo.- *Expresar* $\log_7 3$ *en base* 7.

Según la 1ra fórmula : $\log_7 3 = \dfrac{\cancel{\log_3 3}}{\log_3 7}$; es decir : $\log_7 3 = \dfrac{1}{\log_3 7}$

Propiedad.- El logaritmo de un número x en base b es igual al inverso del logaritmo de b en base x

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$$

25.8) REGLA DE LA CADENA

Es una relación matemática que permite multiplicar logaritmos dispuestos en la forma siguiente:

$$\log_b a \cdot \log_a c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_b e$$

Ejemplo.- *Calcular el valor de x de la igualdad :* $\log_x 7 \cdot \log_7 32 = 5$

Aplicar la regla de la cadena en el primer miembro es equivalente a hacer simplificaciones sucesivas , tal como se indica : $\log_x \cancel{7} \cdot \cancel{\log_7} 32 = 5$

Después de simplificar cuidadosamente , nos queda : $\log_x 32 = 5$

Por definición de logaritmo se debe establecer que : $x^5 = 32$

Elevando a la exponente 1/5 , se tendrá : $x = \sqrt[5]{32} \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Observaciones.- *Para la resolución de algunos ejercicios pueden ser útil tener en cuenta las siguientes relaciones.*

I) Si : $\log_b x_1 = \log_b x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ $\begin{cases} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ b>0 \wedge b \neq 1 \end{cases}$

II) Si : $\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall\, a, c \in \mathbb{R}^+ \\ b>0 \wedge b \neq 1 \end{array} \right.$

25.9) COLOGARITMO Y ANTILOGARITMO

25.9A COLOGARITMO

Se llama cologaritmo de un número de una base dada al opuesto (negativo) del logaritmo de dicho número, es decir.

$$\boxed{\operatorname{colog}_b x = -\log_b x} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \\ b>0 \wedge b \neq 1 \end{array} \right.$$

25.9B ANTILOGARITMO

Llamada también exponencial, se define así :

$$\boxed{\operatorname{antilog}_b x = b^x} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, x \in \mathbb{R} \\ b>0 \wedge b \neq 1 \end{array} \right.$$

Ejemplo.- *Reducir* : $T = \underbrace{\operatorname{colog}_2 4} + \underbrace{\operatorname{antilog}_4 (0{,}5)}$

Por las definiciones : $T = -\log_2 4 + 4^{0,5}$

$T = -\log_2 2^2 + 4^{\frac{1}{2}}$

Por propiedad : $T = -2(\log_2 2) + \sqrt{4}$

$T = -2(1) + 2$

$\therefore$ $\mathbf{T = 0}$

25.9C RELACION ENTRE OPERACIONES : *colog* ; *antilog* y *log*

I) $\boxed{\operatorname{antilog}_b(\log_b x) = x}$

II) $\boxed{\log_b(\operatorname{antilog}_b x) = x}$

III) $\boxed{\operatorname{colog}_b(\operatorname{antilog}_b x) = -x}$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO II)

8.- El equivalente de : $16^{\log_9 8^{\log_4 3}}$ ***, es :***

A) 2 *B) 4* *C) 8* *D) 16* *E) 32*

Resolución.-

Sea T el equivalente pedido ,de este modo : $T = 16^{\log_9 8^{\log_4 3}}$

Nuestra estrategia consistirá en reducir de arriba hacia abajo el par de términos indicados , veamos : $T = 16^{\log_9 8^{\log_4 3}}$

Aplicando la propiedad 25.7C, referida al logaritmo de una potencia , tendremos : $T = 16^{\log_4 3 . \log_9 8}$ .... (*)

Ahora haciendo uso de la propiedad 25.7D, se logra establecer la siguiente equivalencia : $\log_4 3 = \log_{4^2} 3^2 = \log_{16} 9$

Reemplazando en (*) se tendrá : $T = 16^{\log_{16} \cancel{9 . \log_9} 8}$

Luego de aplicar la regla de la cadena , se obtiene : $T = 16^{\log_{16} 8}$

Finalmente por la igualdad fundamental vista en el item 25.3A se puede concluir que : **T = 8** **RPTA. C**

9.- El mayor valor de x que verifica : $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$ ***; es :***

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

Resolución.-

La igualdad mostrada es equivalente a : $\log(35 - x^3) = 3\log(5 - x)$

Aplicando la propiedad de logaritmo de una Potencia : $\log(35 - x^3) = \log(5 - x)^3$

En base a la observación (I) del item 25.8.,se tendrá : $35 - x^3 = (5 - x)^3$

Desarrollando el 2do miembro, se establece que : $35 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3$

Reduciéndo y transponiendo términos se consigue : $3x^2 - 15x + 18 = 0$

Factorizando en el 1er miembro , se tiene : $(3x - 6)(x - 3) = 0$

De esta última igualdad se concluye que : $x = 2$; $x = 3$ **RPTA. B**

10.- La menor raíz de la ecuación : $3\log x - \log 32 = 2\log\left(\frac{x}{2}\right)$ ***; es :***

A) 6 *B) 12* *C) 4* *D) 8* *E) 16*

Resolución.-

Utilizando la propiedad del logaritmo de una Potencia, la igualdad mostrada será : $\log x^3 - \log 32 = \log\left(\frac{x}{2}\right)^2$

Aplicando ahora la Propiedad del logaritmo de un cociente : $\log\left(\frac{x^3}{32}\right) = \log\left(\frac{x}{2}\right)^2$

Tal como hicimos en el ejercicio anterior, se establece : $\frac{x^3}{32} = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

Efectuando en el 2do miembro, se tendrá : $\frac{x^3}{32} = \frac{x^2}{4}$

Considerando que $x \neq 0$, simplificamos para obtener : $\frac{x}{32} = \frac{1}{4}$

Efectuando , se concluye que : $x = 8$ **RPTA. D**

11.- Calcular : $x^2 + 1$ ***, si x verifica :*** $(\log_x 9)^2 - 4(\log_x 9) + 4 = 0$

A) -3 *B) 10* *C) ± 3* *D) 2* *E) 4*

Resolución.-

Examinando el 1er miembro , logramos reconocer que : $(\log_x 9)^2 - 4(\log_x 9) + 2^2 = 0$

Sustituyendo lo indicado por un T.C.P., se establece : $(\log_x 9 - 2)^2 = 0$

Elevando ambos miembros al exponente 1/2, se tiene : $\log_x 9 - 2 = 0$

Transponiendo términos , se consigue que : $\log_x 9 = 2$

Por definición de logaritmo, se puede plantear que : $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Como x es base de un logaritmo, ésta debe ser de signo (+) : $\therefore$ $x = 3$ **RPTA. B**

12.- Si se cumple que : $2\left(5^{\log_7 x}\right) + 3\left(x^{\log_7 5}\right) = 125$ ***¿Cuál es el valor de x?***

A) 47 *B) 48* *C) 49* *D) 50* *E) 46*

Resolución.-

Nuestra estrategia consitirá en transformar la ecuación dada en base a la relación II vista en la observación del item 25.8. Veamos : $x^{\log_7 5} = 5^{\log_7 x}$

Reemplazando en la ecuación original, tendremos : $2\left(5^{\log_7 x}\right) + 3\left(5^{\log_7 x}\right) = 125$

Reduciendo , encontramso que : $5\left(5^{\log_7 x}\right) = 125$

Simplificando en cada miembro, nos queda : $5^{\log_7 x} = 25$

Transformando el 2do miembro, se establece que : $5^{\log_7 x} = 5^2$

Por analogía , igualamos los exponentes y nos queda : $\log_7 x = 2$

Por definición de logaritmo, se concluye que : $x = 7^2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 49}$ **RPTA. C**

13.- Encontrar el valor de "x" de tal manera que verifique la siguiente ecuación :

$$x \log 3 + \log (\log 3) = \log (3 \log 27)$$

A) 2 *B) 4* *C) 1/2* *D) 3* *E) 9*

Resolución.-

Tal como hicimos en los ejercicios anteriores , trataremos de presentar dos logaritmos en cada miembro de la igualdad dada. Veamos :

Aplicando la propiedad del Logaritmo de una Potencia , se tendrá : $\log 3^x + \log (\log 3) = \log (3 \log 27)$

Utilizando la propiedad para el logaritmo de un producto, tendremos : $\log \left[3^x (\log 3)\right] = \log (3 \log 27)$

Por comparación, se puede establecer : $3^x (\log 3) = 3 \log 27$

Transformando el $\log 27$, tendremos : $3^x \,.\, \log 3 = 3 \,.\, \log 3^3$

Aplicando la propiedad del logaritmo de una Potencia : $3^x \,.\, \log 3 = 9 \,.\, \log 3$

Simplificando , nos queda : $3^x = 9 = 3^2$

Finalmente se observa que : $\boldsymbol{x = 2}$ **RPTA. A**

14.- Resolver para x : $\left(colog_x\, ax\right)\left(colog_a\, x\right) = 1 - colog_x \sqrt{a}$

A) $a^{\sqrt{2}}$ *B)* $a^{-\sqrt{2}}$ *C)* $a^{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$ *D)* $a^{\pm 2\sqrt{2}}$ *E) N.A*

Resolución.-

Por definición de cologaritmos, la ecuación queda así : $\left(-\log_x ax\right)\left(-\log_a x\right) = 1 + \log_x \sqrt{a}$

Efectuando en el 1er miembro, tendremos : $\left(\log_x ax\right)\left(\log_a x\right) = 1 + \log_x \sqrt{a}$

Aplicando la propiedad de logaritmo para un producto, se puede estrablecer que : $(\log_x a + \underbrace{\log_x x})(\log_a x) = 1 + \log_x a^{\frac{1}{2}}$

Ahora aplicamos la Propiedad del logaritmo de la base en lo indicado : $(\log_x a + 1)(\log_a x) = 1 + \frac{1}{2}(\log_x a)$... (1)

Hagamos ahora un cambio de variable : $\log_x a = m$............ (2)

Y según la propiedad expuesta en el item 25.7E : $\log_a x = \frac{1}{m}$ .... (3)

Luego sustituyendo (2) y (3) en (1), se tendrá : $(m + 1) \cdot \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2}m$

Efectuando y simplificando, nos queda : $m^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\sqrt{2}$

Finalmente sustituímos estos valores en (3), y se consigue : $\log_a x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

En conclusión y por definición nos queda : $x = a^{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **RPTA. C**

15.- Al reducir : $\frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3} + \frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$ ***; se obtiene :***

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 1/2* *E) -3*

Resolución.-

Sea T el valor reducido de la expresión dada , es decir : $T = \frac{1+\overbrace{\log_2 3}}{1-\underbrace{\log_2 3}} + \frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$ .... (I)

Expresando en base 3 el término señalado , se obtiene :

$$\frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3} = \frac{1+\frac{\log_3 3}{\log_3 2}}{1-\frac{\log_3 3}{\log_3 2}} = \frac{\frac{\log_3 2+1}{\log_3 2}}{\frac{\log_3 2-1}{\log_3 2}} = \frac{\log_3 2+1}{\log_3 2-1} = -\frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$$

Es decir : $\frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3} = -\frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$ .... (II)

Luego sustituyendo (II) en (I) se tendrá : $T = -\frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2} + \frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$

$\therefore$ $T = 0$ **RPTA. A**

25.10) LOGARITMOS DECIMALES

Como ya se ha señalado en el item 25.6B, reciben este nombre todos aquellos logaritmos de base 10 como por ejemplo :

$$y = \log x \quad , \text{donde :} \quad x = 10^y$$

Es fácil deducir que si «x» es una potencia exacta de 10, es decir ,de exponente entero, su logaritmo «y» decimal, es también un número entero ; en cambio si «x» es una potencia de exponente fraccionario de 10, su logaritmo decimal «y» será también un número fraccionario.

Ejemplos .- $\log 100 = \log 10^2 = 2$

$\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3$

$\log \sqrt[4]{10} = \log 10^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

Si «x» no es una potencia racional de 10 ,su logaritmo es un número irracional.

Observación.- *Dentro del cálculo logarítmico, es frecuente usar los logaritmos de 2 y 3 ya que conociendo a estos ,y con el auxilio de las propiedades de los logaritmos, se podrán conocer los logaritmos de todos los números compuestos por ellos.*

I) $\log 2 = 0{,}30103$

II) $\log 3 = 0{,}47712$

25.10A FORMA GENERAL DE UN LOGARITMO DECIMAL

$$\boxed{\log x = \text{CARACTERISTICA} \ , \ \text{MANTISA}} \quad \forall \ x > 0$$

Donde la característica y la mantisa se definen de la siguiente manera :

I) Característica.- Es la parte entera del $\log x$; ésta puede ser positiva o negativa y se puede calcular mediante reglas sencillas.

II) Mantisa.- Es la parte decimal del $\log x$, y se calcula mediante tablas.

25.10B DETERMINACION DE LA CARACTERISTICA

Considerando al logaritmo de x : $\log x$, se distinguen dos casos para determinar su característica , la misma que se calculará teniendo en cuenta las siguientes reglas :

I) Si $x > 1 \Rightarrow \log x > 0$

La característica en estos casos es *positiva* e igual al número de cifras de la parte entera de x disminuído en uno (1).

Ejemplo.- $\log \overbrace{457}$, la característica es : $3 - 1 = 2$

$\log 2\,457{,}29$, la característica es : $4 - 1 = 3$

II) Si $0 < x < 1 \Rightarrow \log x < 0$

La característica en estos casos es *negativa* e igual al número de ceros que suceden a la primera cifra significativa de x incluyendo al cero ubicado a la izquierda de la coma decimal.

Ejemplo.- $\log \overbrace{0{,}000}923$, la característica es : $-4 = \bar{4}$

$\log 0{,}008\,9$, la característica es : $-3 = \bar{3}$

Observación.- *La expresión* $\bar{3},176\,091$ *indica que solo la parte entera es negativa, es decir, no debe confundirse con :* $-3,176\,091$.

Si se desea saber el valor de $\bar{3},176\,091$, se deberá efectuar así : $-3 + 0{,}176\,091 = -2{,}823\,909$

25.11) LOGARITMO COMPLEJO

Sea : Z un número complejo , tal que : $\theta = \text{Arg}(Z)$, entonces su logaritmo se calcula según la siguiente relación:

$$\boxed{\ln Z = \ln |Z| + \theta i} \qquad ; \qquad \theta = \text{Argumento principal}$$

Ejemplo.- *Calcular* : $\ln i$

Observar que : $Z = i \Rightarrow \text{Arg}(Z) = \theta = \frac{\pi}{2}$ ....(Argumento Principal)

Además : $|Z| = 1$

Finalmente se tendrá : $\ln i = \ln |Z| + \theta i = \ln (1) + \frac{\pi}{2} i$

$$\therefore \quad \ln i = \frac{\pi}{2} i$$

25.12) LOGARITMO DE NUMEROS NEGATIVOS

El logaritmo para números negativos no existe en el campo de los números reales, sin embargo *si existe en el campo de los números complejos* y se puede calcular según la relación :

$$\boxed{\log(-x) = \log x + 1{,}36439\, i}$$

Ejemplo.- *Calcular* $\log(-4)$

De acuerdo con la fórmula, planteamos : $\log(-4) = \log 4 + 1{,}36439\, i = 2 \log 2 + 1{,}36439\, i$

$\log(-4) = 2\,(0{,}30103) + 1{,}36439\, i$

$$\therefore \quad \log(-4) = 0{,}60206 + 1{,}36439\, i$$

Observación.- *El resultado anterior nos sugiere que :*

$$-4 = 10^{(0{,}60206+1{,}36439i)} \Rightarrow -4 = 10^{0{,}60206} \cdot 10^{1{,}36439i}$$

25.13) INECUACIONES LOGARITMICAS

25.13A Consideremos : $y = log_b x$, con : $0 < b < 1$

De la Fig. 1, se observa que : **Si :** $x_1 < x_2 \Rightarrow log_b(x_1) > log_b(x_2)$

25.13B Consideremos : $y = log_b x$, con : $b > 1$

De la Fig. 2 , se observa que : **Si :** $x_1 < x_2 \Rightarrow log_b(x_1) < log_b(x_2)$

Fig. 1

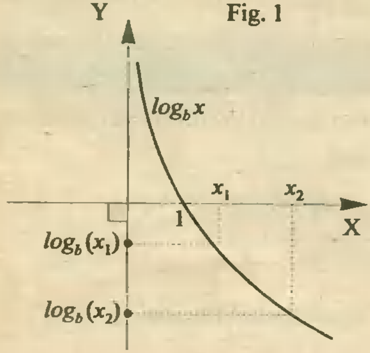
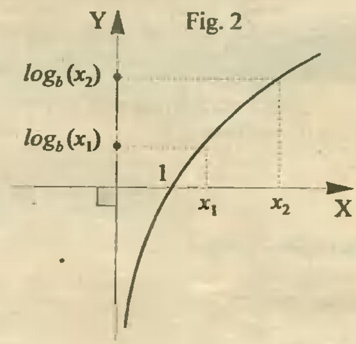


Fig. 2



Observación *.- Luego de analizar cuidadosamente las gráficas adjuntas se deducen dos casos.*

I) Siendo : $0 < b < 1$, $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$

$$\text{Si : } log_b x_1 > log_b x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$$
$$\text{Si : } log_b x_1 < log_b x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$$

II) Siendo : $b > 1$, $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$

$$\text{Si : } log_b x_1 > log_b x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$$
$$\text{Si : } log_b x_1 < log_b x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$$

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO III)

16.- Si log a = $\bar{7}$,369634 , log b = -2,204513 ; calcular : $\log\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{b}\right)$

A) 2,533 207 B) 3,684 915 C) 2,198 904 D) 1,154 842 E) 1,182 012

__Resolución__.-

Resulta necesario transformar el dato del *log a* ,expresandolo en su forma decimal, de este modo será fácil aplicar las propiedades de los logaritmos .Veamos :

$$\log a = \bar{7},369\,634 = -7 + 0,369634 = -6,6303666$$

Sea "T" el valor a calcular es decir : $T = \log\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{b}\right)$

Aplicando la propiedad del logaritmo de un cociente : $T = \log\sqrt[3]{a} - \log b^2$

Transformando el radical a exponente fraccionario : $T = \log a^{\frac{1}{3}} - \log b^2$

Utilizando la propiedad del logaritmo de una Potencia : $T = \frac{1}{3}(\log a) - 2(\log b)$

Reemplazando los valores de *log a* y *log b* : $T = \frac{1}{3}(-6,630366) - 2(-2,204513)$

Finalmente efectuando se consigue : $\mathbf{T = 2,198904}$ **RPTA. C**

17.- ¿Cuántas cifras tiene el número 18^{300}

A) 374 B) 375 C) 376 D) 377 E) 378

__Resolución__.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 25.10B la cantidad de cifras que tiene un número *x* esta relacionado con su *característica* de la manera siguiente :

$$\log x = \boxed{\text{CARACTERISTICA}}\ ,\ \boxed{\text{MANTISA}}$$

$$\boxed{\#\ \text{cifras de } x = \boxed{\text{CARACTERISTICA}} + 1} \quad ......(*)$$

En el problema hagamos : $x = 18^{300}$

Luego tomando logaritmo decimal se tendrá : $\log x = \log 18^{300}$

Aplicando la propiedad del logaritmo de una Potencia : $\log x = 300\ (\log 18)$

Transformando 18 , se tendrá : $\log x = 300 \log(3^2 . 2)$

Aplicando la propiedad del loagaritmo de un producto : $\log x = 300\left(\log 3^2 + \log 2\right)$

Utilizando la propiedad del loagaritmo de una potencia : $\log x = 300\,(2\log 3 + \log 2)$ ..... (**)

Recordemos que : $\log 2 = 0{,}301\,0 \quad \wedge \quad \log 3 = 0{,}477\,1$

Luego reemplazando en (**), se tendrá : $\log x = 300\,[2\,(0{,}4771) + 0{,}3010]$

Efectuando se tendrá que : $\log x = 300\,(1{,}2552) = 376{,}56$

De aquí podemos observar que : Característica = 376

Finalmente, reemplazando en (*) : # cifras de $\boldsymbol{x = 377}$ **RPTA. D**

18.- Obtener el valor principal de : ln (1 + i)

A) $\ln + \frac{\pi}{4}$ *B)* $\ln 2 + \frac{\pi}{2} i$ *C)* $\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} i$ *D)* $\ln 4 + \frac{\pi}{4} i$ *E)* $\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i$

Resolución.-

De acuerdo con lo expuesto en el item 25.11 ,debemos recordar que : $\ln Z = \ln |Z| + \theta\, i$ ...... (I)

En el problema se reconoce que : $Z = 1 + i$

En consecuencia, podemos establecer que : $|Z| = \sqrt{2} \quad \wedge \quad \theta = \frac{\pi}{4}$ .... (II)

Finalmente sustituyendo (II) en (I), se consigue : $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i$ **RPTA. E**

19.- Resolver : $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x-1) > 2$

A) $\left\langle 1\ ;\ \frac{10}{9}\right\rangle$ *B)* $\left\langle -1\ ;\ \frac{9}{10}\right\rangle$ *C)* $\langle 0\ ;\ 1\rangle$ *D)* $\langle 1\ ;\ 3\rangle$ *E)* $\left\langle \frac{9}{10}\ ;\ \frac{10}{9}\right\rangle$

Resolución.-

Nuestra estrategia consistirá en presentar expresiones logaritmicas en ambos miembros de la desigualdad , de este modo se podrán aplicar las propiedades referidas a desigualdades con logaritmos expuestas en el item 25.13. Veamos :

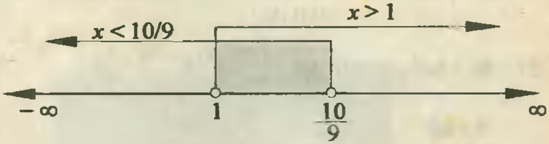
Debemos reconocer que el número 2 , puede ser expresado así: $2 = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)^2$ .... (*)

Reemplazando (*) en la desigualdad dada ,se obtiene : $\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}(x-1) > \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

Luego de acuerdo con la observación (I) vista en el item 25.13 , se puede plantear : $x - 1 > 0 \ \wedge \ (x-1) < \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Efectuando y resolviendo estas desigualdades, encontramos que : $x > 1 \ \wedge \ x < \frac{10}{9}$

Finalmente al llevar estos resultados a la a recta numérica , logramos reconocer que la solución final viene dada por la intersección de las gráficas :



$\therefore \quad x \in \left\langle 1 \ ; \ \frac{10}{9} \right\rangle$ **RPTA. A**

20.- Resolver: $\log_2 x > \log_2 \left(2 - x^2\right)$

A) $\langle 1 \ ; \ 2 \rangle$ *B)* $\langle 1 \ ; \ 3 \rangle$ *C)* $\langle 1 \ ; \ \sqrt{3} \rangle$ *D)* $\langle 1 \ ; \ \sqrt{2} \rangle$ *E)* $\langle -1 \ ; \ \sqrt{2} \rangle$

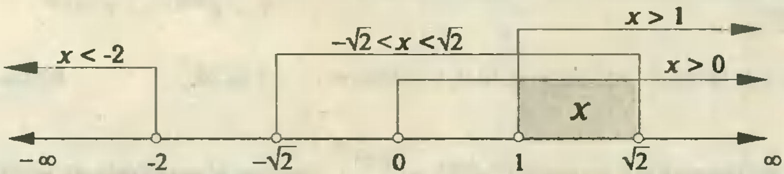
<u>Resolución</u>.-
De acuerdo con la observación (II) expuesta en el item 25.13 , la inecuación dada es equivalente al siguiente conjunto de desigualdades : $x > 0 \ \wedge \ 2 - x^2 > 0 \ \wedge \ x > 2 - x^2$

Transponiendo términos y acomodando : $x > 0 \ \wedge \ x^2 - 2 < 0 \ \wedge \ x^2 + x - 2 > 0$

Descomponiendo en factores los primeros miembros de las desigualdades, tendremos :

$$x > 0 \ \wedge \ \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right) < 0 \ \wedge \ (x + 2)(x - 1) > 0$$

Finalmente llevamos las soluciones de estas inecuaciones a la recta numérica e intersectando los intervalos, logramos determinar al intervalo solución :



$\therefore \quad x \in \langle 1 \ ; \ \sqrt{2} \rangle$ **RPTA. D**

PROBLEMAS RESUELTOS (GRUPO IV)

21.- El equivalente de : $\left[\log_3 \sqrt[2]{4}\ .\ \log_2 \sqrt[3]{9}\right]^{\log_6 5}$ ***, es :***

A) 20 ***B) 16*** ***C) 25*** ***D) 18*** ***E) 8***

Resolución.-

Sea T el equivalente pedido, luego : $T = \left[\log_3 \sqrt[2]{4}\ .\ \log_2 \sqrt[3]{9}\right]^{\log_6 5}$

Dando índice común a los radicales del corchete, se tendrá : $T = \left[\sqrt[\log_3 2\ .\ \log_2 3]{4^{\log_2 3}\ .\ 9^{\log_3 2}}\right]^{\log_6 5}$

Debemos reconocer que es posible aplicar la regla de cadena en el índice del radical, asi mismo al transformar el radicando, se logra establecer que : $T = \left[\sqrt[\overbrace{\log_2 2}^{1}]{2^{2\log_2 3}\ .\ 3^{2\log_3 2}}\right]^{\log_6 5}$

Luego de eliminar el radical, nos queda : $T = \left[2^{\log_2 9}\ .\ 3^{\log_3 4}\right]^{\log_6 5}$

Por la igualdad fundamental se tendrá : $T = [9\ .\ 4]^{\log_6 5} = [36]^{\log_6 5}$

Luego de expresar 36 como una potencia , aplicamos la propiedad del logaritmo para una potencia , obteniéndose : $T = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 25}$

Finalmente, por la igualdad fundamental, se obtiene : $T = 25$ **RPTA. C**

22.- Luego de resolver la ecuación $x^{\log x} = \left(\dfrac{10^3}{x}\right)^4$ ***indicar el producto de sus raíces.***

A) 10^7 ***B)*** 10^{-4} ***C)*** 10^{-5} ***D)*** 10^{10} ***E)*** 10^{-6}

Resolución.-

Debemos reconocer que la ecuación dada es trascendente.Luego efectuando la potencia indicada , se obtiene : $x^{\log x} = \dfrac{10^{12}}{x^4}$

A continuación resolveremos tomando logaritmo decimal a ambos miembros puesto que el exponente del primer miembro es un logaritmo en base 10 . Veamos : $\log x^{\log x} = \log\left(\dfrac{10^{12}}{x^4}\right)$

Aplicando las propiedades del logaritmo de una potencia y de un cociente, se consigue : $(\log x)\ (\log x) = \log 10^{12} - \log x^4$

Efectuando , se obtiene : $(\log x)^2 = 12\log 10 - 4\log x$

Dado que $\log 10 = 1$, se tendrá : $(\log x)^2 = 12 - 4\log x$

Transponiendo términos se establece : $(\log x)^2 + 4(\log x) - 12 = 0$

Factorizando se consigue : $(\log x + 6)(\log x - 2) = 0$

Igualando a cero cada factor : i) $\log x + 6 = 0$ ii) $\log x - 2 = 0$

Despejando en cada caso , se obtiene : $\log x = -6$ $\log x = 2$

Por definición de logaritmos se tendrá : $x_1 = 10^{-6} \wedge x_2 = 10^2$

Finalmente el producto de las raíces de la ecuación viene dado por : $x_1 \cdot x_2 = 10^{-6} \cdot 10^2 = \mathbf{10^{-4}}$ **RPTA. B**

23.- Si se sabe que : $\log_b^{-1} a + \log_b^{-1} c = x$; calcular el equivalente de : $c^{\log_b\left(\frac{a^x}{b}\right)}$

A) a ***B) b*** ***C) c*** ***D) $\frac{a}{b}$*** ***E) bc***

<u>Resolución</u>.-

Sea T el equivalente pedido, luego al aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente, se tendrá : $T = c^{\log_b a^x - \log_b b}$

Por la propiedad del logaritmo de una potencia y del logaritmo de la misma base, se tiene : $T = c^{x\log_b a - 1}$ ...... (I)

Trabajando ahora con el dato, se establece que : $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_b c} = x$

Transponiendo términos , se obtiene : $\dfrac{1}{\log_b c} = x - \dfrac{1}{\log_b a}$

Efectuando operaciones, se logra establecer : $\dfrac{1}{\log_b c} = \dfrac{x\log_b a - 1}{\log_b a}$

Reacomodando la igualdad , concluimos que : $\dfrac{\log_b a}{\log_b c} = x\log_b a - 1$

Podemos reconocer que el primer miembro representa a un cambio de base (a base b), luego: $\log_c a = x\log_b a - 1$ ...... (II)

Al sustituir (II) en (I) se consigue : $T = c^{\log_c a}$

Finalmente aplicamos la igualdad fundamentaldel logaritmo: $\mathbf{T = a}$ **RPTA. A**

24.- Del sistema : $\begin{cases} 2^x = \sqrt{y} \text{ .... (I)} \\ x^2 + 3(3 - \log_2 y) = 0 \text{ .... (II)} \end{cases}$; calcular el valor de : $x + y$

A) 54 ***B) 48*** ***C) 66*** ***D) 67*** ***E) 59***

Resolución.-

De la relación (I) , podemos despejar y establecer que : $2^x = y^{\frac{1}{2}}$

Tomando logaritmo en base 2 a ambos miembros se consigue : $log_2 2^x = log_2 y^{\frac{1}{2}}$

Aplicando la propiedad del logaritmo para una potencia : $x \overbrace{log_2 2} = \frac{1}{2} log_2 y$

Sustituyendo lo indicado por 1, tendremos : $x = \frac{1}{2} log_2 y$

Transponiendo términos , se obtiene : $2x = log_2 y$ .... (III)

Luego reemplazamos (III) en (II) : $x^2 + 3(3 - 2x) = 0$

Efectuando la multiplicación indicada : $x^2 - 6x + 9 = 0$

Reconociendo en el 1er miembro un T.C.P., tendremos : $(x-3)^2 = 0$

En consecuencia : $\boldsymbol{x = 3}$ .... (IV)

Finalmente sustituyendo (IV) en (I) : $2^3 = \sqrt{y} \Rightarrow \boldsymbol{y = 64}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x + y = 67}$ **RPTA. D**

25.- Si : $log_{abc}\ a = 7 \wedge log_{abc}\ b = 4$; determinar el valor de : $E = log_{abc}\left(\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{\sqrt{c}}\right)$.

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

Resolución.-

En primer lugar podemos plantear que : $log_{(abc)}(abc) = 1$

Aplicando la propiedad del logaritmo de un producto : $log_{abc} a + log_{abc} b + log_{abc} c = 1$

Reemplazando datos , se logra establecer que : $7 + 4 + log_{abc} c = 1$

Efectuando y transponiendo términos, obtenemos : $log_{abc} c = -10$

A continuación nuestra estrategia consistirá en aplicar las propiedades de logaritmos en la expresión dada para E , para luego sustituir los datos dados. Veamos :

$$E = log_{abc}\left(\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{\sqrt{c}}\right) = log_{abc} \sqrt[3]{a\sqrt{b}} - log_{abc} \sqrt{c}$$

Luego : $E = \frac{1}{3} log_{abc} a\sqrt{b} - \frac{1}{2} log_{abc} c = \frac{1}{3}(log_{abc} a + log_{abc} \sqrt{b}) - \frac{1}{2} log_{abc} c$

Finalmente se logra establecer que : $E = \frac{1}{3}(\log_{abc} a + \frac{1}{2}\log_{abc} b) - \frac{1}{2}\log_{abc} c$

Sustituyendo valores ,se tendrá : $E = \frac{1}{3}(7 + \frac{1}{2}4) - \frac{1}{2}(-10)$

$\therefore$ $\boxed{E = 8}$ **RPTA. D**

26.- El equivalente de la siguiente expresión : $\sqrt[\log_a\sqrt[n]{n}+\log_a\sqrt[n]{\log_a an}]{n+\log_a n^n}$ ***, es :***

A) an *B)* $\frac{a}{n}$ *C)* $\sqrt[n]{a}$ *D)* a^n *E)* $\frac{n}{a}$

Resolución.-

Sea T el equivalente de la expresión dada : $T = \sqrt[\log_a\sqrt[n]{n}+\log_a\sqrt[n]{\log_a an}]{n+\log_a n^n}$

Aplicando la propiedad del logaritmo para un producto en el índice y empleando la igualdad fundamental en el radicando para sustituir an,se obtiene: $T = \sqrt[\log_a\left(\sqrt[n]{n}\,.\,\sqrt[n]{\log_a an}\right)]{\log_a a^n + \log_a n^n}$

Agrupando en el indice del radical ,los radicales del mismo indice y aplicando la propiedad del logaritmo de un producto en el radicando, tendremos : $T = \sqrt[\log_a\sqrt[n]{n\log_a an}]{\log_a\left(a^n.\,n^n\right)}$

Expresando el radical del indice en un exponente fraccionario y aplicando los teoremas de exponentes en el radicando, se tendrá : $T = \sqrt[\log_a\left[n\log_a(an)\right]^{\frac{1}{n}}]{\log_a(an)^n}$

Aplicando la propiedad del logaritmo para una potencia, se logra establecer que : $T = \sqrt[\frac{1}{n}.\log_a\left[n\log_a(an)\right]]{\left[n\log_a(a.n)\right]}$ ... (I)

Tener en cuenta que : $\left[n\log_a(an)\right] = a^{\log_a\left[n\log_a(an)\right]}$ ... (II)

Luego reemplazando (II) en (I) : $T = \sqrt[\frac{1}{n}.\log a\left[n\log_a(an)\right]]{a^{\log_a\left[n\log_a(an)\right]}}$

Simplificando ,se obtiene : $T = \sqrt[\frac{1}{n}]{a}$ $\therefore$ $\boxed{T = a^n}$ **RPTA. D**

27.- ¿Cuántos ceros tiene entre la coma decimal y la primera cifra significativa el número $(0{,}003)^{60}$?

A) 150 ***B) 151*** ***C) 152*** ***D) 153*** ***E) 154***

Resolución.-

Designemos por x al número dado , entonces : $x = (0{,}003)^{60}$

Tomando logaritmo decimal a ambos miembros, se tiene : $\log x = \log(0{,}003)^{60}$

Aplicando la propiedada de logaritmo para una potencia y transformando : $\log x = 60\log(3.10^{-3})$

En base al logaritmo de un producto, se tiene : $\log x = 60\,(\log 3 + \log 10^{-3})$

Aplicando la propiedad de logaritmo para una potencia : $\log x = 60\,(\log 3 - 3\log 10)$

Reemplazando los valores : $\log x = 60\,(0{,}4771 - 3[1])$

Efectuando , encontramso que : $\log x = -151{,}374$

Ahora hallaremos su característica del modo siguiente : $\log x = -151 - 0{,}374$

Sumando y restando «1» al 2do miembro : $\log x = -1 - 151 + 1 - 0{,}374$

Efectuando por partes , se tendrá : $\log x = -152 + 0{,}626$

Este resultado se puede ėxpresar así: $\log x = \overline{152}{,}626$

Que la característica sea 152, significa que el número x cuenta con 152 ceros antes de la primera cifra significativa.Sin embargo en el problema se pide solo la cantidad de ceros que se encuentran contenidos entre la coma decimal y la primera cifra significativa , es decir :

$$x = 0,\underbrace{00\ldots\ldots\ldots00}\,\Delta\,\square\,\ldots\ldots\,\diamond$$

En consecuencia no se debe considerar al cero que está a la izquierda de la coma decimal.

$\therefore \quad$ **$x = 151$** **RPTA. B**

28.- Encontrar el valor de a del sistema:
$$\begin{cases} \log_a 3 = \log_b 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ ab = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$$

A) $10^{\log_6 2}$ ***B)*** $10^{\log_2 6}$ ***C)*** $10^{\log_6 3}$ ***D)*** $10^{\log_3 6}$ ***E) N.A***

Resolución.-

Expresando (I)en base 10, se consigue : $\dfrac{\log 3}{\log a} = \dfrac{\log 2}{\log b}$

Transponiendo términos, se establece que : $\dfrac{\log b}{\log a} = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ .... (I)

Tomando logaritmo decimal a (II) , se tiene : $\log ab = \log 10$

Por propiedad sustituimos a $\log 10$ por 1 : $\log a + \log b = 1$ .... (II)

Ahora aplicamos proporciones en (I) : $\dfrac{\log b + \log a}{\log a} = \dfrac{\log 2 + \log 3}{\log 3}$ .....(*)

Sustituyendo (II) en (*), tendremos : $\dfrac{1}{\log a} = \dfrac{\log 6}{\log 3} \Rightarrow \log a = \dfrac{\log 3}{\log 6}$

Haciendo cambio de base de logaritmo de 10 a 6 : $\log a = \log_6 3$

Finalmente por definición : **$a = 10^{\log_6 3}$** **RPTA. C**

29.- Proporcionar un valor de x a partir del sistema :
$$\begin{cases} e^{x} = y^{e} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(I) \\ e(\ln^2 y + 4) = 4x \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(II) \end{cases}$$

A) e *B)* $\frac{1}{e}$ *C) 2e* *D) 3e* *E)* $\frac{1}{e}$

Resolución.-

Hagamos el siguienete cambio de variable : $\ln y = m \quad \Rightarrow \quad e^m = y$ ..... (III)

Luego sustituyendo (III) en (I), se obtiene : $e^x = \left(e^m\right)^e \quad \Rightarrow \quad e^x = e^{me}$

Por comparación , se establece que : $x = me$ .... (IV)

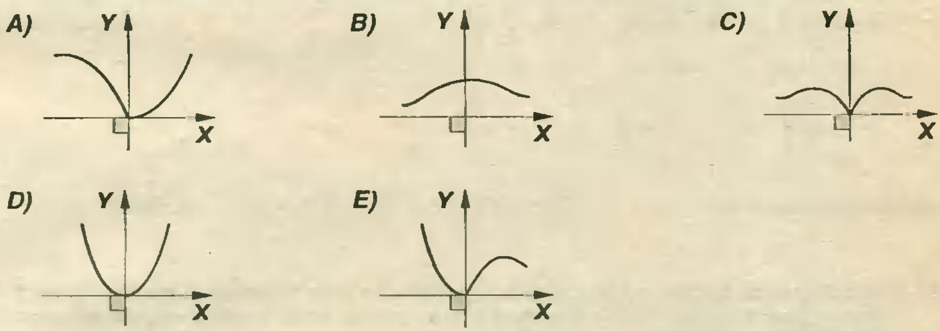
Luego sustituyendo (III) y (IV) en (II) : $e\left(m^2+4\right) = 4\,m\,e$

Simplificando, efectuando y transponiendo términos, se establece que : $m^2 - 4\,m + 4 = 0$

Reconociendo el T.C.P. , se tiene : $(m-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2$ ... (*)

Finalmente de (*) en (IV), se concluye que : $\boldsymbol{x = 2e}$ **RPTA. C**

30.- La gráfica más aproximada de la función exponencial : $F(x) = e^{|x|} - 1$ ***; es :***



Resolución.-

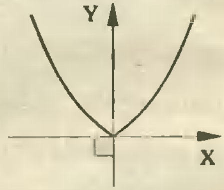
Teniendo en cuenta las gráficas analizadas en el item 25.2 podemos redefinir a la función F(x) del siguiente modo.

$$F(x) = e^{|x|} - 1 = \begin{cases} e^{x} - 1 \;;\; x \geq 0 \ldots\ldots F_1 \\ e^{-x} - 1 \;;\; x < 0 \ldots\ldots F_2 \end{cases}$$

Gráfica de F_1 :

Gráfica de F_2 :

Finalmente la gráfica de $F(x) = e^{|x|} - 1$, viene dada por la reunión de las gráficas de F_1 y F_2 :



RPTA. D

31.- Encontrar el dominio de la función F definida por : $F(x) = \log_{(4x-3)}(3 - 2x)$

A) $\left\langle \frac{3}{4} ; \frac{3}{2} \right\rangle$ *B)* $\left\langle 0 ; \frac{3}{2} \right\rangle$ *C)* $\left\langle \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right\rangle$ *D)* $\left\langle \frac{3}{4} ; \frac{5}{4} \right\rangle$ *E)* $\left\langle \frac{3}{4} ; \frac{3}{2} \right\rangle - \{1\}$

<u>Resolución</u>.-

Teniendo en cuenta la existencia de la función logarítmica podemos plantear que :

$$3 - 2x > 0 \quad \wedge \quad 4x - 3 > 0 \quad \wedge \quad 4x - 3 \neq 1$$

$$2x < 3 \quad \wedge \quad 4x > 3 \quad \wedge \quad 4x \neq 4$$

$$x < \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x > \frac{3}{4} \quad \wedge \quad x \neq 1$$

Finalmente se concluye que : $\boldsymbol{Dom\ (F) = x \in \left\langle \frac{3}{4} ; \frac{3}{2} \right\rangle - \{1\}}$ **RPTA. E**

32.- Una colonia de bacterias se cultiva en un medio que conduce a su reproducción. Sea «y» el número de bacterias que hay en la colonia en el tiempo «t»; se ha encontrado experimentalmente que :

$$y = ce^{kt} \ , \quad \text{donde} \quad c \wedge k \in \mathbb{R}$$

Se tiene una colonia de 1 000 bacterias que duplica su tamaño cada hora. ¿Cuántas bacterias habrá al término de 5 horas? Asumir : ln 2 = 0,69

A) $10^4\, e^{3,45}$ *B)* $10^3\, e^{3,45}$ *C)* $10^2\, e^{3,45}$ *D)* $10^3\, e^{3,54}$ *E)* $10^3\, e^{4,35}$

<u>Resolución</u>.-

Para resolver nuestro problema será necesario determinar los valores de las constantes : c y k que participan en la regla de correspondencia dada. Nuestra estrategia consistirá en dar valores a «t» y a «y» , los mismos que aparecen en los datos. Veamos :

En el inicio del fenómeno : $t = 0$, $y = 1000$: $y = ce^{kt}$

Reemplazando datos, se tiene : $10^3 = c.e^{k(0)} \Rightarrow c = 10^3$

Luego la función queda asi : $y = 10^3 e^{kt}$ ...... (*)

De los datos se sabe que la población de las bacterias se duplican en cada hora, es decir : en $t = 1$, $y = 2000$

Reemplazando datos en (*) : $2 \,.\, 10^3 = 10^3\, e^{k(1)} \Rightarrow e^k = 2$

Tomando ln a ambos miembros : $ln\, e^k = ln\, 2$

Por propiedad , se tiene que : $k = ln\, 2 = 0{,}69$

Estos resultados nos permiten establecer la regla de correspondencia de la función dada : $y = 10^3 e^{0{,}69t}$

Finalmente al término de 5 *horas* ($t = 5$), habrá : $\mathbf{y = 10^3 e^{3{,}45}}$ **RPTA. B**

33.- Al reducir : $\dfrac{1}{log_2 N} + \dfrac{1}{log_3 N} + \dfrac{1}{log_4 N} + \dots + \dfrac{1}{log_{1999} N}$ ***; donde : N = 1999! ; se obtiene :***

A) 1997 ***B) 0*** ***C) 1998*** ***D) 1*** ***E) Faltan datos***

Resolución.-

Sea T el valor de la expresión dada, es decir :

$$T = \frac{1}{log_2 N} + \frac{1}{log_3 N} + \frac{1}{log_4 N} + \dots\dots + \frac{1}{log_{1999} N}$$

Teniendo en cuenta la propiedad expuesta en el item 25.7E, relativa al cambio de base, la expresión T queda transformada asi :

$$T = log_N 2 + log_N 3 + log_N 4 + \dots + log_N 1999$$

Luego aplicando la propiedad del logaritmo de un producto, conseguimos :

$$T = log_N (2 \,.\, 3 \,.\, 4 \dots\dots 1999)$$

Reconociendo que la expresión entre paréntesis corresponde al desarrollo de un factorial, tendremos que :

$$T = log_N (1999!)$$

Por dato del problema : $N = 1999!$

Finalmente se tendrá : $T = log_N (N) = log_N N$

$\therefore$ $\mathbf{T = 1}$ **RPTA. D**

34.- Calcular el determinante de la siguiente matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ \log^2 2 & \log^2 20 & \log^2 200 & \log^2 2000 \\ \log^3 2 & \log^3 20 & \log^3 200 & \log^3 2000 \end{bmatrix}$$

A) 12 ***B) 120*** ***C) 1200*** ***D) 12000*** ***E) 1***

Resolución.-

Se pide $|A|$, donde :

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ \log^2 2 & \log^2 20 & \log^2 200 & \log^2 2000 \\ \log^3 2 & \log^3 20 & \log^3 200 & \log^3 2000 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con lo estudiado en el capítulo 17, estamos ante un determinante de Wandermonde; por lo tanto el valor del determinante se calculará asi :

$$|A| = (\log 20 - \log 2)(\log 200 - \log 20)(\log 200 - \log 2)(\log 2000 - \log 200)(\log 2000 - \log 20)(\log 2000 - \log 2)$$

Con el auxilio de la propiedad del logaritmo para un cociente, tendremos :

$$|A| = \left[\log\left(\frac{20}{2}\right)\right]\left[\log\left(\frac{200}{20}\right)\right]\left[\log\left(\frac{200}{2}\right)\right]\left[\log\left(\frac{2000}{200}\right)\right]\left[\log\left(\frac{2000}{20}\right)\right]\left[\log\left(\frac{2000}{2}\right)\right]$$

Después de efectuar, nos queda :

$$|A| = (\log 10)(\log 10)(\log 100)(\log 10)(\log 100)(\log 1000)$$

Sustituyendo cada valor de los logaritmos indicados, conseguimos :

$$|A| = (1)(1)(2)(1)(2)(3)$$

$\therefore$ $|A| = 12$ RPTA. A

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL A

1.- Halle la suma de las raíces de la ecuación :

$$1 + 2\,log\,x = log\,(x+2)$$

A) $\frac{1}{10}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) $-\frac{1}{2}$

2.- El cologaritmo de $\sqrt{10}$ en base 10 es :

A) $\frac{1}{2}$ B) -1,00 C) -0,4771

D) 0,502 E) $-\frac{1}{2}$

3.- Si el logaritmo decimal del logaritmo neperiano "*e*" vale 0,43294, el logaritmo neperiano de 1000 vale.

A) 2,7182 B) 6,9077 C) 5,900

D) 3,000 E) N.A

4.- El valor de x diferente de 1 que verifica :

$$log\,x^2 = (log\,x)^2 \text{ , es :}$$

A) 10 B) 2 C) 100 D) 0,1 E) 0,01

5.- Si : $e = 2{,}7182$, calcular x de :

$$e^{Ln(x^4+29x^2-712)} = 8$$

A) 2 B) 8 C) 6 D) 1 E) 4

6.- Si $x \in \mathbb{R}$ / $\sqrt[x^2-1]{log_a x^{\sqrt[x]{x}}} = \sqrt[x]{x^2}$

Donde : $a = x^{\left(\frac{1}{x}\right)^x}$; el valor de x , es:

A) $-\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 9 D) $3\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

7.- Si :

$$0 < a^9 < a^6 \wedge log_{a^3}(x-1)^2 < log_{a^2}\left[(x-1)\sqrt[3]{3-x}\right];$$

es cierto que :

A) $1 < x < 3$ B) $2 < x < 3$ C) $x < 2$
D) $x < 3$ E) $0 < x < 1$

8.- Al resolver la ecuación.

$$log_2(x^2+7) - log_4(3x+1) = log_8(x^2+9)^3 - log_4(x-1)$$

Se obtiene un polinomio, el cual es divisible por :

A) $x^2 - 25$

B) $x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 22x - 13$

C) $x^3 - 125$

D) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 22x + 13$

E) $x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 22x + 13$

9.- ¿Cuántos ceros entre el punto decimal y la primera cifra significativa tiene el número $(0{,}02)^{70}$?

A) 70 B) 140 C) 110 D) 118 E) 120

10.- Halle las soluciones reales de :

$$\frac{log\sqrt{x^3} + 37}{log\sqrt{x} + 1} = 3$$

A) 16 B) 9 C) 16 y 9

D) 4 y 3 E) No tiene solución.

11.- Halle los valores reales de $x \wedge y$ del sistema.

$$\begin{cases} x\left(2+\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\right) = y\left(2+\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}\right) \\ log_y x = 2 \end{cases}$$

A) $x = 0{,}64 \wedge y = 0{,}8$

B) $x = 0{,}49 \wedge y = 0{,}7$

C) $x = 0{,}81 \wedge y = 0{,}9$

D) $x = 0{,}36 \wedge y = 0{,}6$

E) $x = 0{,}25 \wedge y = 0{,}5$

12.- Si : $a = 1 + \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\ldots}}}$

$b = 3 + \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ldots\ldots}}}$

Calcular : $x = log_b a$

A) $x=0$ B) $x=1$ C) $x=\frac{1}{2}$

D) $x=2$ E) $x=\frac{3}{2}$

NIVEL B

13.- Si : $log\,700 = 2,8451$, calcular $log_7 70$

A) 2,16 B) 2,15 C) 1,87 D) 2,18 E) 1,82

14.- La suma de los cuadrados de dos números es 29 y la suma de sus logaritmos (en base 10) es 1; dichos números son.

A) -2 y -5 B) 4 y 5 C) 2 y -5

D) 2 y 3 E) 3 y 20

15.- Resolver la ecuación : $10^x + 10^{-x} = 3$

A) $log\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)$ D) $log\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) - 1$

B) $log\,(3\pm\sqrt{5})$ E) $log\,(3\pm\sqrt{5})^2$

C) $log\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

16.- Dadas las afirmaciones

I) El cologaritmo de un número es el logaritmo de la inversa de ese número.

II) El cologaritmo de un número es el número que admite como logaritmo al número dado.

III) El cologaritmo de un número dado es el logaritmo del mismo número con el signo cambiado.

Es cierto que :

A) I $\wedge$ II son correctas

B) I $\wedge$ III son correctas

C) Solo III es correcta

D) Todas son correctas

E) Solo I es correcta

17.- Al resolver el sistema : $\begin{cases} 25^{x^2} = \sqrt{5}^{y^2} \\ Lnx = 2Lny \end{cases}$;

la suma de las soluciones para $x \wedge y$, es :

A) 1/2 B) 1/4 C) 1 D) 3/4 E) 5/4

18.- Si $log_3 x = k\,log_6 x$; $log_2 3 = B$

el valor de "k" es :

A) 1 + B B) $\frac{B}{B+1}$ C) $\frac{B+1}{B}$

D) $\frac{1}{1+B}$ E) $\frac{B}{2}$

19.- Si : $log_5\left(log_4\left(log_3\left(log_2 x\right)\right)\right) = 1$,

calcular : x

A) 2^{512} B) 3^{512} C) $5^{3^{1024}}$ D) 2^{49} E) $2^{3^{1024}}$

20.- La igualdad : $x = a^{log_a x}$

Se cumple si y solo si :

A) $a > 0$; $x \in \mathbb{R}$

B) $a > 1$; $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

C) $a \neq 1$; $x > 0 \wedge a > 0$

D) $a \in \mathbb{R} - \{1\}$; $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

E) $a > 1$; $x > 0$

21.- Si : $a_k = \frac{k+1}{k}$, calcular :

$$log_b a_1 + log_b a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + log_b a_{99} \ ;$$

donde : $b = \sqrt[7]{10^4}$

A) 3 B) 2 C) 3,5 D) 4 E) 2,5

22.- Dadas las ecuaciones: $4x^2 + 5y^2 = 12a$

$$log_a x + log_a y = 1$$

Si "a" es un número real de modo que las ecuaciones anteriores existan entonces los valores que puede tomar "x" es :

A) El conjunto de los números positivos.

B) Solamente el conjunto de los números mayores que $\sqrt{0{,}5}$.

C) Solamente el conjunto de los números mayores que 1.

D) El conjunto de los números positivos en el que se excluye : $\sqrt{0{,}5}$ y $\sqrt{2{,}5}$.

E) Solamente el conjunto de los números mayores que $\sqrt{2{,}5}$.

23.- Los valores de "x" que satisfacen la ecuación : $x^{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x}^{\,x}$, tienen como producto:

A) 0 B) 2 C) 4 D) 1 E) 12

24.- Para qué valores de "x" se define la expresión : $\sqrt{Ln\sqrt{Ln\,x}}$

A) $x \geq e^e$ B) $x \geq e^{2e}$ C) $x \geq 2e$

D) $x \geq e^2$ E) $x \geq e$

25.- Sea la ecuación : $(0{,}01)^{-x} = (x-100)^2$ dar los valores de verdad o falsedad (V ; F) de las siguientes afirmaciones.

I) La ecuación no tiene solución alguna.

II) La ecuación tiene al menos una solución.

III) Una solución está contenida en el intervalo $\langle 0;1\rangle$.

IV) Una solución está contenida en el intervalo $\langle 1;2\rangle$.

A) FVFV B) FVFF C) VVFF

D) FFFF E) VVVV

26.- El equivalente de :

$$colog_6\ antilog_8\left(log_2 3+1\right) \text{ , es :}$$

A) 8 B) -4 C) 6 D) -3 E) 10

27.- Halle el mayor valor de "x" en la igualdad:

$$5^{log_{11}(x^2-7x+21)} = 3^{log_{11}25}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

28.- ¿Qué valor asume la expresión :

$$E = \sqrt{5^{log_a x} + 6x^{log_a 5}}$$

si se sustituye x por $7^{log_5 a}$?

A) 5 B) 3 C) 7 D) 6 E) 4

29.- ¿Qué valor asume "x" en :

$$log\ 2x = log\ 2\ log\ x\ ?$$

A) $\sqrt[log2+1]{10}$ B) $\sqrt[log2-1]{10}$ C) $\sqrt[log2+1]{2}$

D) $\sqrt[log2-1]{2}$ E) N.A

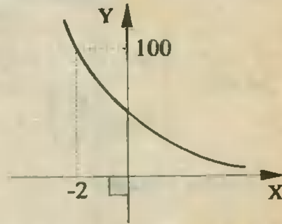
30.- Resolver : $\sqrt[4]{x} = \sqrt[log_3 x]{\dfrac{x}{3}}$

A) 3 B) 6 C) 12 D) 9 E) 8

NIVEL C

31.- A continuación se muestra la función exponencial F(x).

Calcular F(-4)



A) 1 000

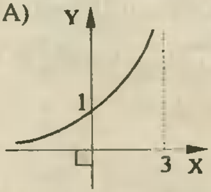
B) 100

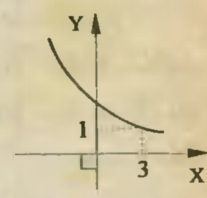
C) 10 000

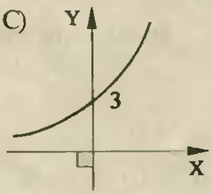
D) 10^{-4}

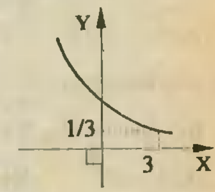
E) 10^{-2}

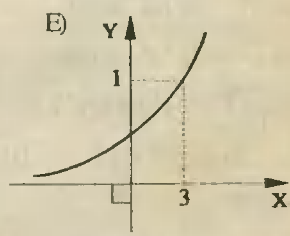
32.- Cuál de las gráficas corresponde a : $F(x) = \pi^{3-x}$

A)


B)


C)


D)


E)


33.- Si se gráfica $F(x) = log_4 x \ \wedge\ log_{16} x$ se obtiene.

Determinar : $\dfrac{c}{d}$

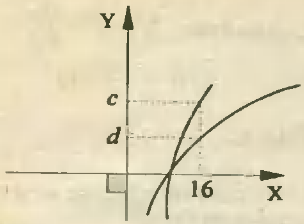
A) 1/3

B) 1/2

C) 1

D) 2

E) 3



34.- Si : $\begin{cases} log_3(a^5b^2) = k \text{..............(I)} \\ log_{27}\left(\dfrac{a^2}{b}\right) = k \text{.............(II)} \end{cases}$

Calcular : $log_9 ab$

A) $\frac{k}{3}$ B) $-\frac{k}{3}$ C) -1 D) 1 E) N.A

35.- Resolver :

$$log_2^2 2x + log_2^2 0{,}5x + log_2^2 0{,}25\,x = 5$$

A) $\sqrt[3]{2} \wedge 2$ B) $\sqrt[3]{4} \wedge 1$ C) $\sqrt[3]{3} \wedge 4$

D) $\sqrt[3]{7} \wedge 3$ E) $\sqrt[3]{3} \wedge 2$

36.- Resolver :

$$4log_3 log_3 x = log_3\left(4 + log_3 9x\right) + log_{\sqrt{3}} log_3 x$$

A) 3 B) 9 C) 27 D) 81 E) 243

37.- Resolver :

$$log_2\left(9^{x-1} + 7\right) = 2 + log_2\left(3^{x-1} + 1\right)$$

A) $1 \wedge 2$ B) $3 \wedge 4$ C) $-1 \wedge -2$

D) $-1 \wedge -5$ E) $-4 \wedge -7$

38.- Qué valor de "x" cumple :

$$log_x 2 = log\,2 + log^2 2 + log^3 2 + \text{..........}$$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

39.- Resolver :

$$log_3(x+1)^2 \,.\, log_7 21 = colog_{1/7}(x^2 + 2x + 1) + 4$$

A) 1 B) 3 C) 8 D) 27 E) N.A

40.- Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 57 \text{ .... (I)} \\ log_3(x+y) + log_{1/3}(y-1) = 1 \text{ .... (II)} \end{cases}$$

A) $x = 5 \wedge y = 4$ D) $x = 2 \wedge y = 1$

B) $x = 4 \wedge y = 5$ E) $x = -2 \wedge y = 1$

C) $x = -1 \wedge y = 3$

41.- ¿Cuántas cifras tiene el número que resulta de efectuar $5^{20} \,.\, 12^{18}$?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

42.- Resolver :

$$\left(log_x 2\right)\left(log_{x/16} 2\right) = log_{x/64}\left(log_{(x/64)^2}\right)$$

A) 4 B) 12 C) 10 D) 14 E) F.D

43.- Solucionar la ecuación:

$$log_x\left(\frac{12}{x}\right) - Ln\,e = log_{(e+5)}\sqrt[3]{(e+5)^{-2}} + col\,n\,\sqrt[3]{e}$$

A) 1 B) 12 C) 19 D) 17 E) 21

44.- La solución de la ecuación :

$antilog\,(-col\,n\,(col\,n\,x)) = -\frac{e}{x}$

A) e B) e^{-1} C) e^{-2} D) ϕ E) N.A

45.- Resolver : $antilog_x\, antilog_x\, e = e$

A) E B) $\sqrt[e]{e}$ C) $\sqrt{e}$ D) $\sqrt[e]{2e}$ E) F.D

46.- Si la raíz de la ecuación :

$$log_{(x/9)}\left(\frac{x}{18}\right) + log_{(x/4)}\left(\frac{x}{12}\right) = 1$$

Se divide por 3 se obtiene

A) 6 B) 1 C) 2 D) 3 E) 7

47.- Si : $log_b \sqrt{3}$ es el recíproco de $log_b \sqrt{2}$. Luego "b" es :

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}^{\pm\sqrt{log_2 3}}$ C) $\sqrt{2}^{\pm\sqrt{log_2 3}}$

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}^{\pm\sqrt{log_3 2}}$

48.- Si se cumple: $a = log_{12} 18 \wedge b = log_{24} 54$

Halle el equivalente de : $\dfrac{ab + b - a}{3a - 2b}$

A) $log_3 2$ B) 1 C) $log_2 3$ D) $log_2 6$ E) 0

CLAVES DE RESPUESTAS

CAPITULO 1: EXPONENTES Y RADICALES

01.- E 02.- D 03.- C 04.- B 05.- C 06.- B 07.- C 08.- D 09.- A 10.- D 11.- C 12.- C 13.- A 14.- C 15.- B 16.- B
17.- C 18.- D 19.- A 20.- A 21.- C 22.- C 23.- E 24.- B 25.- D 26.- E 27.- D 28.- C 29.- E 30.- E 31.- B 32.- D
33.- D 34.- D 35.- B 36.- A 37.- E 38.- E 39.- B 40.- B 41.- E 42.- D

CAPITULO 2: ECUACIONES EXPONENCIALES

01.- C 02.- B 03.- C 04.- D 05.- E 06.- B 07.- C 08.- E 09.- C 10.- A 11.- B 12.- C 13.- D 14.- C 15.- D 16.- B
17.- A 18.- B 19.- A 20.- A 21.- B 22.- E 23.- E 24.- C 25.- E 26.- B 27.- C 28.- B 29.- A 30.- B 31.- D 32.- A
33.- E 34.- B 35.- B 36.- D 37.- E 38.- A 39.- D 40.- B 41.- B 42.- D 43.- D 44.- B 45.- B 46.- A

CAPITULO 3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

01.- E 02.- C 03.- D 04.- C 05.- D 06.- C 07.- C 08.- D 09.- B 10.- B 11.- E 12.- C 13.- B 14.- B 15.- B 16.- D
17.- B 18.- B 19.- E 20.- C 21.- A 22.- B 23.- B 24.- A 25.- D 26.- D 27.- C 28.- B 29.- E 30.- B 31.- B 32.- C
33.- C 34.- C 35.- A 36.- C 37.- E 38.- A 39.- B 40.- E 41.- A 42.- D 43.- D 44.- B 45.- B 46.- E 47.- E 48.- C
49.- B 50.- C 52.- C

CAPITULO 4: PRODUCTOS NOTABLES

01.- C 02.- C 03.- B 04.- C 05.- C 06.- B 07.- C 08.- C 09.- D 10.- D 11.- D 12.- B 13.- C 14.- E 15.- D 16.- A
17.- A 18.- A 19.- B 20.- A 21.- A 22.- B 23.- C 24.- E 25.- D 26.- A 27.- D 28.- C 29.- A 30.- B 31.- D 32.- A
33.- B 34.- C 35.- A 36.- B 37.- C 38.- B 39.- B 40.- C 41.- E 42.- A 43.- D 44.- D 45.- A 46.- D 47.- C 48.- C
49.- D 50.- C 51.- A 52.- A 53.- A

CAPITULO 5: DIVISION ALGEBRAICA

01.- A 02.- B 03.- E 04.- E 05.- A 06.- C 07.- C 08.- C 09.- D 10.- D 11.- C 12.- A 13.- D 14.- B 15.- A 16.- A
17.- A 18.- B 19.- B 20.- E 21.- A 22.- E 23.- D 24.- D 25.- D 26.- A 27.- D 28.- B 29.- A 30.- E 31.- B 32.- B
33.- D 34.- B 35.- E 36.- D 37.- B 38.- D 39.- B 40.- E

CAPITULO 6: FACTORIZACION

01.- B 02.- D 03.- D 04.- D 05.- D 06.- D 07.- A 08.- A 09.- C 10.- D 11.- C 12.- D 13.- B 14.- B 15.- E 16.- E
17.- D 18.- E 19.- E 20.- D 21.- B 22.- D 23.- D 24.- B 25.- A 26.- C 27.- A 28.- C 29.- D 30.- B 31.- A 32.- E
33.- C 34.- E 35.- C 36.- C 37.- C 38.- B 39.- C 40.- C 41.- D 42.- B 43.- D 44.- A 45.- D 46.- D 47.- C 48.- A
49.- C 50.- C 51.- C 52.- E 53.- B 54.- A 55.- A 56.- C

CAPITULO 7: FRACCIONES ALGEBRAICAS

01.- C 02.- B 03.- C 04.- D 05.- D 06.- B 07.- C 08.- B 09.- B 10.- C 11.- D 12.- C 13.- B 14.- C 15.- C 16.- C
17.- C 18.- E 19.- C 20.- D 21.- C 22.- E 23.- D 24.- C 25.- A 26.- D 27.- E 28.- B 29.- A 30.- D 31.- A 32.- C
33.- B 34.- D 35.- E 36.- E 37.- C 38.- D 39.- A 40.- E 41.- A 42.- D 43.- B 44.- A

CAPITULO 8: RADICACION Y RACIONALIZACIÓN

01.- D 02.- A 03.- D 04.- C 05.- C 06.- C 07.- B 08.- C 09.- D 10.- C 11.- C 12.- D 13.- C 14.- B 15.- A 16.- C
17.- E 18.- D 19.- C 20.- E 21.- D 22.- C 23.- A 24.- B 25.- D 26.- C 27.- E 28.- B 29.- D 30.- B 31.- C 32.- A
33.- B 34.- E 35.- A 36.- D 37.- E 38.- C 39.- A 40.- E 41.- C 42.- D 43.- E 44.- B 45.- B 46.- D 47.- A 48.- A

CAPITULO 9: FACTORIAL DE UN NUMERO

01.- C 02.- B 03.- D 04.- D 05.- D 06.- C 07.- D 08.- D 09.- B 10.- E 11.- C 12.- B 13.- E 14.- D 15.- C 16.- B
17.- C 18.- B 19.- A 20.- E 21.- E 22.- B 23.- E 24.- B 25.- B 26.- A 27.- A 28.- B 29.- B 30.- D 31.- B 32.- A
33.- D 34.- C 35.- A 36.- C 37.- A 38.- D 39.- D 40.- A

CAPITULO 10: BINOMIO DE NEWTON

01.- C 02.- D 03.- E 04.- D 05.- C 06.- C 07.- A 08.- E 09.- D 10.- C 11.- C 12.- A 13.- D 14.- B 15.- C 16.- B
17.- E 18.- A 19.- E 20.- D 21.- D 22.- C 23.- B 24.- E 25.- C 26.- B 27.- D 28.- D 29.- B 30.- C 31.- C 32.- C
33.- E 34.- B 35.- C 36.- C 37.- A 38.- B 39.- D 40.- B

CAPITULO 11: ANALISIS COMBINATORIO

01.- A 02.- D 03.- A 04.- A 05.- C 06.- C 07.- D 08.- C 09.- B 10.- D 11.- D 12.- C 13.- B 14.- E 15.- C 16.- B 17.- D 18.- C 19.- E 20.- B 21.- C 22.- C 23.- E 24.- D 25.- A 26.- E 27.- C 28.- A 29.- D 30.- E 31.- D 32.- C 33.- E 34.- A 35.- B 36.- C 37.- A 38.- D 39.- A 40.- B 41.- D 42.- C 43.- B 44.- B 45.- B 46.- C 47.- E 48.- E 49.- D 50.- D 51.- A 52.- C 53.- B 54.- E 55.- D

CAPITULO 12: CALCULO DE PROBABILIDADES

01.- E 02.- C 03.- D 04.- B 05.- A 06.- C 07.- A 08.- D 09.- E 10.- B 11.- C 12.- A 13.- E 14.- D 15.- E 16.- A 17.- D 18.- B 19.- A 20.- B 21.- A 22.- C 23.- A 24.- A 25.- B 26.- D 27.- C 28.- C 29.- B 30.- C 31.- E 32.- A 33.- E 34.- C 35.- C 36.- E 37.- A 38.- C 39.- B 40.- A 41.- B 42.- C 43.- C 44.- D 45.- C 46.- B 47.- B 48.- C 49.- B 50.- C

CAPITULO 13: CAMPO COMPLEJO

01.- D 02.- E 03.- C 04.- D 05.- E 06.- C 07.- A 08.- B 09.- D 10.- D 11.- D 12.- E 13.- D 14.- D 15.- B 16.- C 17.- A 18.- E 19.- B 20.- C 21.- C 22.- A 23.- A 24.- E 25.- C 26.- A 27.- E 28.- B 29.- B 30.- A 31.- D 32.- C 33.- C 34.- C 35.- B 36.- A 37.- E 38.- A 39.- A 40.- E 41.- C 42.- D 43.- A 44.- A 45.- D 46.- A 47.- E 48.- A 49.- A 50.- C 51.- D 52.- C 53.- C 54.- D 55.- D 56.- D

CAPITULO 14: ECUACIONES DE 1^er^ GRADO

01.- E 02.- A 03.- E 04.- E 05.- D 06.- A 07.- A 08.- B 09.- E 10.- D 11.- E 12.- C 13.- B 14.- E 15.- E 16.- E 17.- C 18.- D 19.- A 20.- E 21.- C 22.- D 23.- A 24.- C 25.- A 26.- B 27.- C 28.- C 29.- C 30.- B 31.- D 32.- B 33.- A 34.- C 35.- B 36.- D 37.- A 38.- B 39.- D 40.- B 41.- C 42.- D 43.- D 44.- C 45.- C 46.- D 47.- E 48.- D 49.- B 50.- C

CAPITULO 15: ECUACIONES DE 2^do^ GRADO

01.- C 02.- C 03.- D 04.- C 05.- A 06.- E 07.- D 08.- B 09.- A 10.- B 11.- E 12.- D 13.- E 14.- B 15.- C 16.- A 17.- D 18.- B 19.- D 20.- B 21.- E 22.- D 23.- E 24.- D 25.- E 26.- C 27.- C 28.- D 29.- B 30.- A 31.- D 32.- B 33.- E 34.- E 35.- A 36.- B 37.- C 38.- E 39.- D 40.- A 41.- B 42.- D 43.- B 44.- B 45.- A 46.- E 47.- A 48.- D 49.- B

CAPITULO 16: ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

01.- D 02.- E 03.- B 04.- E 05.- B 06.- D 07.- E 08.- A 09.- C 10.- A 11.- E 12.- C 13.- A 14.- B 15.- C 16.- C 17.- B 18.- C 19.- B 20.- C 21.- B 22.- E 23.- D 24.- D 25.- B 26.- D 27.- C 28.- A 29.- C 30.- C 31.- C 32.- C 33.- B 34.- D 35.- E 36.- D 37.- D 38.- B 39.- C 40.- D 41.- D 42.- E

CAPITULO 17: MATRICES Y DETERMINANTES

01.- A 02.- D 03.- E 04.- E 05.- B 06.- A 07.- E 08.- B 09.- D 10.- C 11.- D 12.- E 13.- E 14.- D 15.- E 16.- B 17.- C 18.- B 19.- D 20.- B 21.- A 22.- B 23.- C 24.- A 25.- C 26.- D 27.- A 28.- C 29.- D 30.- C 31.- B 32.- B 33.- E 34.- E 35.- E 36.- B 37.- D 38.- C 39.- A 40.- E 41.- A 42.- C 43.- B 44.- E 45.- A 46.- E 47.- D 48.- E 49.- D 50.- C 51.- D 52.- E

CAPITULO 18: SISTEMAS LINEALES

01.- D 02.- C 03.- A 04.- E 05.- D 06.- C 07.- B 08.- A 09.- C 10.- E 11.- B 12.- C 13.- C 14.- D 15.- A 16.- A 17.- A 18.- B 19.- E 20.- E 21.- E 22.- A 23.- C 24.- B 25.- A 26.- D 27.- D 28.- B 29.- D 30.- E 31.- A 32.- D 33.- B 34.- B 35.- D 36.- A 37.- E 38.- C 39.- C 40.- D

CAPITULO 19: SISTEMAS DE GRADO SUPERIOR

01.- C 02.- D 03.- C 04.- E 05.- E 06.- D 07.- E 08.- A 09.- E 10.- B 11.- D 12.- D 13.- D 14.- C 15.- E 16.- B 17.- B 18.- A 19.- E 20.- E 21.- D 22.- D 23.- C 24.- C 25.- A 26.- A 27.- B 28.- C 29.- D 30.- D 31.- E 32.- B 33.- E 34.- D 35.- C 36.- E 37.- D 38.- D 39.- D 40.- E

CAPITULO 20: PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES

01.- D 02.- D 03.- C 04.- C 05.- A 06.- D 07.- A 08.- C 09.- B 10.- A 11.- C 12.- C 13.- B 14.- E 15.- B 16.- C 17.- E 18.- A 19.- B 20.- D 21.- A 22.- B 23.- E 24.- D 25.- B 26.- D 27.- C 28.- E 29.- A 30.- E 31.- C 32.- C 33.- D 34.- B 35.- A 36.- C 37.- C 38.- E 39.- B 40.- E 41.- C 42.- A

CAPITULO 21: DESIGUALDADES E INECUACIONES DE 1er GRADO

01.- B 02.- A 03.- D 04.- E 05.- C 06.- C 07.- E 08.- A 09.- D 10.- C 11.- D 12.- D 13.- C 14.- E 15.- D 16.- A 17.- B 18.- D 19.- E 20.- E 21.- A 22.- D 23.- A 24.- A 25.- E 26.- E 27.- B 28.- A 29.- B 30.- E 31.- A 32.- D 33.- C 34.- D 35.- D 36.- A 37.- B 38.- B 39.- C 40.- C

CAPITULO 22: INECUACIONES DE 2do GRADO Y GRADO SUPERIOR

01.- D 02.- D 03.- C 04.- E 05.- A 06.- E 07.- E 08.- A 09.- C 10.- D 11.- E 12.- D 13.- A 14.- D 15.- E 16.- E 17.- D 18.- D 19.- A 20.- D 21.- D 22.- E 23.- D 24.- B 25.- C 26.- A 27.- D 28.- B 29.- C 30.- D 31.- B 32.- B 33.- C 34.- A 35.- E 36.- A 37.- D 38.- C 39.- C

CAPITULO 23: RELACIONES Y FUNCIONES I

01.- D 02.- A 03.- C 04.- D 05.- A 06.- C 07.- D 08.- E 09.- A 10.- D 11.- D 12.- A 13.- E 14.- E 15.- E 16.- C 17.- A 18.- D 19.- A 20.- B 21.- A 22.- C 23.- E 24.- C 25.- E 26.- B 27.- A 28.- A 29.- D 30.- A 31.- B 32.- D 33.- C 34.- C 35.- E 36.- B 37.- B 38.- B 39.- E 40.- C

CAPITULO 24: FUNCIONES II

01.- C 02.- D 03.- A 04.- E 05.- C 06.- C 07.- D 08.- A 09.- D 10.- D 11.- E 12.- C 13.- D 14.- A 15.- B 16.- C 17.- C 18.- C 19.- E 20.- C 21.- A 22.- C 23.- E 24.- D 25.- D 26.- C 27.- E 28.- C 29.- A 30.- A 31.- B 32.- A 33.- D 34.- C 35.- D 36.- C 37.- E 38.- D 39.- C 40.- C

CAPITULO 25: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

01.- C 02.- E 03.- E 04.- C 05.- E 06.- E 07.- B 08.- B 09.- D 10.- B 11.- A 12.- C 13.- D 14.- D 15.- A 16.- B 17.- D 18.- C 19.- E 20.- C 21.- C 22.- D 23.- C 24.- E 25.- A 26.- D 27.- C 28.- C 29.- D 30.- D 31.- C 32.- B 33.- D 34.- B 35.- A 36.- C 37.- A 38.- C 39.- C 40.- A 41.- E 42.- A 43.- B 44.- D 45.- B 46.- C 47.- D 48.- C

BIBLIOGRAFIA

1.- **ALGEBRA SUPERIOR**
Murray R. Spiegel
Mc. Graw - Hill (Schaum's Outline)

2.- **PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES**
V. Lidski - L. Ovsianikov - A. Tulaikov
Editorial MIR - Moscú.

3.- **ALGEBRA**
Florence M. Lovaglia - Merrit A. Elmore - Donald Conway
Harper & Row Latinoamericana (HARLA)

4.- **ALGEBRA PRÁCTICA**
Carlos Mataix Aracil
Editorial Dossat S.A. - Madrid

5.- **MIL PROBLEMAS DE ARITMÉTICA Y ALGEBRA**
José Luis Matix Plana.
Editorial Dossat. S.A. - Madrid

6.- **COMPLEMENTOS DE ALGEBRA**
Mario C. Gonzales
Editorial Minerva

7.- **MANUAL DE MATEMÁTICAS**
Bronshtein - Semendiakev
Editorial MIR - Moscú

8.- **MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO**
Louis Leithold
Happer & Row Latinoamericana (HARLA)

9.- **MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEAS**
Jack R. Britton - Ignacion Bello
HARLA S.A. - México

10.- **ALGEBRA ELEMENTAL**
Hall y Knight
Montaner y Simón S.A. - Barcelona

11.- **ELEMENTOS DE ALGEBRA (solucionario)**
G.M. Bruño
Ediciones Bruño - Madrid

12.- **EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE ALGEBRA**
Manuel García Ardura
Librería y casa Editorial Hernando - Madrid

13.- **PRÁCTICA PARA RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS**
V. Litvinemko - A. Mordkóvich
Editorial MIR - Moscú

14.- **ALGEBRA CON APLICACIONES**
Elizabeth Philips - Thomas Butts
HARLA S.A. de C.V. - México

15.- **EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICA**
Armando Rojo - Silvia Sánchez - Mario Greco.
Librería "El Ateneo" Editorial - Argentina.

16.- **PREALGEBRA**
Phares O' Daffer - Stanley Clemens
Addison - Wesley Iberoamericana - California.

17.- **ALGEBRA INTERMEDIA**
Paul K. Rees - Fred W. Sparks
Mc Graw-Hill Book Company

18.- **ALGEBRA SUPERIOR**
H.S. Hall - S.T. Knight
Uteha S.A. - México

19.- **ALGEBRA RECREATIVA**
Yakov Perelman
Editorial Mir - Moscú

20.- **1 000 PROBLEMAS DE ARITMÉTICA, ALGEBRA, GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA**
M. Antonov y Otros
Paraninfo S.A. - Madrid

21.- **CURSO DE ALGEBRA SUPERIOR**
A. G. Kurosch
Editorial Mir - Moscú

22.- **INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS FINITAS**
John G. Kemeny
J. Laurie Snell
Gerald L. Thompson
Editorial Continental - México

23.- **ELEMENTOS DE ALGEBRA SUPERIOR**
Pablo Miguel y Merino
Editorial Cultural - Cuba

23.- **PROBLEMAS DE CONCURSO**
Charles Salkind
Editorial Norma - Colombia

24.- **COMO INGRESAR A LA UNIVERSIDAD**
José Peñaranda - Gerardo Peñaranda
Peñaranda Asociados Editores

25.- **EXAMENES DE ADMISIÓN**
(UNMSM - PUCP - UNFV - UPCH - UNI - UNALM)